R

Ip. 5402.

Matheſi. Syſtemata & methodi 143.

Math. U. 224.

R

Wilhelm Friderich Wucherers

ordentlichen Profeſſors der reinen Mathematik

Anfangsgründe

der

Arithmetik, Geometrie,

ebenen und ſphäriſchen

Trigonometrie.

Mit 13 Kupfertafeln.

Carlsruhe
verlegts Michael Macklot,
Markgräfl. Badiſcher Hof-Buchhändler und Hof-Buchdrucker.
1782.

Bayerische
Staats-
bibliothek
München

Dem

Durchlauchtigſten Fürſten und Herrn

Herrn

Carl Fridrich

Markgrafen zu Baden und Hochberg,

Landgrafen zu Sauſenberg, Grafen zu Sponheim

und Eberſtein, Herrn zu Röteln, Badenweiler,

Lahr und Mahlberg ꝛc. ꝛc.

Meinem gnädigſt

Regierenden Fürſten und Herrn.

Durchlauchtigſter Markgraf,

Gnädigſter Fürſt und Herr!

Groſſe Fürſten, die geheiligte Statthalter des Ewigen, die ſichtbare Hand der alle Geſchöpfe beglückenden unendlichen Güte, zeichneten ſich immer, durch unwandelbare Wahrheitsliebe, durch raſtloſe Bemühungen, ihre Kinder glücklich zu machen, aus; und Euer Hochfürſtliche Durchlaucht glänzen, unter dieſen Wohlthätern der Menſchheit, durch Handlungen hervor

welche auch Badens künftige Geſchlechter in den ſpäteſten Zeiten beneidenswürdig machen werden.

Unter tauſend höchſtwichtigen Regierungsgeſchäfften entgieng die Mathematick nicht Ihrer gnädigſten Fürſorge. Sie befahlen, dieſelbe in Ihren Landen allgemeiner, durch ſie, Richtigkeit im Denken, wohlthätige Ausflüſſe, auf andere Künſte und Wiſſenſchafften, zu verbreiten.

Sie ſprachen — und es geſchah. Maler machte den Anfang, Böckmann führte auf dem gelegten Grund ein Gebäude auf, welches Ihres höchſten gnädigen Beyfalls gewürdiget wurde und Sie geruheten endlich auch mich zum Lehrer der reinen Mathematick zu ernennen. Mein Freund und ich arbeiteten ſeitdem, gemeinſchafftlich, an denen uns anvertrauten Studierenden. Oft wurde von der

Nothwendigkeit, eines der Zeit und Lage angemeſſenen Lehrbuchs der Mathematick, für das Gymnaſium, geſprochen, oft wurd' ich ermuntert, daſſelbe aufzuſetzen.

Ich wagt' es endlich und erkühne mich Euer Hochfürſtlichen Durchlaucht ein Werk unterthänigſt zu Füſſen zu legen, welches unter Ihrem höchſten Schutz, einen Theil dieſer Abſichten leichter zu erreichen, beſtimmt iſt.

Voll von Empfindungen des feurigſten Danks (und ſind diß nicht die allgemeine glücklichſte Empfindungen aller Ihrer getreueſten Unterthanen?) welcher fühlt, daß er die unſchätzbare Gnadenbezeugungen ſeines Fürſten zwar nie vergelten, aber doch aufs lebhaffteſte erkennen kann, weih' ich diß Opfer meiner tiefſten Ehrfurcht und unterthänigſten Liebe, dem gnädigſten —

beſten Vater ſeines Landes, auch meinem angebohrnen Landesvater

Durchlauchtigſter Markgraf,
Gnädigſter Fürſt und Herr,

Euer Hochfürſtlichen Durchlaucht

Carlsruhe, den 18ten Herbſtmonat
1781.

unterthänigſter Knecht
W. F. Wucherer.

Vorrede.

Du haſt dem Urtheil des mathematiſchen Publikum deine Arbeit unterworfen, welches deine erſte Verſuche geneigt aufnahm *). Sage gar nichts vor dieſen Anfangsgründen! So flüſtert mir in dieſem Augenblick ein gewiſſes Etwas zu. Ich gehorche, und bemühe mich, nur einige Leſer, die mich hören wollen, auf den Standpunkt zu leiten, aus dem ich meine Bemühung angeſehen haben möchte. Man befürchte kein Anpreiſen, kein Selbſtlob, keine heuchleriſche Demuth, keine unbeſcheidene Vertheidigung gegen

---

*) Allgem. deutſche Biblioth. 42ten Bandes 2tes Stück p. 454. Schwäbiſches Magazin ꝛc. 1778. 9tes Stück p. 722. und die Göttingiſche Gelehrte Zeitung 1780. 125tes Stück.

gegen wahrſcheinliche Einwürfe. Nur das, was doch der Verfaſſer immer am beſten thun kann, will ich thun — Rechenſchafft von meinem Zweck und dem, wenigſtens gewünſchten, Nutzen, meiner Schrifft geben. Manche, vorzüglich junge Schriftſteller, glauben ſich ein Verdienſt zu erwerben, wenn ſie in ihren Vorreden ihren Leſern, ihre viele und ſchwere Leiden, gehäufte Arbeiten und drückende Verfolgungen, vorwinſeln können; die bisweilen wahr, oft ſelbſt gemacht, oft Roman ſind. Ich mags nicht thun. Der mich kennend und liebende Theil meiner Leſer kennt und bedauert auch meine Lage, wenn und wo ſie es verdient; bimſenſteinerne Seelen werden durchs Klagen nicht gefühlvoll, Feinde nicht vernünftig. Und wer mich nicht kennt — Ey was hat mir denn das Publikum zu Leide gethan, daß ich ihm meine proſaiſche Elegien aufdrängen ſollte? Und wenn ich mit Unrecht jammerte — ſchämen würd' ich mich, vor den Augen meiner Landsleute, Auswärtigen Dinge vorzulügen, welche jedes Kind in meinem Cirkel als Unwahrheiten kennet. Alſo auch keine Thränen-Urne — Einfache Erzählung von der Entſtehung dieſes kleinen Buchs und nichts weiter.

Bey

Bey uns geſchieht, was der Erlangiſche Rezenſent 1778. p. 571. in der Beurtheilung der Mülleriſchen Vorbereitung zur Geometrie ꝛc. ꝛc. wünſchte. Man fängt ſchon in den untern Claſſen an, das Ausübende der Arithmetick und Geometrie, als eine Ergötzung zu treiben. Die nemliche Einrichtung iſt auf den übrigen Pädagogien des Landes, ſo, daß gewöhnlich, keine andere, als ziemlich geübte Akusmatiker, unter die Zuhörer der öffentlichen Vorleſungen befördert werden. Ein Vortheil, der oft bey mathematiſchen Collegien, zu nicht geringem Verdruß des Lehrers, mangelt, der ganz Unwiſſenden, halb initiirten und ſchon ſtärkern Perſonen, auf einmal leſen ſoll. Meinen Zuhörern wollt' und konnt' ich alſo ein Lehrbuch in die Hände geben, welches, da, wo die Ausübung ſchon als bekannt vorausgeſetzt werden kann, blos die Theorie, mit Verweiſung auf Malers Rechenkunſt und Geometrie (dieſe beyde ihnen größtentheils geläufige kleine Lehrbücher) und nur in denen Fällen das Prackticſche ausführlicher enthielte, wenn es die Beſchaffenheit der Umſtände erforderten. Ich erſpahre dadurch Raum und Zeit, nöthige ſie, das ſchon einmal Durchgearbeitete, noch einmal,

aus einem ernſtlichern Geſichtspunkt anzuſehen; da ſie ohnehin dieſe Schrifften beſitzen, konnt' ich die Theorie näher zuſammen, und, wie ich hoffe, ohne Nachtheil der Deutlichkeit, mehr hineindrängen; ja es wird ſelbſt der Schwächere, wenn er die mit M. A. (Malers Arithmetick) und M. G. (Malers Geometrie) angeführte §§. nachſchlägt, im Stande seyn, ſich zu helfen, geſetzt, daß er auch dieſe beyde Bücher nie durchgearbeitet hätte.

Meine Zuhörer erhalten, von mir, als Studenten, den erſten wiſſenſchafftlichen Vortrag, in der reinen Mathematick. Sie müſſen alſo in der Einleitung, einige Erläuterung, über die darinnen ſo oft vorkommende Kunſtwörter und die Lehrart ſelbſt bekommen, gleich im Anfang, wenigſtens ſo viel vom Nutzen dieſer Wiſſenſchafft überzeugt werden, daß ihre Aufmerkſamkeit, ſo viel möglich, erhöhet wird, daß ſie einſehen: Warum ſie Mathematick ſtudieren ſollen.

Die Arithmetick enthält im 1ten Abſchn. Die Begriffe von den Zahlen überhaupt,

wie

wie ſie geleſen, geſchrieben und verändert werden, nebſt den allgemeinen Grundſätzen. Im 2ten. Die vier Rechnungsarten in ganzen unbenannten Zahlen, allgemeinen Zeichen, benannten Zahlen, ihre Proben und überhaupt dabey anzuwendende Vortheile. Im 3ten. Die Brüche. Im 4ten. Die Lehre von den Dignitäten und dem Wurzel-Ausziehen. Im 5ten. Etwas von den Gleichungen und dem Wurzel-Calcul. Im 6ten. Die Verhältnuſſe und Proportionen. Im 7ten. Die Progreſſionen. Im 8ten. Decimal- und Sexageſimalbrüche. Im 9ten. Die Logarithmen. Im 10ten. Geſchichte der Arithmetick und Bücherkenntnus.

Walliſens Beyſpiel ließ mich die Buchſtabenrechnung mit der gewöhnlichen Rechenkunſt verbinden, denn mich däucht, daß nun Belidors Weiſſagung erfüllet ſey: Es wird die Zeit kommen, wo man dieſe Rechnung mit der gewöhnlichen Arithmetick lernen wird. Ich that es um ſo mehr, da mich eigene Erfahrung, auch im vorigen Jahr überzeugte, wie

leicht

leicht der lehrbegierige Jüngling manche Beweiſſe faſſet, wenn er ſich im Vorhof der Algebra nur ſo viel umgeſehen hat, als durch Hülfe des 5ten Abſchnitts geſchehen kann. Selten, inſonderheit in den erſten Abſchnitten der Arithmetick, wurden in den Beweiſen, die Zwiſchenſätze ausgelaſſen und alles in der Buchſtabenrechnung, durch häufige Beyſpiele erläutert, weil auch hier die Erfahrung lehrte: Daß das Gegentheil, manchen Anfänger, eben ſo ſehr von der Mathematick wegſchrecket, als die vergebliche Bemühung, oder der wohl gar veranlaßte Fall eines Kindes, welches gehen lernt und auf einmal zu weite Schritte thun ſoll. Der §. 190. bis 200. der Arithmetick und ähnliche Stellen, werden gleich das erſtemal erklärt, wenn es die Fähigkeit der Zuhörer geſtattet, wo nicht, in einem faſt alle Jahre von mir geleſenen Wiederholungs-Collegio. Von den Progreſſionen, Decimal- und Sexageſimalbrüchen, nehm' ich, für alle, nur ſo viel mit, als der 9te Abſchnitt erfordert, deſſen Stelle in der Arithmetick, die Natur der Sache, Segners, Karſtens und Kåſtners Beyſpiele rechtfertigen.

In der Geometrie, erläutert der 1te Abſchnitt die Begriffe und die Lehre vom Längenmaas, der 2te macht uns mit einigen vorläufigen Aufgaben und allgemeinen Vorbereitungsſätzen bekannt. Im 3ten wird die Theorie von der Gleichheit der Triangel, den Parallel=Linien und der Aehnlichkeit der erſtern vorgetragen. Man ſieht aus der Geſchichte der Geometrie, warum ich die Wolfiſche Methode, bey der letzten, vorgezogen. Wer dieſe wohl gefaßt hat, wird ſich mit leichter Mühe die Euklideiſche bekannt machen können, die allerdings geometriſcher, aber auch für Anfänger ſchwieriger iſt, und, wenn es Zeit und Köpfe geſtatten, im mündlichen Vortrag beygefügt wird. Der 4te Abſchn. handelt von den Cirkeln, als Linien betrachtet, und denen dabey vorkommenden geraden Linien und Winkeln. Der 5te ſpricht von den Parallelogrammen und Trapezen, der 6te von den Vielecken und Cirkeln als Flächen, als Vielecken von unendlich vielen Seiten betrach-

tet. Der 7te lehrt die Ausrechnung, Vergleichung, Verwandlung und Theilung der Figuren. Der 8te unterſucht die Lage der Linien und Ebenen gegen einander, worinnen ich Herrn Abt Häſelers ausnehmend deutlichem Gang vorzüglich folgte. Der 9te giebt die Begriffe von den Körpern und ihrer Entſtehung, nebſt den daraus flieſſenden ſtereometriſchen Grundſätzen. In der Art, ihn zu behandeln, liegen die Gründe, warum er nicht zum Erſten gezogen wurde. Nicht daran zu gedenken, daß dieſe Begriffe unterdeſſen, in der allzugroſſen Entfernung von der Stereometrie, ſehr viel an ihrer Lebhaftigkeit verloren hätten. Der 10te lehrt etwas von der Verfertigung der Körper, um die im 9ten vorgetragene Erklärungen, deſto anſchauender, fruchtbarer — und die im 11ten gelehrte Berechnung der Oberflächen ſenkrechter und einiger ſchiefen Körper leichter zu machen. Der 12te Abſchnitt giebt die Grund- und Lehrſätze von der Gleichheit gleichdicker und zugeſpitz-

ſpitzter Körper; wo ich mit Segnern, nicht aus dem Grunde des Untheilbaren, ſondern blos aus dem Begriff der gleichen Ausdehnung ſchlieſſe und nur der Schwierigkeit und Weitläuftigkeit wegen, die Methode der Erſchöpfung (Methodum limitum ſeu Exhauſtionis) nicht nach ihrer vollen Stärke wählte. Der 13te ſpricht von der Kugel, ihrer Oberfläche und Innhalt; der 14te vom ſtereometriſchen Maas und wirklichen Ausmeſſen der Körper. Im 15ten wird etwas von der Aehnlichkeit und Verhältnus der Körper; im 16ten, ſo viel ſichs hier thun läßt, von den Viſirſtäben geſagt; der 17te berührt die Markſcheidekunſt und der 18te liefert die Geſchichte der Geometrie nebſt der ſo nöthigen Bücherkänntnus.

In der Ebenen Trigonometrie, behielt ich die, in meinen vor drey Jahren herausgegebenen Erläuterungen der Wolfiſchen Trigonometrie, gewählte Ordnung, da ich bisher immer mehr überzeugt wurde: Daß junge Studierende

nach dieſem Gang ſehr leicht dieſe Wiſſenſchafft faſſen, welche ſonſt öfters von manchem verabſcheuet wurde, dem Rechenkunſt und Geometrie willkommen geweſen waren. Ich gehe 1) Von den Erklärungen und Eintheilung der Trigonometrie; 2) zur Erklärung der trigonometriſchen Linien und 3) ihrer Erfindung durch Hülfe der Arithmetick und Geometrie über; lehre im 4ten Abſchnitt die Anwendung der Logarithmen auf die trigonometriſche Linien; erweiſe im 5ten die Hauptſätze zur Berechnung der Triangel, deren wirkliche Berechnung im 6ten gelehret und im 7ten angewendet wird. Einiges von meinen Erläuterungen wurde zuſammengezogen, einiges weggelaſſen, manches erweitert und die dort befindliche zween letzte Abſchnitte, von der trigonometriſchen Geſchichte und Bücherkenntnus, hinter die ſphäriſche Trigonometrie geſetzt, um von beyden zugleich ſprechen zu können. Das Erſte und Zweyte, konnte in den 5 erſten, vorzüglich im 4ten Abſchnitt geſchehen, weil ich die Gründe in der Rechenkunſt

und Geometrie, nach meiner Abſicht, ſchon gelegt hatte. Im 6ten bleiben die häufigen Berechnungen weg, welche man in den Erläuterungen ꝛc. deſto leichter nachſchlagen kann, da ſie wohlfeil ſind, und auf die zu dieſem Werk gehörige trigonometriſche Kupfertafeln paſſen. Hingegen wurde einiges ausgeführt, was ich dort, abſichtlich, weggelaſſen hatte, z. E. §. 37. Trig. Und daß der 8te Abſchnitt beträchtlich erweitert worden, ſieht jeder, der die §§. 47. 48. 52. 54. 55. 60. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. mit den erſten vergleichen will.

Aber wozu die ſphäriſche Trigonometrie in einem Lehrbuch für ein Gymnaſium? —

Weil ſich von Zeit zu Zeit (und Gott verhüte in jedem Land das Gegentheil!) Jünglinge finden, die zu mehr als dem Gewöhnlichen, das man fordert, gebohren ſind, die gerne weiter, genauer unterſuchen möchten, die etwa in beſondern Vorleſungen, das öffentlich Gehörte, erweitern — verſtärken wollen; weil die ſphäriſche Trigono-

metrie zur reinen Mathematick gehört, und in der Aſtronomie und Geographie, ja ſchon in der Lehre von den Körpern alsdann unentbehrlich wird, wenn ſie vollſtändig — gründlich vorgetragen werden ſoll (S. Karſtens Lehrbegriff II. Theil XXV und XXVIten Abſchnitt) Nehmen doch dieſe erſte Gründe wenigen Raum ein. Wem ſie für ſeine Jahre, Lage oder überhaupt zu ſphäriſch iſt, der laſſe ſie ruhig liegen. Die nähere Entwickelung der Kugelſchnitte, welche freylich ſchon in der Stereometrie hätte können vorgetragen werden, macht deswegen den erſten Abſchnitt aus, um das zu ergänzen, was ich dort nicht für alle, nach meiner Abſicht, ſagen konnte und mochte. Im 2ten werden die Gründe und Berechnung, ſowohl der recht- als ſchiefwinklichten Dreyecke, vielleicht nicht ganz undeutlich erklärt. Käſtnern und Clemmen darinnen genützt zu haben, acht ich mir für keine Schande. Männer vom Rang unter den Gelehrten, ſagen über die mathematiſche Arbeiten eines Ausländers: „Iſt nach dem Ver-

„dienſt

„dienſt des Erfindens, nicht das Verdienſt des „Einkleidens und Verbreitens das nächſte?“ (A. D. B. 21ten Bandes 11tes Stück p. 371.) Weit entfernt von dem lächerlichen Stolz, mir dieſe Stelle in ihrer ganzen Ausdehnung anzupaſſen, ſag' ich freymüthig: Wenn ich durch die Ausgabe dieſer Anfangsgründe einiges Wohlwollen des Publikum, vorzüglich meines Vaterlands erhalten ſollte, ſo will ich darauf, blos aus dem Grund einigen Anſpruch machen, weil ich viele, aus andern Schrifftſtellern geſammlete Wahrheiten, deutlich, der Abſicht der Zuhörer gemäß vorgetragen, in einen ihrer Lage angemeſſenen Zuſammenhang gebracht zu haben hoffe.

Ich hab' über verſchiedene Materien mehr geſagt, als ich alle Jahre öffentlich vortrage. Allein meine Vorleſungen ſollen ſich auch nicht immer gleich und ähnlich ſeyn, ſondern nach der Beſchaffenheit der Studierenden richten. Sind dieſe ſchwächer, wie leicht kann man einiges weglaſſen; ſind ſie ſtärker, ſo iſt man des Dicktirens und Zuſätzemachens überhoben. Und

bey wie vielen, bleibt ihr Lehrbuch das einige, welches ſie ſich in dieſer Wiſſenſchafft anſchaffen? Sollten für dieſe, Fingerzeige — Stoff zu eigenem weiteren Nachdenken nicht vortheilhafft ſeyn? Ich brach an manchen Orten vorſetzlich ab, da, wie begreiflich, viele, ja die meiſte Studierende, die Mathematick nur als Hülfswiſſenſchafft lernen, und auch die wenige, welche zu mehrerem beſtimmt ſind, im Anfang nicht überfüllt werden dörfen, wenn ſie verdauen ſollen. Denn wer auf dem Lehrſtuhl ſinnlos deklamirt, mehr vorträgt, als die Seelen ſeiner Zuhörer, im Durchſchnitt genommen, faſſen können, oder in ein Lehrbuch mehr häuft, als der vernünftigen Abſicht des Ganzen gemäs iſt, hat im erſten Fall viel Aehnlichkeit mit einem Mann mit dem grünen Hut und iſt im andern und dritten, gelinde zu ſprechen, der Pfau, der ſich gerne bewundert. Aus dieſem Grund, iſt, unter andern, meine Trigonometrie, noch kürzer, als ich ſonſt gewünſcht hätte, ausgefallen.

Manchem wird alſo mein Vortrag nicht gedrängt genug, vielen an manchen Orten zu

ge-

gedrängt ſcheinen. Die erſtere entſchuldiget mich gewiß, wenn ſie überlegen: Daß ich für Anfänger ſchreibe. Den Leztern ſag ich:

I will not like friend S** rattle,

And lose my matter in my prattle.

Aber wozu die Geſchichte der Arithmetick, Geometrie und Trigonometrie ungleich weitläuftiger als andere? — Weil ich den dogmatiſchen Vortrag nicht immer unterbrechen wollte. Wäre das, was in dieſen Abſchnitten liegt, in den Scholien verſteckt, ſo würde dieſer Vorwurf wegfallen, aber ich würde auch meine Abſicht ſchwerlich ſo gut erreichen. Ließ der Nacheiferungstrieb den jungen Themiſtokles nicht ſchlafen, ſo oft er die Thaten der groſſen Helden ſeiner Vorwelt geleſen hatte, warum ſollte nicht die Geſchichte der Helden unſers Fachs, ein ähnliches Feuer in der Seele manches Jünglings anfachen. Geſetzt, daß es nur Einer — nur etliche ſind — ſo lernen doch hundert und mehrere, die, beym eigenen Studieren, ſo unentbehrliche Quellen kennen. Gern hätt' ich von dem (Ar. §. 304.) blos angeführten Chineſiſchen Rechenbrett eine nähere

Beſchreibung mitgetheilt, da ſich das, von unſerm gelehrten Herrn Pfarrer Roman in Sulzburg, aus China mitgebrachte Original auf hieſiger Hochfürſtl. Bibliothek befindet, und nach der Bemerkung des Herrn Pfarrers, für erwachſene Perſonen, nur die Gröſſe der Rahme und der Kügelchen verdoppelt und 15 Stäbchen angebracht werden. Da aber dieſer würdige Mann mir ſelbſt ſchreibt: „Sobald ich einen Pfarr-Vikarius erhalte, der meiner ſchwächlichen Ge„ſundheit " (er leidet vorzüglich an den Augen) „die Geſchäffte erleichtert, ſo werd' ich den Ge„brauch der Chineſiſchen Rechentafel ausführlich „bekannt machen" ſo wollt' ich ihm nicht vorgreiffen.

Meine bisher gegebene Winke überheben mich, die Frage: Warum haben Sie diß ganze Buch herausgegeben? zu beantworten. Geſundheit und Muſſe wird nicht ſowohl bey mir, als bey meinem theuren Gönner und Freunde, Herrn Hofrath Böckmann erfordert, und dann wird, vielleicht, von Ihm der zweyte Theil, die angewandte Mathematick, erſcheinen.

Uebri-

Uebrigens muß ich noch zur Ehre des Herrn Verlegers und ſeiner Officin ſagen: Daß derſelbe mit Vergnügen, alle dazu erforderliche Zeichen neu hat gieſſen laſſen und im genauen Setzen der Calcule und Beweiſſe vielleicht mehr Genauigkeit angewendet worden (um alles ſo deutlich als möglich zu machen) als in manchen Werken von dieſer Art nicht immer geſchehen iſt. Wer das Mühſame der Correckturen bey dergleichen Schrifften kennt, der wird die wenige bemerkte Druckfehler gerne verzeihen und verbeſſern.

Ein beſonderer Vorfall, verurſachte, daß diß ſchon vor Oſtern 1780 zu drucken angefangene Werk (ohngeachtet die Handſchrifft, noch weit früher, völlig fertig da lag) im Sommer mußte unterbrochen werden, und erſt im Anfang 1781 fortgeſetzt werden konnte. Verſchiedene Erſcheinungen nöthigen mich, diß dem Publikum zu ſagen, und die, die es angeht, werden es verſtehen, warum ich dieſe Bemerkung mache.

Bin

Bin ich glücklich genug, durch meine Schrifft, den jungen Seelen meiner Zuhörer, nebſt den Känntnuſſen der Mathematick, richtigen Wahrheitsſinn einzuflöſſen, vielleicht auch auſſer meinem Vaterland, einigen dadurch nützlich zu werden, ſo halt ich mich für edel belohnt und werde die Erinnerungen, einſichtsvoller billiger Männer, mit dem wärmſten Dank verehren, die ſich die Mühe geben wollen, meine Arbeit, mit einem kritiſch freundſchafftlich belehrenden Aug durchzugehen.

Carlsruhe, den 18ten Herbſtmonat
1781.

Ein-

Bayeriſche
Staats-
Bibliothek
München

Einleitung.

§. 1.

Ohngefehr 300 Jahr vor Chriſti Geburt, zeigte der groſze Euklid zuerſt durch ſein Beiſpiel, daß die Warheiten der Mathematick im vorzüglichſten Verſtand, eines deutlichen, gründlichen, voll überzeugenden Vortrags fähig ſind. Ihm folgten alle wahre Meßkünſtler, aber niemand wagt' es, dieſe Lehrart auch in andern Wiſſenſchafften anzuwenden, biß der Freiherr von Wolf ſie in der erſten Hälfte des jetzigen Jahrhunderts faſt allgemein machte. In der gegenwärtigen zweiten Hälfte fieng ſie an, aus an-

dern mit der Matheſis nicht genau verwandten Theilen der Gelehrſamkeit verdrängt zu werden, und zog ſich in die Arme ihrer Mutter zurück, für welche ſie freilich auch am vorzüglichſten paſſet.

§. 2.

Denke, ſchreibe und ſprich: Deutlich, gründlich, im genaueſten Zuſammenhang. Diß iſt das Hauptgeſetz der mathematiſchen Lehrart, oder der Ordnung, welcher ſich die Mathematicker im Vortrag ihrer Warheiten bedienen.

§. 3.

Sie geben daher vor allem andern, ausführliche, vollſtändige, deutliche, wenigſtens klare Begriffe, von dem Gegenſtand, den ſie abhandlen und bilden aus dieſen, richtige, bald Wort, bald Sach Erklärungen, derer Möglichkeit, Warheit und Wirklichkeit ſie, wenn ſie nicht für ſich in die Augen fällt, auſſer allem Zweifel ſetzen, und alſo

1) Die deutliche Begriffe den klaren, die ausführliche den nicht ausführlichen, die vollſtändige, den unvollſtändigen, die Sach Erklärungen den Wort-Erklärungen, ſo viel möglich iſt, vorziehen.

2) Folglich erlauben ſie ſich keinen Ausdruck, der nicht entweder an ſich bekannt, oder vorhin genau beſtimmt worden iſt.

§. 4.

Sie ziehen aus der Verbindung dieſer Erklärungen Grundſätze im ſtrengen Verſtand und Heiſche Sätze, unter welche ſie, wenn ſich keine andere Gründe ausfindig machen laſſen, auch die Erfahrungen aufnehmen.

§. 5.

Eine neue Verknüpfung dieſer Sätze unter ſich ſelbſt und mit den vorhergehenden Erklärungen, leitet ſie auf Lehrſätze und Aufgaben. Bei den erſtern ſieht man: Auf den Satz ſelbſt, auf die Bedingung unter welcher er wahr iſt, und auf den Beweiß, ſo wie bey den letztern: Auf die Aufgabe, ihre Auflöſung und Beweiß.

§. 6.

Sowohl die Bedingungen als auch die Auflöſungen und Beweiſe ſucht man: In

1) Den voran geſchickten Erklärungen,

2) Grund oder auch Heiſcheſätzen,

3) Andern ſchon erwieſenen Lehrſätzen und Aufgaben.

Folglich wird der Meßkünſtler nie das gegenwärtige aus dem erſt nachfolgenden erklären oder beweiſen, vorzüglich wenn ſich das letztere auf das erſtere gründet. Er wird aber auch nicht nur dem Ge-

dächtnüß und Beurtheilungskraft das Nachdenken zu erleichtern, ſondern auch den deutlichen Vortrag ſo kurz als möglich zu faſſen, die wichtigſte Beweißgründe zum Nachſchlagen anführen. So wird der Lernende immmer finden, daß ſich alle Aufgaben in wirkliche Lehrſätze verwandlen laſſen.

§. 7.

Unmittelbare Anwendungen der Lehrſätze und Aufgaben finden in den Zuſätzen, ſo wie die Aufklärungen beſonderer Schwierigkeiten, der Nutzen oder auch die Geſchichte eines Satzes, in den Anmerkungen, ihre ſchicklichſte Stelle.

§. 8.

Eine jegliche Wiſſenſchafft, die ſich nicht ſelbſt die Lobrede halten will, daß es ihr an deutlichen Begriffen, ſichern Gründen und Zuſammenhang fehle, könnte nun freylich nach dieſer Lehrart abgehandelt werden. Weil diß aber gemeiniglich nur in der Mathematick mit der größten Schärfe geſchieht, und vielleicht auch nur in Ihr im ſtrengſten Verſtand möglich iſt, ſo erhellet

1) Warum dieſe Methode den Namen der mathematiſchen Lehrart erhalten.

2) Warum die Griechen und ihre vernünftige neuere Nachfolger den Anfang der Studien mit der Matheſis machen. Sie ſuchen den Ver-

ſtand der Lernenden dadurch an Deutlichkeit, Gründlichkeit und Zuſammenhang zu gewöhnen.

3) Aber auch: Daß handwerksmäßige Gedächtnuß Mathematick, welche die Deutlichkeit der Begriffe vernachläßigt, an ſpielenden Aufgaben hängen bleibt, ſich nichts um die Beweiße bekümmert, und den Zuſammenhang der Kenntnüſſe durch beſtändiges Unterbrechen des Studierens unmöglich macht, keinem den No. 2. bemerkten Vortheil verſchaffe, wenn er auch alle mathematiſche Vorleſungen mit angeſtaunet hätte.

II. Abſchnitt.

Entwicklung einiger Hauptbegriffe, und Theile der Mathematick.

§. 9.

Wenn wir ein Ding in die Stelle eines andern unter feſtgeſetzten Umſtänden ſetzen, und keine Veränderung, den Ort ausgenommen, dadurch entſtehet, ſo heiſſen dieſe beyde Dinge, Dinge von einerley Art. (Eadem) Eine Menge von dergleichen Dingen wird Größe, (Quantitas) Ein jedes derſelbigen woraus die Größe beſtehet, Einheit (Unitas) genennet.

§. 10. Zuſatz.

1) Man kann alſo gewiſſe Dinge, bald als Dinge von einerley, bald als Dinge von verſchiedener

Art anſehen, je nachdem man ſie unter verſchiedenen Umſtänden betrachtet.

2) Wo mehrere Dinge von einerley Art ſind, iſt eine Größe und umgekehrt.

3) Das nemliche Ding, kann, in verſchiedenen Betracht, bald eine Größe, bald keine Größe ſeyn.

4) Größen als Größen ſind nur durch die Menge dieſer Dinge unterſchieden.

5) Dieſe Menge iſt entweder bekannt oder nicht.

§. 11.

Die Größe erfinden, heißt, die Menge der Dinge von einerley Art woraus ſie beſteht, bekannt machen.

§. 12.

Wiſſenſchaft nennt man eine Fertigkeit, das, was man behauptet, aus unumſtößlichen Gründen zu beweiſen.

§. 13.

Die Mathematick iſt eine Wiſſenſchafft von Erfindung der Größen.

§. 14.

Eine endliche Größe (Quantitas finita) heißt diejenige in welcher wir die Menge von gleichartigen Dingen beſtimmen können. Das Gegentheil giebt den Begriff einer unendlichen Größe.

§. 15. Zuſatz.

Nur von den erſtern gilt demnach der Satz in der höchſten Allgemeinheit: Eine jede Größe kann vermehrt oder vermindert werden.

§. 16.

In gleichzeitigen Größen (Quantitates' ſimultaneæ) ſind alle ihre gleichartige Dinge auf einmal vorhanden, in Nach und nach entſtehenden (ſucceſſivæ) nicht. In ausgedehnten Größen (extenſivæ) ſind die Theile auſſereinander, in nicht ausgedehnten (Intenſivæ) läßt ſich kein Theil auſſer dem andern ſetzen.

§. 17.

Bey den ausgedehnten, iſt, zwiſchen zwey gleichartigen Dingen, entweder noch ein drittes möglich, oder nicht. Im erſten Fall ſind es unſtätige (interruptæ) im andern ſtätige (continuæ) Größen.

§. 18.

Größen können ſowohl an ſich, als auch in ſofern ſie Eigenſchafften wirklich vorhandener Dinge ſind, betrachtet werden. Geſchieht das erſtere, ſo werden ſie abſtrackt, im andern Fall aber concret betrachtet. Die reine Mathematick (pura) beſchäftigt ſich mit den erſtern, die angewandte (adplicata) mit den letztern.

§. 19.

Nun erfindet die reine Matheſis entweder unſtätige, oder ſtätige Größen. Daher haben wir die Arithmetick und Geometrie im weitläuftigſten Verſtand,

als die beyden Hauptheile derſelbigen, jetzo näher zu unterſuchen.

§. 20.

Wenn ein und eben dieſelbige Größe auf eine gedoppelte Art ausgedruckt wird, ſo ſind beyde Ausdrücke einander gleich, und nun heißt dieſer gedoppelte Ausdruck der nemlichen Größe, inſofern wir auf ſeine Gleichheit ſehen, eine Gleichung (Æquatio.) Findet die Arithmetick ihre Größen ohne Gleichungen, ſo iſts die gemeine oder niedere Arithmetick (Elementaris.) Braucht ſie aber Gleichungen zur Erfindung derſelbigen, ſo nennt man ſie Algebra.

§. 21.

Auf eine ähnliche Art pflegt man die Geometrie in die niedere (elementarem) und höhere (ſublimiorem) einzutheilen. Jene unterſuchet bloß gerade Linien nebſt dem Cirkel und denen hieraus entſtehenden Flächen und Körpern. Dieſe entdeckt die Eigenſchafften ſehr vieler krummen Linien und der aus ihnen entſtehenden Größen.

§. 22.

Aber auch in der Elementar Geometrie, veranlaßt der Gegenſtand und die Bearbeitung deſſelben beſondere Abſchnitte. Die Elementar Geometrie im ſtrengſten Verſtande, beſchäftigt ſich mit geraden Linien, dem Cirkel und allen hieraus entſtehenden Größſen und erfindet die unbekannten Größen, ſowohl durch Zeichnung als Rechnung; die Trigonometrie hinge-

gen unterſucht bloß die fehlende Theile der Triangel allein durch Berechnung. Wenn dieſe Dreyecke auf ebenen Flächen liegen, ſo gehören ſie in die ebene (plana) wenn ſie aber auf der Oberfläche einer Kugel befindlich ſind, in die ſphäriſche (ſphærica) Trigonometrie.

§. 23.

Alles was von §. 14. biß hieher vorgetragen worden, läßt ſich bequem in folgender Tafel vorſtellen.

Eine jede Größe iſt §. 14.

Entweder unendlich. — Oder endlich

Beyde §. 16.

Entweder Nach und nach entſtehend. — Oder gleichzeitig

Dieſe §. 16.

Nicht ausgedehnt. — Oder ausgedehnt

Und hier §. 17.

Unſtätig — Oder ſtätig.

Arithmetick §. 19. daher §. 20. — Geometrie §. 19. Folglich §. 21.

Gemeine Arithmetick. — Oder Algebra.

Elementar Geometrie. — Oder Höhere Geometrie.

dieſe §. 22.

Geometrie im ſtrengſten Verſtande. — Oder Trigonometrie u. zwar

Ebene Trig. — ſphäriſche Trig.

III. Abſchnitt.

Nutzen der Mathematick vorzüglich der reinen.

§. 24.

Alle wahre Verehrer der Mathematick erndten von ihr einen doppelten Vortheil. Ihre Lehrart gewöhnt uns unvermerkt an Deutlichkeit, Gründlichkeit, Ordnung und Zuſammenhang (§. 8. Nr. 2.) da ihre Wahrheiten, auch das ſtrengſte Nachdenken, noch immer, durch ihre in die Sinnenfallende Gegenſtände, weit mehr erleichtern, als keine andere Wiſſenſchafft zu thun fähig iſt.

§. 25.

Sie macht den Theologen zu Erklärung wichtiger Schrifftſtellen und ihrer Vertheidigung gegen die Zweifler geſchickt. Reuſchens, Baumgartens, Canzens, Carpovens, Schuberts und Lilienthals Beiſpiele beſtättigen dieſes. Man ſehe: Wiedeburgs Matheſis biblica, Neuere von Herrn Kammerrath Wiedeburg in Jena herausgegebene Ausgabe in 8vo. Eiſenſchmid de Menſur. & ponder. veterum, der allen Philologen nützet. Lilienthals gute Sache der göttlichen Offenbahrung. Schmids bibliſcher Mathematicus.

§. 26.

Der Rechtsgelehrte kann ſie, bey ſchweren Zinßberechnungen, Kaufmanns Prozeſſen, und Beurthei-

lungen vorgenommener Länder und Gütertheilungen unmöglich entbehren, wenn er anderſt mit eigenen Augen ſehen und die vorgelegte Beweiſſe prüfen will. Dieſe Anwendung erleichtern: Polacks Matheſis forenſis. Thomaſii cautelæ circa Jurisprudentiam. Oetinger de Jure limitum.

§. 27.

Den Arzt wird ſie, in Beſtimmung des Verhältnuſſes der Arzneyen, und nach D'Aubentons Beiſpiel, in der Zergliederungskunſt unterſtützen, ihm die Heiligthümer einer gründlichen Naturlehre öffnen, ohne welche er weder den menſchlichen Körper den er heilen ſoll, noch die Körper womit er heilen will, kennen lernt.

§. 28.

Sie macht den Weltweiſen, ſo oft ſeine Fragen, von Beſtimmung der Größe abhangen, behutſam, und giebt ihm entweder überzeugende Antworten, oder ſetzt wenigſtens die Schranken ſeiner Einſichten feſt. Wolf, Ploucquet, Lambert ſind redende Beiſpiele.

§. 29.

Und haben nicht ihr, die Oekonomie, die wichtigſten Künſte und Handwerker, die vortheilhafteſten Werkzeuge und ihre Anwendungen zu danken?

§. 30.

Eingeführte Gewohnheit und Kürze machen die Kenntnüß folgender Zeichen nothwendig. Ich gebe

hier ein kurzes Verzeichnus von denen in der Arith- methick üblichen. Von den übrigen, an ſeinem Ort. Ihre ausführliche Erklärungen und Gebrauch findt man in den beygeſetzten §. §.

Zeichen der Gleichheit = oder ∝ wird ausge- druckt äqual oder gleich. §. 40.

Zeichen der Ungleichheit < oder > gröſser oder kleiner. Wo die Oefnung hinſiehet iſt die gröſsere Gröſse. §. 40.

Zeichen der Aehnlichkeit ∽ §. 40.

Zeichen der Congruenz oder Gleichheit und Aehn- lichkeit ≅ §. 40.

Zeichen der Addition + ausgedruckt: Plus. §. 49.

Zeichen der Subtracktion — Minus oder über- haupt das Gegentheil von Plus. §. 53.

Zeichen der Multiplication × oder, oder (.) mul- tiplicirt durch. §. 51.

Zeichen der Diviſion (:) dividirt durch. Noch ein andres §. 55.

Zeichen des unendlich Groſsen ∞.

Zeichen des unendlich kleinen $\frac{1}{\infty}$

Arithmetick.

I. Abſchnitt.

Begriffe, von den Zahlen überhaupt, Leſen, Schreiben und Veränderung derſelbigen, nebſt den allgemeinen Grundſätzen.

§. 31.

Eine Zahl iſt eine Menge von einerley Einheiten (§. 9.) und Rechnen heißt aus bekannten Zahlen unbekannte erfinden, von welchen eine ſich auf die bekannte beziehende Eigenſchafft feſtgeſetzt wird. (§. 10. Nro. 5. und §. 11.) Die Wiſſenſchafft zu rechnen nennt man Rechenkunſt oder Arithmetick.

Zuſatz 1.

Nicht ein jeder der rechnen kann, verſteht deßwegen Arithmetick. §. 12.

Zuſatz 2.

Wo keine unbekannte Zahlen erfunden werden wird nicht gerechnet.

Zuſatz 3.

Eine jede Zahl muß aus einerley Einheiten beſtehen.

Zuſatz 4.

Einheit iſt in verſchiedenem Betracht bald eine Zahl, bald keine, (§. 10. Nro. 2. und 3. u. §. 31.)

Anmerkung.

Bekannte Größen oder Zahlen nennt man auch Gegebene. Urſprung des Namens Arithmetick, Calcul und Calculiren.

§. 32.

Willkührlich angenommener Satz.

Man gehe im Zählen nicht weiter als bis auf Zehen. Hat man biß dahin gezählt, ſo fange man wieder von vornen an, nur bemerke man immer, wie vielmal ſchon Zehen gezählt worden.

Anmerkung.

Von den Ausnahmen dieſes faſt allgemeinen Geſetzes und anderen Arten zu zählen wird im VII. Abſchnitt geſprochen.

§. 33.

Vor jede der zehen Zahlen iſt alſo ein beſonderer Name, ſo wie vor die Vielheit der Zehner nöthig. Dieſe ſowohl, als die Ausdrücke: Hunderter, tauſender ꝛc. ſind bekannt. Tauſendmal tauſend Einheiten machen eine Million, tauſendmal tauſend Millionen eine Billion, tauſendmal tauſend Billionen eine Trillion, aber nicht dreyfache Million ꝛc. ꝛc. Man bemerke dieſe leztere Benennungen genau, um ſich in großen Zahlen nicht zu verwirren.

§. 34.

Einzelne Einheiten biß auf zehen nenne man Einfache, alle übrige zuſammengeſetzte Zahlen. Die-

ſe laſſen ſich vortheilhafft in Ordnungen eintheilen. Die Zehner machen die erſte, die Hunderter die zweite rc. rc. Ordnung aus. Es begreift daher jede Einheit von einer höhern Ordnung, zehen Einheiten der unmittelbar auf ſie folgenden niedrigern in ſich.

§. 35.

Allein man muß dieſe Zahlen auch ſchreiben können und Worte würden nicht nur zu weitläufftig, ſondern auch im Rechnen höchſt beſchwerlich ſeyn. Wir bedienen uns hiezu der Indianiſchen Zahlzeichen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. Von ihrem Urſprung, Geſchichte und andern Zahlzeichen, ſiehe den X. Abſchnitt.

§. 36.

Dieſe Zeichen ſollen in der erſten Stelle zur Rechten, oder wenn ſie allein ſtehen, Einheiten, in der 2ten, gegen die Linke Zehner, in der dritten Hunderter rc. rc. bedeuten. Fehlt eine Stelle, ſo fülle man ſie mit einer Nulle aus, um anzuzeigen, daß in dieſer Stelle gar kein bedeutendes Zahlzeichen vorhanden ſeye.

§. 37. Zuſatz.

Folglich ſind alle Zahlen in der erſten Stelle zur Rechten Einfache, in allen übrigen Stellen aber zuſammen geſetzte Zahlen, und die erſte Ordnung von den letztern, fängt in der uneins letzten Stelle zur Rechten an. §. 34.

§. 38.

Die gewönliche Zahlzeichen drücken immer eine beſtimmte Menge von Einheiten aus. Diß iſt ſehr oft nicht ſo vortheilhaft, als wenn man die Zahl der Einheiten unbeſtimmt, oder durch ein allgemeines Zeichen anzeigte, welches vor alle mögliche Zahlen könnte gebraucht werden. Man wähle zu dieſer Abſicht die kleinen Buchſtaben des lateiniſchen Alphabets. Dieſe ſollen in Zukunft vor alle Grözen (nicht nur Zahlen) gebraucht werden. Da aber der Rechner, die bekannte Größen, immer ſehr ſorgfältig von den unbekannten unterſcheiden muß, (§. 31.) ſo drücke man die bekannten mit den erſten Buchſtaben a, b, c, ꝛc. die Unbekannten, mit den letzten x, y, z aus.

§. 39.

Natürlicher Weiſe behält ein Buchſtabe, in der nemlichen Aufgabe, immer die ihm anfänglich gegebene Bedeutung. Käme aber in einer Aufgabe, worinnen eine Größe z. E. 4, mit a ausgedruckt wurde, eine andere Größe vor, welche 2, 3, 4mal ꝛc. ꝛc. ſo groß als 4 wäre, ſo nenne man dieſe nicht mit einem andern Buchſtaben, ſondern 2a, 3a, 4a ꝛc. ꝛc. Dergleichen kleine, linker Hand, neben einem Buchſtaben ſtehende Zahlen heiſſen: Coefficienten und wo keiner ſteht, wird immer 1 darunter verſtanden z. E. a iſt ſo viel als 1a ꝛc. ꝛc.

§. 40.

Zwo Größen ſind gleich, wenn man ſie als Größen betrachtet vor einander ſubſtituiren kann (§. 9.) Ungleich wenn diß nicht ſtatt findet. Das Zeichen der erſtern ſeye $=$ z. E. $4 = 4$. $a = x$. Bey ungleichen Größen iſt immer eine größer, die andere aber kleiner. Das Größer ſeyn drucke man durch $>$ das Kleiner ſeyn durch $<$ aus. Z. E. $4 > 3$ und $2 < 5$. Aehnliche Größen nennt man diejenige, welche ſich bloß in Rückſicht auf andere Eigenſchafften, die Größe ausgenommen, ſubſtituiren laſſen, Unähnlich ſind ſie, wenn diß unmöglich iſt. Das Zeichen der erſtern ſeye $\backsim$ Z. E. 3 Gulden $\backsim$ 5 Gulden. Hingegen 3 Pfunde und 5 Gulden wären unähnlich. Folglich ſind Größen ähnlich und gleich, ſo bald das Subſtituiren in allem Betracht ſtatt findet. Ihr Zeichen ſeye $\backsimeq$ Z. E. 6 Gulden $\backsimeq$ 6 Gulden.

§. 41.

Numeriren heißt eine gegebene Zahl richtig leſen oder ausſprechen und ſchreiben, das iſt, einem jeden einzelnen Zahlzeichen ſeinen wahren Werth zueignen.

Zuſatz.

Es iſt alſo eine bloße Vorbereitung zum Rechnen, ſo wie Leſen und Schreiben zu andern Kenntnüſſen, folglich nichts weniger als wirkliches Rechnen. (§. 31. Zuſatz 2.)

§. 42.

Man ſoll eine jede gegebene Zahl richtig leſen oder ausſprechen. Z. E.

4 8 2 3 5 9 6 0 7 8 4 3 2 1 2 0 3

Aufloͤſung.

1) Man theile die gegebene Zahl in Claſſen, von der Rechten gegen die Linke, durch Commata und gebe jeder Claſſe 3 einfache Zahlzeichen, nur die letzte gegen die linke kann auch nur zwey oder eines haben.

2) Ueber die letzte gegen die Rechte ſtehende Zahl der dritten Claſſe ſetze man ein m, uͤber die letzte der 5ten Claſſe ein b, uͤber die letzte der 7ten Claſſe ein t, uͤber die letzte der 9ten Claſſe ein q, ꝛc. ꝛc. um die Millionen, Billionen ꝛc. ꝛc. dadurch anzuzeigen.

3) Man ſpreche in jeder Claſſe die letzte Zahl zur Linken durch Hunderter, die mittlere durch Zehner, die erſte durch Einſer aus.

4) Bemerke aber auch, ob es gewoͤhnliche Hunderter, Zehner und Einheiten, oder aus der Ordnung der Tauſender, Zehentauſender ꝛc. ſind.

5) Wo ein m ſtehet, ſetze man Millionen, bey dem b Billionen ꝛc. hinzu, ſo iſt die Zahl richtig ausgeſprochen. Folglich waͤr

$$\overset{}{48},\ 23\overset{b}{5},\ 960,\ 78\overset{m}{4},\ 321,\ 203$$

Acht und vierzig tauſend zwey hundert fünf und dreyßig Billionen, Neunmal hundert und ſechzig tauſend, ſieben hundert und vier und achtzig Millionen, Drey mal hundert und ein und zwanzig tauſend zwey hundert und drey.

Beweiß.

Dieſer fließt unmittelbar aus §. 32 biß §. 38.

§. 43.

Eine vorgeſprochene oder durch Worte ausgedruckte Zahl richtig zu ſchreiben.

Auflöſung.

1) Beobachtet ob Millionen, Billionen, Trillionen ꝛc. angegeben werden.

2) Da nun zur Million 3, zur Billion 5, zur Trillion 7, zur Quatrillion 9, ꝛc. Claſſen erfordert werden, ſo mache man in gehöriger Entfernung, für die erſten 3 für die andere 7 ꝛc. Commata, und ſetze über die gehörige Stellen vorläufig m, b, t, q ꝛc. §. 42.

3) In jede Claſſe ſetze man 3 und zwar immer die beym Vorſprechen angegebene einfache Zahlzeichen.

4) Die gar nicht vorkommende Stellen, welche alſo leer blieben, fülle man mit Nullen aus. So iſt die verlangte Zahl richtig geſchrieben.

Z. E. man ſchreibe: Hundert und acht Billionen, Sieben und vierzig tauſend und zwey Millionen, Hundert tauſend drey hundert und eilf.

V.	IV.	III.	II.	I.
b		m		
108,	047,	002,	100,	311.

Beweiß.

Er erhellet aus §. 32. biß 38. verbunden mit §. 42.

Anmerkung.

Erläuternde Beyſpiele zur Uebung giebt M. A. 1tes Kap. Witzig ſeyn ſollende Spiel Aufgaben z. E. Eilf tauſend, Eilf hundert und Eilf zu ſchreiben ꝛc. Mündlich.

§. 44.

Wer rechnet (§. 31.) muß die bekannte Zahlen verändern, folglich entweder ähnliche hinzuſetzen, oder von ihnen hinwegnehmen, d. i. die gegebenen, vermehren oder vermindern.

Zuſatz.

Im Grund giebts demnach nur zwo Hauptrechnungsarten: Das Vermehren (Additio) und Vermindern (ſubtractio.)

§. 45.

Nun geſchieht das Vermehren bald durch eine einige Zahl, bald durch mehrere, und hier ſind entweder alle einzeln genommen, der welche vermehrt wird gleich oder nicht. Aus dem erſten entſpringt die Multiplication, aus dem letzten die Addition im ſtrengſten Verſtand.

Zuſatz.

Man hat folglich zwo Arten eine Zahl zu vermehren. Die Multiplication iſt im Grund eine Ad-

dition. Sie werden daher auch am ſchicklichſten unmittelbar nach einander erklärt und bewieſen.

§. 46.

Beym Vermindern wird eine Zahl entweder nur ein oder etlichemal von einer andern weggenommen, oder ſo oft als es nur möglich iſt. So erhalten wir die allgemeine Begriffe von der Multiplication und Diviſion.

Zuſatz.

Es giebt alſo auch nur zwo Arten die Zahlen zu vermindern. Die Diviſion iſt im Grund eine Subtracktion und beyde gehören in der Erklärung und Beweiß zuſammen.

§. 47.

Folglich ſind überhaupt nur 4. Rechnungsarten möglich und auf ihrer Anwendung beruhet die ganze Arithmetick. (§. 44. 45. 46.)

§. 48.

Addiren heißt eine Zahl finden, welche mehrern gegebenen, ungleichen, ähnlichen Zahlen zuſammen genommen gleich iſt. Die gegebenen nennt man die Summirenden oder Poſten. Die Summe oder Aggregat iſt die gefundene Zahl welche den Poſten gleich iſt, oder der ganze Werth vieler vereinigter Größen.

Zuſatz.

Eine jede Zahl beſteht aus Einheiten. §. 31. Beym Addiren müſſen demnach alle Einheiten der gegebenen Zahlen, nach und nach zuſammen gezählt werden.

§. 49.

Das Zeichen der Addition ſeye + Z. E. 3 + 4 = 7 hieße: 3 plus 4 iſt gleich 7. (§. 40.).

§. 50.

Multipliciren heißt eine von 2 gegebenen Gröſſen ſo oft zu ſich ſelbſt addiren, als die andere von den gegebenen Einheiten enthält. Die beyden gegebenen nenne man Factoren, die gefundene Größe, Factum oder Produckt, den multiplicirten Factor, Multiplicand, den welcher multipliciret, Multiplicator.

Zuſatz 1.

Folglich iſt immer der eine Factor ſo oft im Multiplicand enthalten, als im anderu die Einheit.

Zuſatz. 2.

Einerley Factoren geben einerley Produckt, man mag zum Multiplicator nehmen welchen man will.

§. 51.

Das Zeichen der Multiplication ſey ein ſogenanntes Andreas Creutz × oder ein (,) oder ein Punkt zwi-

ſchen beyden Factoren, z. E. 4 × 2 = 4, 2 = 4. 2 = 8. Der öftern Zweydeutigkeit der beyden letztern auszuweichen, werd ich vorzüglich das erſte gebrauchen.

§. 52.

Subtrahiren oder Abziehen heißt eine Größe von einer andern ihr ähnlichen wegnehmen. Die nach der Subtracktion übrig gebliebene Größe nennt man: Differenz, Reſt, Unterſchied. Minuend heißt die Größe welche verringert wird, Subtrahend diejenige welche man wegnimmt.

Zuſatz 1.

In Zahlen werden demnach alle Einheiten der Subtrahende, nach und nach, von allen Einheiten der Minuende weggenommen. (§. 31. und 48. Zuſatz.)

Zuſatz 2.

Die Summe der Differenz und der Subtrahende, muß alſo der Minuende gleich ſeyn.

§. 53.

Das Zeichen der Subtracktion ſeye — Man ſpricht es aus: Minus oder weniger. Z. E. 3 — 2 = 1, 3 Minus 2 iſt gleich 1.

§. 54.

Dividiren heißt eine gegebene Größe ſo oft als möglich iſt, von einer andern gegebenen abziehen.

So kann man z. E. 2 von 8, 4mal abziehen, und 3 von 10, 3mal. Hier heißt die Minuende, die Dividende, die Subtrahende aber, Diviſor und die Größe, welche uns ſagt, wie oft die erſte von der letztern abgezogen worden, Quotient. Bleibt nach verrichteter Diviſion nichts übrig, ſo ſagt man daß der Diviſor in der Dividende Aufgehe und umgekehrt. Im 2ten Beyſpiel läßt ſich 3 dreymal von 10 wegnehmen, es bleibt aber 1 übrig. Folglich fällt der Quotient zwiſchen 3 und 4. Was das übrigbleibende ſey, kommt beſſer unten vor.

Zuſatz 1.

Die Diviſion zeigt uns alſo, wie oft eine Größe in der andern enthalten iſt, daher der Name Quotient.

Zuſatz 2.

So oft der Diviſor in der Dividende enthalten iſt, eben ſo oft muß die Einheit im Quotienten ſtecken.

Zuſatz 3.

Eine jede Dividende iſt ein Produckt aus dem Diviſor in den Quotienten. (§. 50. Zuſatz 1.)

Zuſatz. 4.

Und ein jeder Factor iſt ein Quotient aus dem andern Factor in das Produckt (§. 50. Zuſatz 1 u. 2.)

Zuſatz 5.

Daher iſt die Diviſion eine gänzlich entgegen geſetzte Multiplication und umgekehrt.

§. 55.

Das Zeichen der Diviſion ſeye (:) oder auch ein Queerſtrich zwiſchen der Dividend und Diviſor, ſo daß die erſtere oben, der letztere unten ſtehet. Z. E. $2 : 6 = 3$ oder $\frac{6}{2} = 3$ heißt beydes: 2 dividirt in 6 iſt gleich 3.

Zuſatz 1.

Folglich iſt der Ausdruck $\frac{6}{2}$ mit dem wirklichen Quotienten 3 einerley, und kann einer vor den andern gebraucht werden. Ja es iſt $\frac{6}{2}$ in Zeichen der wahre Quotient aus 2 in 6, welches vorzüglich zu merken.

Zuſatz 2.

Da $\frac{6}{2} = 3$ aber auch $2:6 = 3$ ferner $3 \times 2 = 6$ (§. 54. Zuſatz 3.) ſo iſt auch $\frac{6}{2} \times 2 = 6$ (Zuſatz 1.) Auch diß iſt von großer Wichtigkeit.

Zuſatz 3.

Da $2 : 2 = 1$ aber auch $\frac{2}{2} = 2 : 2$, ſo iſt auch $\frac{2}{2} = 1$ das iſt: Wenn der Diviſor der Dividende gleichet, ſo iſt der Quotient 1. (§. 54.)

Zuſatz 4.

Weil $\frac{4}{1} = 4$ ſo folgt: Daß 1 nicht dividire, und wenn es in Zeichen Diviſionen als Diviſor

angenommen wird, ſo bleibt die dadurch dividirte Größe unverändert.

§. 56.

Ganze Zahlen entſtehen immer, wenn die Einheit ein oder etliche mal genommen wird, ohne einige Theile derſelben hinzuzuſetzen oder wegzulaſſen. Gebrochene Zahlen hingegen, wenn man von der Einheit oder dem Ganzen nur einen oder etliche ſeiner gleichen Theile nimmt. Vermiſchte Zahlen nennt man die aus ganzen und gebrochenen zuſammengeſetzte. Z. E. Es ſeye

C D E
A.—.—.—.—.B

G.——————.——————.——————.F

die Linie AB die Einheit und ihre gleichen Theile AC, CD, DE, EB, ſo iſt AB = 1, ein Ganzes, und wenn ich die Linie GF dreymal ſo groß als AB mache, ſo iſt GF = 3 AB = 3 Ganzen. Nimmt man aber von AB das Stück AE, oder 3 ſolcher Theile, dergleichen AB 4 hat, ſo hat man, weil AC, oder 1 Theil, ein Viertel von AB iſt, 3 ſolcher Viertheile. Um eine gebrochene Zahl auszudrücken, hat man alſo 2 Zahlen nöthig. Eine welche beſtimmt, in wie viel Theile das Ganze getheilt wurde, aber auch eine, die uns ſagt, wie viel ſolcher Theile in dem Bruch enthalten ſind. Die erſtere nennt die Theile des Ganzen und heißt auch Nenner, die andere zählt wie viel davon zum Bruch gehören, daher ihr Name Zähler.

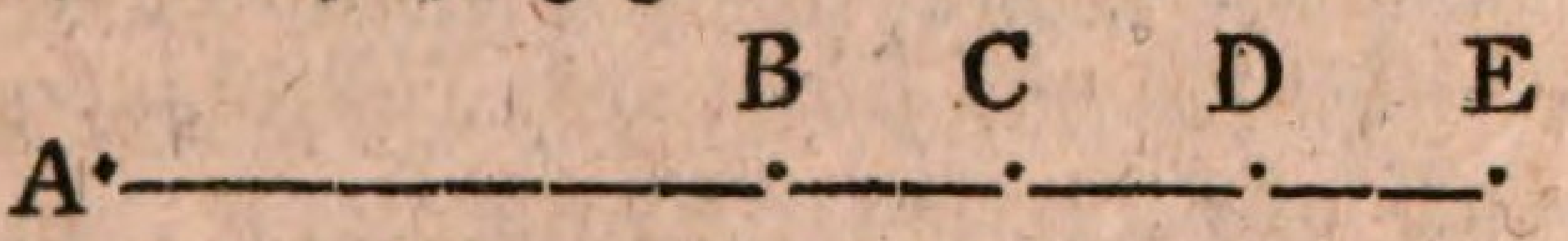
Willkührlicher Satz.

§. 57.

Nenner und Zähler müſſen folglich ſorgfältig von einander unterſchieden werden. Man bediene ſich deßwegen, einen Bruch auszudrücken, des 2ten Diviſionszeichen aus §. 55. und ſetze den Nenner in die Stelle des Diviſors oder unten, den Zähler aber in die Stelle der Dividende oder oben. Nach dieſem iſt Dreyviertel von AB = AE = $\frac{3}{4}$ und wenn man das Stück AE von AB, allgemein mit a, das Ganze AB aber b nennte, ſo wär AE = $\frac{a}{b}$

§. 58.

Nähm' ich hingegen



die ganze Linie AB und noch $\frac{3}{4}$ von ihr, oder AB+BE, ſo wär AE ein Ganzes und noch $\frac{3}{4}$ vom Ganzen, d. i. eine vermiſchte Zahl, man drücke ſie alſo aus $1\frac{3}{4}$.

§. 59.

Unbenannte Zahlen beſtimmen bloß die Menge der Einheiten überhaupt, Benannte hingegen ſagen zugleich, durch einen beygeſetzten Namen, unter was für eine Claſſe von Dingen ihre Einheiten gehören. Z. E. 3 und 3 Gulden oder 3 Centner. Benannte Zahlen die ſich auf einerley Einheiten be-

ziehen, heiſſen Homogene oder Gleichartige, im Gegentheil Heterogene oder Ungleichartige Zahlen. 3 Ducaten und 5 Ducaten ſind Homogen, 4 Stunden und 4 Menſchen Heterogen.

Zuſatz.

Daher ſind alle unbenannte, ganze, und alle gebrochene Zahlen, welche gleiche Nenner haben, Homogen.

§. 60.

Um Gleichheit und Ungleichheit, Aehnlichkeit und Unähnlichkeit auch dann ſchnell und richtig zu beurtheilen, wenn ſie auch an ſich nicht in die Augen fielen, muß man folgende Grundſätze wohl faſſen, ſie zwar dem Gedächtnus unauslöſchlich einprägen, aber noch weit mehr durch häufige Beyſpiele anwenden. Ihre Verachtung und flüchtiges Durchlaufen würde ſich, durch alle Theile der Mathematick, in unſerm ganzen Leben rächen und uns das folgende ſehr erſchweren.

§. 61.

Ein jedes Ganze iſt allen ſeinen wirklichen (nicht möglichen) Theilen zuſammen genommen gleich, und folglich größer als jeder dieſer Theile. Ein erläuterndes Beyſpiel ſehe man an den §. 56. und 58. verzeichneten Linien.

Zuſatz.

Daher iſt jede Größe und Zahl ſich ſelbſten gleich. Z. E. $3+4=7$ oder $5-2=\frac{6}{2}$.

Anmerkung.

Hieraus läßt ſich der, §. 20. überhaupt gegebene Begriff, einer Gleichung, erläutern.

§. 62.

Zwo Größen welche einer dritten gleich ſind, ſind ſich ſelbſten gleich. Z. E.

$$\begin{array}{l} a = b \\ \qquad \| \\ c = = \\ \hline a = c \end{array}$$

folglich iſt auch

§. 63.

1) Gleiches zu gleichem Addirt, 2) Gleiches von Gleichem ſubtrahirt 3) Gleiches mit Gleichem multiplicirt, 4) Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt gleiche Summen, Reſte, Produckte und Quotienten. Z. E.

$$\begin{array}{cc} a = b & a = b \\ c = d & c = d \\ \hline a + c = b + d & a - c = b - d \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} a = b & a = b \\ c = d & c = d \\ \hline a \times c = b \times d & \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{array}$$

§. 64.

1) Gleiches zum Größern und kleinern addirt, 2) Gleiches vom Größern und kleinern ſubtrahirt

3) Gleiches mit Größerm und kleinerem multiplicirt,
4) Gleiches durch kleineres und Größeres dividirt, giebt im erſten Fall größere Summen, Reſte, Producкte und Quotienten als im andern. Z. E.

$$\begin{array}{cccc} a > b & a > b & a = a & a = a \\ c = d & c = d & b > c & b < c \\ \hline a+c > b+d & a-c > b-d & a \times b > a \times c & \frac{a}{b} > \frac{a}{c} \end{array}$$

§. 65.

Wenn demnach verſchiedene Perſonen, einerley Aufgabe richtig rechnen, ſo muß einerley heraus kommen. Bringen ſie verſchiedenes heraus, ſo hat gewiß eine, oft beyde, geirret. Das nemliche gilt, wenn einerley Perſon, die nemliche Aufgabe mehrmalen rechnet.

§. 66.

Was größer iſt als eine von 2 gleichen Größen, iſt auch größer als die andere von dieſen Größen. Z. E.

$$\begin{array}{c} a = b \\ c > b \\ \hline c > a. \end{array}$$

§. 67.

Eine jede als Zahl ausgedruckte Größe iſt ſich ſelbſt ähnlich. §. 40. Und Größen die einer 3ten ähnlich ſind, ſind ſich ſelbſt ähnlich. Z. E.

$$\begin{array}{c} a \backsim b \\ c \backsim b \\ \hline a \backsim c \end{array}$$

§. 68.

Man ſetze §. 63. und §. 64. aller Orten, ſowohl in Worten als Zeichen, vor gleich, ähnlich, vor ungleich, unähnlich, ſo werden die Sätze und ihre Beyſpiele auch auf ähnliche Größen paſſen.

II. Abſchnitt.

Von den vier Rechnungsarten in unbenannten Zahlen, in allgemeinen Zeichen, in benannten Zahlen, ihren Proben, und überhaupt dabey anzuwendenden Vortheilen.

§. 69.

Mehrere unbenannte Zahlen zuſammen addiren:

28648	=	a
5425	=	b
899	=	c
22	=	d
15 ⸗	=	e
18 ⸗ ⸗	=	f
13 ⸗ ⸗ ⸗	=	g
2 ⸗ ⸗ ⸗ ⸗	=	h
34972	=	i

Auflöſung.

1) Schreibt die gegebene Zahlen a, b und c ſo untereinander, daß ihre Ziffern von einerley Ordnung §. 34. unter die Ziffern der nemlichen Ordnung zu ſtehen kommen.

2) Zählt die in einer Reihe ſtehende Ziffern zuſammen, und ſetzt die Ziffer der niedrigſten Ordnung von jeder Summe, unter die Reihe, von welcher die Summe herrühret. Z. E. d, e, f, g, h.

3) Dieſe einzelne Summen addire man aufs neue, ſo giebt ſich die ganze Summe i.

Beweiß.

Da d die Summe von allen Einheiten, e von allen Zehnern, f von allen Hundertern, g von allen Tauſendern, h von allen Zehentauſendern der gegebenen Zahlen iſt, ſo iſt auch

$d + e + f + g + h = a + b + c$ (§. 61.)

Aber auch $\qquad \| = i$ (§. cit.)

Folglich iſt $i = \underbrace{a + b + c}$ (§. 62.) weil aber

$\qquad \| \qquad\qquad \|$

Summe Den gegebenen Zahlen

So iſt auch i die Summe aller gegebenen Zahlen gefunden, folglich addirt worden. (§. 48.)

Anmerkung.

Dieſe ſehr weitläuftige nur wegen der größten Deutlichkeit und Schärfe im Beweiß gewählte Methode, kürzt man

man in der Ausübung ab, wenn die Ziffern der nächſt höhern Ordnung, z. E. bey d die 2, als Zehner, im Summiren, gleich zur Summe der Zehner gezählt werden, und ſo bey allen übrigen Ordnungen. Dann findt ſich die Summe i auf einmal. Nur iſts ſehr vortheilhafft, wenn wir immer, die aus der niedern Ordnung, in die höhere überzutragende Einheiten, der höhern Ordnung, unter derſelben mit Punkten, oder einer kleinen römiſchen Zahl bemerken, z. E. die vorige Aufgabe

28648	28648
5425	5425
899	899
. . . :	I I I II
34972	34972

Diß verſchaft, bey weitläuftigen ſehr ermüdenden Aufgaben, dem practiſchen Rechner, Ruheplätze.

§. 70. Zuſatz.

So viel Zehner, von jeder Reihe in der Summe ſtecken, ſo viel Einheiten ſetzt man zur folgenden Reihe der nächſten höhern Ordnung.

§. 71.

Wenn 2 Größen mit einander verbunden werden, und in dieſer Verbindung eine die andere verringert oder gar zerſtöhrt, ſo heiſſen ſie Entgegengeſetzte Größen. z. E. 6 fl. Vermögen, und 4 fl. Schulden, laſſen nur 2 fl. Gulden Vermögen. 8. Stuffen hinauf und 3. Stuffen hinunter, ſind nur 5. Stuffen hinauf. Eine von dieſen beyden entge-

geugeſetzten Grôßen, welche man will, ſoll poſitiv oder bejahende, die andere aber negativ oder verneinende Grôße genenut werden.

Anmerkung.

Schulden ſind für den Glaubiger ſo gewiß poſitiv, als das Vermôgen für den Schuldner negativ iſt. Folglich iſts gleichviel, welche von beyden man poſitiv nennt.

§. 72.

Jede negative Grôße, kann man, als etwas, welches von der poſitiven weggenommen werden ſoll, anſehen. Daher ſchickt ſich für dieſe das Zeichen + für jene — Z. E. + 6 fl. — 2 fl. = + 4 fl.

§. 73.

Wenn die negative Grôße > iſt als die poſitive, ſo bleibt nach ihrer wirklichen Verbindung, eine negative Grôße übrig (§. 71.) Z. E. — 12 fl. + 8 fl. = — 4 fl.

§. 74.

Negative Grôßen ſind alſo wirkliche Grôßen, z. E. die §. 73. gefundene — 4 fl. Für den Glaubiger als ſein Capital, für den Schuldner, da ſie von ſeinem poſitiven Vermôgen einen ihnen gleichen Theil zerſtôhren.

§. 75.

Gleiche poſitive und negative Grӧßen zerſtӧhren ſich oder werden o. Z. E. + 4 fl. — 4 fl. = o. Wer gar nichts und oben drein 4 fl. Schulden hat, hat in ſofern weniger als Nichts, weil er ſeine Schuld von 4 fl. erſt tilgen muß, um nichts zu haben. Eine negative Grӧße iſt alſo, nur, in Rückſicht auf die ihr entgegen geſetzte poſitive, weniger als nichts (§. 74.) Und nur in dieſer Bedeutung iſt der Ausdruck — 4 iſt $<$ o wahr.

Anmerkung.

Aus dem bißher geſagten ſieht man: Daß ſich der erſte Anfänger am leichteſten hilft, wenn er ſich die poſitiven Grӧßen als Kapital, die negative, als Schulden vorſtellet.

§. 76.

Zuſammengeſetzte Grӧßen (Quantitates complexæ) heiſſen diejenige, deren Theile durch + und — Zeichen verbunden ſind, Einfache (incomplexæ) wo diß nicht geſchiehet. Z. E. 3 + 4, a — b + c ſind zuſammengeſetzte; a, a $\times$ b, $\frac{c}{b}$ ſind einfache Grӧßen.

§. 77.

Wenn durch Buchſtaben ausgedruckte Grӧßen ähnlich ſeyn ſollen, ſo müſſen ſie aus einerley und gleich viel Buchſtaben beſtehen, und wenn ſie Pro-

ducte oder Quotienten ſind, von der Multiplication und Diviſion auf einerley Art behandelt werden. (§. 40.) fehlt aber eins von dieſen Merkmalen, ſo ſind ſie unähnlich §. 40. daher iſt $3a \backsim a$, $5a \times b \backsim 2a \times 3b$ und $+4c \backsim -7c$, $\frac{a}{b} \backsim \frac{2a}{b}$, $\frac{a+c}{b} \backsim \frac{a+2c}{b}$. Hingegen a und $a \times a$ iſt unähnlich, deßgleichen ſind $\frac{a+c}{b}$ und $\frac{a+b}{c}$ wie auch $\frac{a+c}{b}$ und $a \times b \times c$ unähnliche Größen.

§. 78. Zuſatz.

Die Coefficienten tragen nichts zur Aehnlichkeit oder Unähnlichkeit bey. (§. 59. Zuſ. und §. 40.)

Willkührliche Sätze.

§. 79.

1) Um die Aehnlichkeit allgemeiner Größen leicht zu bemerken, ſchreibe man die Buchſtaben nach der Ordnung des Alphabets. Z. E. $a+b-c$ nicht $b-c+a$.

2) Einfache Größen ohne Zeichen ſind poſitiv z. E. $a = +a$; ſollen ſie negativ ſeyn, ſo muß das $-$ davor ſtehen.

3) Auch der erſte Theil einer zuſammengeſetzten Größe, iſt, ohne Zeichen, poſitiv. Z. E. in $a+b-c$ iſt $a = +a$.

§. 80.

Da $+6-2=4$ und $-9+2=-7$ (§. 75.) auch ferner $+2+3=5$ und $-4-2=-6$, ſo erhellt die Möglichkeit, eine zuſammengeſetzte Gröſſe durch weniger Zeichen auszudrücken, ohne ihren Werth zu ändern. Diß heißt man Reduciren oder auf den kleinſten Ausdruck bringen. Die Regeln deſſelben gründen ſich auf folgende Betrachtung. Eine jede zuſammengeſetzte Größe beſteht

1. Entweder aus ähnl. einfachen Größen. 2. Oder nicht.
   Und dieſe ſind
   3. Entweder bloß ähnlich. Hier haben ſie
      5. Entweder einerley Zeichen. 6. Oder nicht.
   4. Oder ähnl. u. Gleich. Hier haben ſie
      7. Entweder einerley Zeichen. 8. Oder nicht.

Im 2ten Fall iſt keine Reducktion möglich. Z. E. $a+b-c$

Im 5ten Fall addire man die Coefficienten der ähnlichen.

Z. E. $2a+4b+a+2b-c-3c$

Iſt $=3a+6b-4c$.

Im 6ten Fall ſubtrahirt man die kleinern Coefficienten, von den größern der ähnlichen Größen, und giebt dem Reſt das Zeichen der Größern. Z. E.

$7a-a-4b+2b$

Iſt $=6a-2b$

Der 7te Fall iſt mit dem 5ten einerley.

Im 8ten Fall zerſtöhren ſich die ähnlichen Gröſſen oder heben ſich auf.

Z. E. $5a - 5a + 3b + 3b$

Iſt $= 6b$

Beweiß.

Dieſer flieſet aus §. 71. 73. 75. ſo leicht, daß ihn jeder vor ſich geben kann.

§. 81.

Addition allgemeiner zuſammengeſetzter Größen.

Auflöſung.

1) Man ſchreibe die Theile derſelbigen wie (§. 69.) doch ſo untereinander, daß (§. 79.) genau beobachtet wird.

2) Reducire die ähnliche Theile (§. 80.) und ſchreibe die unähnlichen mit ihren unveränderten Zeichen in die Summe.

Z. E.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
	$4a$	$+5b$	$-c$	$+3d$	$-6x$	$+y$	
	$2a$	$-b$	$+8c$	$-9d$	$-2x$	$-y$	$+z$
	$6a$	$+4b$	$+7c$	$-6d$	$-8x$		$+z$

Beweiß.

Es ſeyen a, b, c, d, x, y, lauter Gulden, z Kreutzer, ſo iſt + 4fl. + 2fl. = + 6 fl. (§. 80.

Nr. 5) + 5 fl. — 1 fl. = + 4 fl. (§. 80. Nr. 6) — 1 fl. + 8 fl. = + 7 fl. + 3 fl. — 9 fl. = — 6 fl. (§. 80. Nr. 6.) — 6 fl. — 2 fl. = — 8 fl. (§. 80. Nr. 5.) + 1 fl. — 1 fl. = 0 (§. 80. Nr. 8.) + 1 Kreuzer aber läßt ſich mit der übrigen Summe als Heterogen (§. 59. nicht anderſt als durch das + Zeichen verbinden.

Anmerkung.

Ohngeachtet die Buchſtaben keinen Werth von ihrer Stelle erhalten, wie die Zahlen, ſo lehrt doch das bloſe Anſchauen, daß die (§. 79. No. 1.) vorgeſchlagene Ordnung, zur Bequemlichkeit, Leichte und Schnelligkeit faſt alles beytragen.

§. 82.

Die Multiplication, iſt eine Addition von lauter gleichen Zahlen. (§. 48. und 50.) Man darf alſo den Multiplicand, wie die Poſten (§. 69.) nur ſo oft unter einander ſchreiben, als der Multiplicator Einheiten hat und dieſe addiren, ſo giebt ſich das Produckt: z. E. 8 × 3.

8 Hier hat der Multiplicator 3 Einheiten,
8 und die 3 untereinander geſchriebene 8 ſind
8 = 24 als dem Produckt.
24

Allein dieſe, ſchon bey einfachen Zahlen ſehr weitläuftige Methode, wird bey großen, zuſammengeſetzten, unerträglich. Bey 2324 × 38 müßte im leichteſten Fall 2324 ſchon 38mal hingeſchrieben und

addirt werden. Nun erfand zwar Herr Ludolph Prof. der Mathem. in Erfurth, eine ungleich kürzere Art, auch zuſammengeſetzte Zahlen, durch bloße Addition zu multipliciren. M. A. §. 23. 24. 25. Ich werde ſie mündlich erklären und beweiſen, aber auch zeigen, daß auch dieſe Methode noch immer ſehr weitſchweiſig, nur in ganz beſondern Fällen, bey ſehr großen Zahlen, vortheilhaft iſt.

§. 83.

Allen dieſen Beſchwerlichkeiten hilft das Einmal Eins ab. Man verſteht darunter eine Tabelle, welche die Produckte aller Einheiten in alle Einheiten enthält.

§. 84.

Verfertigung des Einmal Eins durch bloßes Addiren.

Auflöſung.

1) Man mache ein gleichſeitiges Viereck, theile jede Seite in 9 gleiche Theile und ziehe die Querlinien ſo giebts 81 Fache.

2) In die erſte obere Querreihe ſowohl, als in die erſte linkerhand herabwärts laufende Reihe, ſchreibe man die einfache Zahlen von 1 biß 9 in ihrer natürlichen Ordnung.

3) Man addire 2 zu ſich ſelbſt, und ſetze die Summe 4 unter dieſe 2; zu dieſer Summe die erſten 2 noch einmal und die neue Summe 6 unter

die 4. Zur Summe 6 wiederum 2 und die neue Summe 8 unter die Vorige 6 ꝛc. ꝛc. ſo hat man die Produckte von 2 in alle einfache Zahlen.

4) Eben ſo finde man die übrige Produckte aller übrigen Zahlen 3. 4. 5. ꝛc. ꝛc. und trage ſie in die gehörige Fache, ſo iſt das Einmal Eins verfertigt. (§. 83.)

Anmerkung.

Dieſe Tabelle muß man mit größter Fertigkeit im Gedächtnüs haben, wenn ſie wahren Vortheil ſchaffen ſoll. Man findet ſie, wie in allen Rechenbüchern in M. A. §. 21. p. 32.

§. 85. Zuſatz 1.

Kein Produckt aus zwey einfachen Zahlen überſteigt die erſte Ordnung.

Zuſatz. 2.

Zahlen von einer höhern Ordnung, mit einfachen Zahlen multiplicirt, geben ein Produckt von der nemlichen höhern Ordnung. §. 82. Z. E. 200 $\times$ 2 = 200 + 200 = 400.

Zuſatz 3.

Wenn beyde Factoren zuſammengeſetzte Zahlen, folglich von höhern Ordnungen ſind, ſo iſt die Ordnung des Producks gleich der Summe der Ordnun-

gen beyder Factoren. Denn jede Zahl wird um ſo viel Ordnungen erhöhet, als Nullen zu ihrer Rechten ſtehen (§. 36.) Wenn ich nun 234 mit 20 multipliciren ſoll, ſo wäre 234 × 2 = 468 (Zuſatz 2.) Es ſoll aber nicht bloß mit 2 ſondern mit 20 = 10 × 2 multiplicirt werden. Folglich muß man die 468 noch mit 10 multipliciren, das iſt um eine ganze Ordnung erhöhen. Diß geſchieht aber durch Anhängen der 0, und nun hat man 4680. Es war aber auch die Ordnung von 234 die 2te und die von 20 die 1te. Da nun 2 + 1 = 3 und das Produckt 4680 wirklich von der 3ten Ordnung iſt, ſo erhellt die Warheit des behaupteten.

Zuſatz 4.

Wenn alſo hinten an einem Factor Nullen befindlich ſind, ſo darf man ſie nur hinten an das Produckt der wirklichen Ziffern anhängen.

Zuſatz 5.

Eins multiplicirt nicht. Folglich iſt 2306 × 1 = 2306 (§. 50.) Doch kann man oft, mit Vortheil, eine jede Größe als ein Produckt von ihr ſelbſt in 1 anſehen.

§. 86.

Zwo Zahlen mit einander zu multipliciren, wenn der eine Factor eine einfache Zahl iſt.

Auflöſung.

1) Man ſchreibe die Factoren ſo unter einander, wie (§. 69.) die Poſten beym addiren.

2) Multiplicire jede Ziffer des Multiplicands mit dem Multiplicator, durch Hülfe des Einmal Eins (§. 84.) und ſchreibe die Produckte nach (§. 69. Nr. 2.)

3) Addire die einzelne Produckte, ſo hat man das verlangte ganze Produckt. Z. E.

$$\begin{array}{r} 3254 = a \\ 6 = b \\ \hline 24 = c \\ 30 = d \\ 12 = e \\ 18 = f \\ \hline 19524 = g \end{array}$$

Beweiß.

Da c = dem Produckt aus 6 in 4; d = 6 × 5, e = 6 × 2, f = 6 × 3. So iſt c + d + e + f = der Summe aller Produckte aus 3254 in 6 das iſt:

c + d + e + f = a × b (§. 61.) Aber auch
‖ = g

Daher g = a × b Nun iſt
‖ ‖
Dem ganzen Produckt Dem Produckt aus 3254 in 6
19524

Folglich iſt 19524. das wirkliche Produckt aus 3254 in 6 d. i. man hat multiplicirt.

Anmerkung.

Dieſe zum Vortheil des Beweiſes gewählte weitläuftige Art, läßt ſich wie (§. 69. Anmerk.) die Addition, abkürzen. Es ſeyen z. E. die obigen Zahlen.

3 2 5 4	Doch laſſen ſich die Punkte oder römiſche Zahlen nur bey einfachen Multiplicatoren bequem anbringen.
6	
. ... ..	
1 9 5 2 4	

§. 87.

Zween zuſammengeſetzte Factoren mit einander zu multipliciren.

Auflöſung.

1) In den meiſten Fällen iſts am bequemſten den kleinſten Factor zum Multiplicator zu wählen.

2) Hat keiner von beyden Nullen am Ende, ſo ſchreibe man beyde wie (§. 69.) Hat einer von beyden am Ende Nullen, ſo ſetzt man die wirklichen Ziffern deſſelben nach (§. cit.) und die Nullen zur Rechten hinten an. (§. 85 Zuſatz 4.)

3) Man multiplicire mit jeder Ziffer des Factors nach (§. 86. Anmerk.)

4) Setze jedes Produckt ſo, daß ſeine Anfangsziffer zur Rechten, unter die Zahl des Multiplicators kommt, von der das Produckt entſtunde. (§. 85. Zuſatz 2.)

5) Hat der Multiplicator in der Mitten eine oder mehrere Nullen, ſo werden dieſe nach Nr. 4. bloß hingeſchrieben, und neben ihnen, in der nemlichen Zeile, ſogleich das Produckt, von der unmittelbar im Multiplicator folgenden Ziffer, der nächſt höhern Ordnung, angefangen. (§. 85. Zuſatz 4.)

6) Alle dieſe einzelne Produckte werden wie (§. 86.) addirt, ſo hat man das ganze Produckt. Z. E.

6842	6842
2034	2300
27368	2052600
20526	13684
136840	
13916628	15736600

Beweiß.

Liegt voll in denen in der Aufflöſung angeführten §. §.

Anmerkung.

Von Neppers Rhabdologie mündlich. Mancherley Aufgaben M. A. p. 33. und folgende.

§. 88.

Auſſer denen (§. 51.) angeführten Multiplicationszeichen, wird in der Buchſtabenrechnung noch folgendes willkührliches Geſetz beobachtet, Zween oder

mehr Buchſtaben, welche mit einander multiplicirt werden ſollen, ſetze man unmittelbar neben einander. Hätten die einfachen Größen Coefficienten, ſo werden dieſe wie gewöhnliche Zahlen multiplicirt. Z. E. $a \times b = ab$. Und $ab \times cd = abcd$ und $3a \times 4b = 12ab$. Sinds zuſammengeſetzte Größen, ſo ſchlieſſe man die Factoren in Klammern ein und ſetze zwiſchen ſie das bequemſte Multiplicationszeichen. Z. E. $a + b - c$ ſoll durch $x + y - z$ bloß durch Zeichen multiplicirt werden. So iſt das Produckt

$$(a + b - c) \times (x + y - z).$$

§. 89.

Die vor den Größen befindliche + und — Zeichen, werden nach folgenden Regeln und Gründen behandelt.

1) Wenn beyde Factoren das Zeichen + haben, ſo hat auch das Produckt das nemliche + Zeichen. Dann man ſoll ja den poſitiven Multiplicand ſo oft poſitiv zu ſich ſelbſt addiren, als der poſitive Multiplicator Einheiten hat.

(§. 50.) Z. E. $+a$ denn wann $+a = +4$
$+b$ $\quad$ $+b = +3$ ſo iſt
$+ab$

$+4$ eben ſo viel als wenn man ſchriebe $+4$
$+3$ (§. 50.) welches $+4$
$+4$
$+12$ nach §. 81 gewiß $= +12$

2) Oder es iſt der Multiplicand poſitiv, der Multiplicator negativ, alsdenn wird das Produckt Negativ. Z. E.

+ a	+ 4
— b	— 3
— a b	— 12

denn auch hier ſoll man ja die Gröſze 4 dreymal zu ſich ſelbſt addiren, aber nicht poſitiv, ſondern negativ,

folglich wäre $+4 \times -3 = -4$ welches wie- -4 derum §. 81. -4

Zum Produckt giebt — 12.

3) Oder es iſt der Multiplicand negativ und der Multiplicator poſitiv. Auch hier erhält man ein negatives Produckt. Dann dieſer Fall kommt mit dem 2ten überein. Dort war $+a \times -b = -ab$ folglich iſt auch $+b \times -a = -ab$ (§. 50. Zuſatz 2.) Und da $+4 \times -3 = -12$ ſo iſt auch $-3 \times +4 = -12$.

4) Oder es ſind endlich beyde Factoren, negativ, alsdenn wird das Produckt poſitiv. Z. E. $-a \times -b = +ab$ und $-4 \times -3 = +12$. Dann wer 12 fl. Vermögen hätte, aber auch 3 Perſonen, jeder 4 fl. ſchuldig wäre, deſſen Vermögen wär + 12 fl. — 12 fl. = 0. Nähme nun ein Freund die erſte Schuld von 4 fl. über ſich, ſo hat er + 12 fl. — 8 fl. = + 4 fl. Nimmt der Freund auch die 2te über ſich, ſo

hat er + 12 fl. — 4 fl. = + 8 fl. Ueber⸗nimmt endlich der Freund auch die 3te Schuld, ſo hat er + 12 fl. — 0 = + 12 fl. Eine ne⸗gative Größe 1. 2. 3 ꝛc. mal wegnehmen, heißt alſo ſie 1. 2. 3 ꝛc. mal in eine poſitive verwand⸗len. In dieſem 4ten Fall aber, ſollte ja der negative Multiplicand ſo oft weggenommen werden, als der Multiplicator Einheiten hat. Folglich iſt

$-4 \times -3 = +4+4+4 = +12$ daher auch

$-4 \times -3 = +12.$

§. 90. Zuſatz.

Hieraus entſpringt die kurze Regel: Einerley Zei⸗chen geben + (§. 89. Nr. 1. und 4.) verſchiedene aber geben — (§. cit. Nr. 2. und 3.) wie aus fol⸗gender allgemeinen Vorſtellung zu ſehen.

I.	II.	III.	IV.
+ a	+ a	— a	— a
+ b	— b	+ b	— b
I. + ab	II. — ab	III. — ab	IV. + ab

§. 91.

Weil $a \times a = aa$ und $aa \times a = aaa$ deßgleichen $aaa \times a = aaaa$ ꝛc. diß aber be⸗ſchwerlich im Schreiben und noch eckelhafter im Le⸗ſen iſt, ſo ſchreibe man ſtatt aa, a^2; für aaa aber a^3 für aaaa alſo a^4 ꝛc. Dieſe, Rechter Hand, oben

an der Gröſse ſtehende kleine Zahlen, welche anzeigen, wie oft die Gröſse mit ſich ſelbſt multiplicirt worden, heiſen Exponenten. Will man ſie allgemein ausdrücken, ſo bedient man ſich gemeiniglich der Buchſtaben m, n, r, s, z. E. a^m oder b^r.

Zuſatz 1.

Da $a = a \times 1$ (§. 85. Zuſatz 5.) und $a \times 1 = a^1$ ſo iſt immer wo kein Exponent ſtehet, derſelbige 1.

Zuſatz 2.

Exponenten und Coefficienten ſind alſo gewaltig verſchieden. (§. 39.) Wenn $a = 4$ ſo iſt $3a = 12$ aber $a^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$. Schon ihr Platz unterſcheidet ſie.

Zuſatz 3.

Weil $a^3 = aaa$ und $a^4 = aaaa$ ſo iſt auch $a^3 \times a^4 = aaa \times aaaa = aaaaaaa = a^7$. Aehnliche Gröſsen mit Exponenten werden alſo multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt. z. E. $a^5 \times a^3 = a^8$ und $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Unähnliche Gröſsen mit Exponenten hingegen, behandelt man im multipliciren nach (§. 88.) z. E. $a^2 \times b^3 = a^2 b^3$ dann

$$a^2 = aa$$
$$b^3 = bbb \text{ daher}$$

$$a^2 \times b^3 = aa\,bbb = a^2 b^3$$

Eben ſo wär $a^m \times x^n = a^m x^n$.

Zuſatz. 4.

Sollten aber Größen mit Exponenten addirt werden, ſo erhellt aus dem bißher erklärten, daß die Exponenten nicht verändert, vielweniger ſelbſt addirt werden dörfen (Zuſatz 3.) man behandelt ſie nach (§. 81.) Z. E.

$$\begin{array}{l} a^3 + 4\,b^2 - 3\,c^4 \\ 2\,a^2 - 3\,b^2 - 2\,c^3 \\ \hline a^3 + 2\,a^2 + b^2 - 3\,c^4 - 2\,c^3 \end{array}$$

Indem ja a^3 und a^2 ſo wie c^4 und c^3 unähnliche, b^2 und b^2 aber ähnliche Größen ſind. (§. 77.)

Anmerkung.

Die Lehre von den Exponenten, wird im IV. und V. Abſchnitt weitläuftiger ausgeführt. Sie wurde hier nur berühret, um manche Abkürzungen beym Multipliciren anbringen zu können.

§. 92.

Zuſammengeſetzte allgemeine Größen zu multipliciren.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man ſchreibe die Factoren nach (§. 87.) beobachte ihre Zeichen und gebe den Producten das nach (§. 89.) erforderliche Zeichen.

2) Multiplicire alle einzelne Theile des Multiplicators durch alle einzelne Theile des Multiplican-

den (§. 88.) und ſchreibe ſie wie die gewöhnliche Zahlenproduckte (§. 86.)

3) Addire die ſamtliche Produckte (§. 81.)

Anmerkung.

Da die Buchſtaben keinen Werth von ihrer Stelle haben, ſo iſts gleichviel, ob man zur rechten oder linken anfängt.

Z. E.

I. $$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

II. $$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \qquad \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

III. $$\begin{array}{l} 3a - 4b + 2c \\ 2a + 3b - c \\ \hline 6a^2 - 8ab + 4ac \\ \qquad + 9ab - 12b^2 + 6bc \\ \qquad\qquad - 3ac + 4bc - 2c^2 \\ \hline 6a^2 + ab + ac - 12b^2 + 10bc - 2c^2 \end{array}$$

IV. $$\begin{array}{l} a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \\ \hline a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ \quad - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$ (§. 91. Zuſatz 3.)

V. $$\begin{array}{l} 2a^m + 3b^n \\ 3a^r - 2b^s \\ \hline \end{array}$$ (§. 91. Zuſatz 3. und 4.)

$$6a^{m+r} + 9a^r b^n$$
$$- 4a^m b^s - 6b^{n+s}$$
$$6a^{m+r} + 9a^r b^n - 4a^m b^s - 6b^{n+s}$$

§. 93.

Oft läßt ſich ein Produckt reduciren oder kürzer ausdrucken, wenn man den, oder die Factoren, welche einer Größe gemeinſchaftlich zugehören, zum allgemeinen Factor annimmt, die übrige Größen in eine Klammer einſchließt, und mit dem erſtern nach (§. 88.) bloß durch Zeichen multiplicirt. Z. E. $a^3 - 2ab$ iſt $= (a^2 - 2b)\,a$

Dann $a^2 - 2b$
a giebt

$$a^3 - 2ab$$

Zur Uebung mögen folgende Aufgaben dienen:

I. $3a^2bd - 4a^3d^2 + 6a^4cd$
II. $2ab^3c^2 + 5ab^3c - 1$
III. $a^m + 3a^m b^2 - 5a^m cd^n$

Anmerkung.

Sich zu üben und durch eine angenehme Erfahrung von der Richtigkeit der Multiplication allgemeiner Größen zu überzeugen, dient vorzüglich, wenn man, die allgemein aufgelößte Aufgaben, auch in Zahlen auflöſet,

welches ſich eben ſo nützlich beym (§. 81.) anbringen läßt. Es ſeye

Z. E. im §. 92. Nr. II. $a = 8$ u. $b = 2$ ſo iſt

$$\begin{array}{lll} a - b & = 8 - 2 & = 6 \\ a - b & = 8 - 2 & = 6 \\ \hline a^2 - ab & = 64 - 16 & \\ \quad - ab + b^2 = & \quad - 16 + 4 & \\ \hline \end{array}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 64 - 32 + 4 = 36$$

Man verſuche diß bey allen übrigen Aufgaben.

§. 94.

Gewöhnliche Zahlen von gewöhnlichen Zahlen abzuziehen.

Auflöſung.

Man ſchreibe unter die Minuende die Subtrahende wie (§. 69.) die Poſten. Nun iſt

1) Entweder die Minuende im Ganzen und allen ihren einzelnen Theilen gröſſer als die Subtrahende, ſo flieſet die Auflöſung aus (§. 52. Z. 1.) Z. E.

8 5 7 9	Minuende
6 3 6 8	Subtrahende
2 2 1 1	Differenz oder Reſt.

2) Oder es iſt die Minuende zwar im Ganzen, aber nicht in allen ihren einzelnen Theilen, gröſſer als die Subtrahende. Z. E. 38579 — 16760.

a. Hier verfährt man im Anfang wie bey Nr. 1.

	7	10		
3	8	5	7	9
1	6	7	6	0
2	1	8	1	9

b. Da aber 7 von 5, nicht, wie gewöhnlich, weggenommen werden kann, ſo nimmt man, von der nächſten Ziffer der höhern Ordnung in der Minuende, hier von 8, eine Einheit. Dieſe beträgt in der nächſt niedrigen Ordnung 10 Einheiten (§. 34) welche alſo mit den ſchon vorhandenen 5, 15 ausmachen, und nun können die 7 von 15 abgezogen werden, die folgende 8 der Minuende aber ſind nun nur 7.

3) Oder es finden ſich in der Minuende einzelne Nullen mit wirklichen Zahlen vermengt. Z. E.

			9	10	9	
7	10	1	10	4	10	10
8	0	2	0	5	0	8
4	2	0	3	6	0	9
3	8	1	6	8	9	9

Da ich in der erſten Ordnung der Minuende nichts finde, ſo hohl' ich eine Einheit aus der 2ten Ordnung, folglich wird die 5 zu 4, die 0 zu 10, von dieſen 1, in der Stelle der Einheiten auch zu 10, alſo die 8 Einheiten der Minuende zu 18. (§. 34.) die über die Minuende geſetzte kleine Zahlen erläutern das übrige der ganzen Operation.

4) Oder es folgen in der Minuende mehrere Nullen, auf einander, die Subtrahende mag beſchaffen ſeyn wie ſie will. Z. E.

	9	9	9	9	
	10	10	10	10	10
8	0	0	0	0	4
3	4	0	1	2	5
4	5	9	8	7	9

5) Oder es iſt die Minuende im Ganzen kleiner als die Subtrahende. Z. E. von 5 ſoll man abziehen +9. Da hier 5 poſitiv iſt, 9 aber negativ wird, ſo wird 9 die 5 ganz zerſtöhren, folglich gar nichts poſitives, wohl aber 4 negative Einheiten, oder — 4 übrig bleiben (§. 71.) Eben ſo iſt 223 weniger 816 = — 593.

Beweiß.

Da in allen dieſen möglichen Fällen, immer die Summe der Differenz und der Subtrahende = der Minuende, ſo wurde wirklich ſubtrahirt. (§. 52. Zuſatz 2.)

§. 95. Zuſatz 1.

So oft von einer Nulle der Minuende, eine Einheit weggenommen wird, wird ſie in eine 9 verwandelt.

Zuſatz 2.

Complexe Größen in Zahlen, werden, ehe man ſie abzieht, reducirt, und denn erſt abgezogen. Z. E.

$$9 - 2 + 4 = 11$$
$$8 - 7 + 2 = 3$$ daher nun

$$(9 - 2 + 4) - (8 - 7 + 2) = 8$$

§. 96.

Beym ſubtrahiren allgemeiner ähnlicher Größen hat die Minuende und Subtrahende

1) Einerley Zeichen, und alsdenn iſt

a. Die Subtrahende kleiner als die Minuende. Man ſubtrahire wie (§. 94) und gebe dem Reſt das gemeinſchaftliche Zeichen. Z. E.

$$\begin{array}{rcr} 6a & - & 12b \\ 4a & - & 3b \\ \hline 2a & - & 9b \end{array}$$

Dann von 6 fl. Einnahme, bleiben, nach einer Ausgab von 4 fl., nur 2 fl. und wenn von 12 fl. Schulden 3 fl. Schulden weggenommen werden, ſo bleiben nur 9 fl. Schulden. Die nemliche Differenz erſchiene, wenn man die Zeichen der Minuende in die entgegengeſetzte verwandelte nnd addirte. Z. E.

$$\begin{array}{rcr} 6a & - & 12b \\ 4a & - & 3b \\ - & + & \\ \hline 2a & - & 9b \end{array}$$

b. Oder es ſind die Subtrahende und Minnende gleich. Dieſe werden ſich zerſtöhren oder aufheben. Z. E.

$$\begin{array}{rr} 6a & -3b \\ 6a & -3b \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

Welches auf die nemliche Art wie bey Nr. a. erhellet.

c. Oder es iſt die Subtrahende > die Minuende. Man ziehe die Minuende von der Subtrahende ab, und gebe dem Reſt das entgegengeſetzte Zeichen.

$$\begin{array}{rr} 5a & -6b \\ 8a & -9b \\ \hline -3a & +3b \end{array}$$

Dann wer nur 5 fl. hat und 8 fl. bezahlen ſoll, bleibt 3 fl. ſchuldig. Wer aber 6 fl. bezahlen ſoll und 9 fl. bezahlen wollte, behielte 3 fl. übrig. Auch hier giebt ſich die nemliche Differenz, wenn man die Zeichen der Subtrahende verkehrt und addirt.

$$\begin{array}{rr} 5a & -6b \\ 8a & -9b \\ - & + \\ \hline -3a & +3b \end{array}$$

2) Haben Minuende und Subtrahende verſchiedene Zeichen, ſo iſt auch hier entweder

a. Die Subtrahende < die Minuende. Man addire und gebe dem Reſt das Zeichen der Minuende.

$$\begin{array}{rr} 8a & -\ 7b \\ -4a & +\ 3b \\ \hline +12a & -\ 10b \end{array}$$

Dann 4 fl. bezahlte Schulden, vermehren ein Kapital von 8 fl. biß auf 12 fl. Und wer zu einer Schuld von 7 fl. noch 3 fl. bezahlen muß, wird 10 fl. ſchuldig. Das nemliche kommt heraus, wenn man die Zeichen der Subtrahende verkehrt und addirt.

$$\begin{array}{rr} 8a & -\ 7b \\ -4a & +\ 3b \\ + & - \\ \hline +12a & -\ 10b \end{array}$$

b. Oder es iſt die Subtrahende = der Minuende. Hier bleiben die Regeln von Nr. a. ſo wie Erläuterung und Beweiß, die nemliche.

$$\begin{array}{rr} +3a & -\ 6b \\ -3a & +\ 6b \\ + & - \\ \hline +6a & -\ 12b \end{array}$$

c. Oder es iſt die Subtrahende > die Minuende. Auch hier bleibt alles wie bey Nr. a.

$$\begin{array}{rr} +3a & -\ 4b \\ -7a & +\ 6b \\ + & - \\ \hline +10a & -\ 10b \end{array}$$

Sind aber die Subtrahende und Minuende unähnlich, ſo verwandelt man bloß das Zeichen der Subtrahende in das entgegen geſetzte und addirt, wie ſich aus den vorgetragenen Fällen beweiſen läßt. Z. E.

$$\begin{array}{llll} 3a - 6c & & a - c & \\ -b + d & & 2b + 3x & \\ + \quad - & & - \quad - & \\ \hline 3a + b - 6c - d & & a - 2b - c - 3x & \end{array}$$

Kommen in der Subtrahende Größen vor, welche in der Minuende gar nicht vorhanden ſind, ſo werden dieſe, bloß mit verkehrten Zeichen, an den Reſt gehänget.

$$\begin{array}{l} 4a \\ \quad b - c + 3x \\ \hline 4a - b + c - 3x \end{array}$$

Kämen aber in der Minuende Größen vor, welche in der Subtrahende fehlen, ſo hängt man dieſe ohne Veränderung der Zeichen an den Reſt.

$$\begin{array}{l} 3a + 4b - c + 6x \\ -a + 2b \\ \hline 4a - 2b - c + 6x \end{array}$$

§. 97.

Da nun auſſer dieſen Fällen kein andrer möglich iſt, und bey allen, die Verkehrung der Zeichen der Subtrahende, die Subtracktion in eine Addition ver-

wandelt. (§. præc.) So laſſen ſich alle Regeln in eine znſammen ziehen: Man gebe allen Theilen der Subtrahende entgegengeſetzte Zeichen und addire nach (§ 81.) Ein Beyſpiel worinn alle Fälle vorkommen, ſoll diß erläutern:

$$\begin{array}{l} 6a-12b+3c-4d+2m-3n+10p-6q+3r-5t+u-3v-w+y \\ -4a-3b+3c-4d+8m-9n-4p+4q-3r+5t-3u+8v+x-3z \\ +\quad +\quad -\quad +\quad -\quad +\quad +\quad -\quad +\quad -\quad +\quad -\quad -\quad + \\ \hline 10a-9b\quad 0\quad 0\quad -6m+6n+14p-10q+6r-10t+4u-11v-w \\ \qquad -x+y+3z \end{array}$$

Anmerkung.

Auch hier findet eine ähnliche Erläuterung in Zahlen, wie (§. 93.) ſtatt.

§. 98.

Im Dividiren kommen folgende Hauptfälle in Zahlen vor: Es wird

1) Eine einfache Zahl in eine einfache, oder die doch die erſte Ordnung nicht überſteigt,

2) Eine einfache Zahl in jede zuſammengeſetzte, oder

3) Jede zuſammengeſetzte in jede zuſammengeſetzte dividirt.

§. 99.

Mit jeder einfachen Zahl in eine jede Zahl, welche die erſte Ordnung nicht überſteigt, zu dividiren.

Auflöſung.

Jede Dividende iſt ein Produckt aus dem Diviſor in den Quotienten (§. 54. Z. 3.) und kein Produckt aus 2 einfachen Zahlen überſteigt die erſte Ordnung (§. 85. Zuſ. 1) Man findet daher alle in der Aufgabe angenommene Dividenden, entweder genau, oder doch beynahe, im Einmal Eins. (§. 83.) Daher ſuche man ſie in demſelbigen, so findt ſich in der erſten Anfangsreihe der Diviſor, in der andern der Quotient. Z. E. 7 : 56 = 8. So bald ich 56 unter den Producten habe, ſteht in der 1ten Reihe zur Linken

7 als Diviſor, und oben in der erſten Reihe, über der Dividende, 8 als Quotient.

§. 100.

Jede zuſammengeſetzte Dividende mit einem einfachen Diviſor zu dividiren. Z. E.

Auflöſung.

d	D	Q
6 :	79470	10000 = A
	60000	3000 = B
	19470	200 = C
	18000	40 = D
	1470	5 = E
	1200	
	270	
	240	
	30	
	30	
	0	

1) Man dividire den Diviſor in die höchſte Ordnung der Dividende (§. 99.)

2) Setze den Quotienten in ſeine Stelle und nach ihm ſo viel Nullen, als Ziffern in der Dividende, nach der höchſten, in welche man dividirte, folgen, wie hier in A.

3) Dieſer gefundene erſte Theil des Quotienten zeigt, wie oft der Diviſor in der höchſten Ordnung der

Dividend enthalten iſt, und zwar in Einheiten von der nemlichen Ordnung. Z. E. hier 10000 mal. Da aber der Diviſor in der höchſten Ordnung der Dividende noch öfter ſtecken kann, wenn er ſich ſchon nicht durch ſo groſʒe Einheiten ausdrücken läßt,

4) So ziehe man das Produckt, des gefundenen Quotienten A, in den Diviſor 6, von der Dividende ab, bleibt 19470.

5) Bey dieſem wende man die 1te Regel an, ſo iſt 3 der Quotient aus 6 in 19, der 2te Theil des ganzen Quotienten, welcher nach Nr. 2. in B geſchrieben wird.

6) Diß B wird wie A nach Nr. 4. behandelt und der Reſt nach Nr. 5. ſo giebt ſich C, bey welchem und allen folgenden Z. E. D die 4te und 5te Regel ſo lange wiederholt wird, als Ziffern in der Dividende vorhanden ſind. Jeder neue Reſt der Dividende, giebt, beym Fortſetzen der Diviſion, im Quotienten, eine Ziffer oder neuen Theil, mit ſo viel Nullen als Nr. 2. bemerkt wurde.

7) Da aber die Produckte und Reſte ſchon durch ihre Stelle, ſo wie die ſamtliche Ziffern des Quotienten, nach und nach ihren Werth, auch ohne Beyſetzen der Nullen, erhalten, ſo kann man ſie in der Ausübung weglaſſen. Z. E. der ſamtliche Quotient wär hier A + B + C + D + E = 13245.

8) Sollte der Diviſor in der höchſten Ordnung der Dividende gar nicht ſtecken, ſo verbindt man mit ihr die unmittelbar auf ſie folgende niedrigere Ordnung. Steckt er im Reſt und der damit verbundenen folgenden Ziffer (Nr. 5.) nicht, ſo ſetzt man dafür eine Nulle in den Quotienten und nimmt aufs neue die folgende nächſte Zahl der Dividende dazu. Z. E.

```
8 : 6424 | 803
    64   |
    --   |
      24 |
      24 |
      -- |
       0
```

Beweiß.

A vom Quotienten beſtimmt, wie oft der Diviſor in der höchſten, B wie oft er in der nächſtfolgenden, C wie oft in der hierauf folgenden, D wie oft in der niedrigſten, E wie oft er in den Einheiten der Dividende enthalten ſeye. Nun iſt A + B + C + D + E = Q (§. 61.) = 13245 und zeigt daher wirklich, wie oft 6 in 79470 enthalten ſeye, d. i. man hat dividirt. (§. 54. Zuſ. 1.)

§. 101.

Mit jedem zuſammengeſetzten Diviſor in jede zuſammengeſetzte Dividende zu dividiren.

Auf-

Auflöſung.

$$\begin{array}{r r|l}
d & D & Q \\
27: & 81243 & 3009 \\
 & 81 & \\
\hline
 & 243 & \\
 & 243 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

1) Man vergleiche den Diviſor immer mit eben ſo viel Ziffern der Dividende, als der Diviſor hat, und beobachte, wo es nöthig, inſonderheit (§. 100. Nr. 8.)

2) Suche, wie oft die 1te Ziffer des Diviſors, in der oder den 1ten Ziffern der Dividende, enthalten ſey (§. cit.) und nehme an, daß der ganze Diviſor, eben ſo oft, in denen mit ihm Nr. 1. verglichenen Ziffern der Dividende ſtecke. Diß kann trügen, allein (§. 100. Nr. 4.) entdeckt den Irrthum auf der Stelle, wenn das Produckt, oder der Reſt, größer wird, als die Zahl von der man es abziehen ſoll, oder als der Diviſor. Folglich muß man, im 1ten Fall, den Quotienten ſo lang vermindern, biß er ſich abziehen läßt, im 2ten aber, ſo lang vermehren, biß der Reſt $<$ wird als d.

3) So fährt man nach (§. 100.) fort, biß alle Theile des Quotienten gefunden ſind.

Beweiß.

Kommt mit dem §. 100. gegebenen überein.

Anmerkung 1.

Man nehme den Quotienten lieber zu groß, als zu klein an, denn der etwa begangene Fehler fällt leichter ins Geſicht.

Anmerkung 2.

Auch hier hat Ludolph eine Methode vorgeſchlagen, ohne Anwendung des Einmal Eins zu dividiren, wie (§. 82.) beym Multipliciren, die bey großen Zahlen oft ſehr vortheilhaft iſt. M. A. p. 43.

§. 102. Zuſatz 1.

Sollte der Diviſor nicht aufgehen (§. 54.) Z. E.

$$\begin{array}{r|l} 3 : 17 & 5 \\ \underline{15} & \\ 2 & \end{array}$$

ſo ſollten die übrigbleibende 2 noch durch 3 dividirt werden. Allein diß kann nicht wirklich geſchehen, daher verrichtet man es durch Zeichen $\frac{2}{3}$ (§. 55. Z. 1.) ſo erhält man einen Bruch (§. 56.) zu den Ganzen des Quotienten. Folglich iſt alsdann der wahre Quotient $5 + \frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}$ oder eine vermiſchte Zahl (§. 58.)

Zuſatz. 2.

Diß unter ſich, oder ſogenannte portugieſiſche Dividiren, hat, da alle Producte ausführlich niedergeſchrieben werden, folgende Vortheile:

a. Man vermeidet viele Fehler im multiplieiren und ſubtrahiren.

b. Kann die etwa begangene Irrthümer leicht entdecken und verbeſſern

c. So oft einerley Ziffer mehrmalen im Quotienten vorkommt, iſt ihr Productt in d, ſchon vorhanden.

d. Man braucht wirklich nicht viel mehr Zahlzeichen, als in dem ſogenannten über ſich dividiren, wo der Diviſor immer aufs neue hingeſetzt, und die Productte im Kopf gemacht und abgezogen werden, zugleich aber auch das garſtige ausſtreichen der Zahlen, das Aufſuchen eines begangenen Fehlers faſt unmöglich macht.

Anmerkung.

Mancherley Fälle, Aufgaben und Arten zu dividiren M. A. p. 43. u. f. Alle zu beweiſen, ſind hier die Gründe gelegt. Anwendung der Nepperiſchen Rhabdologie.

§. 103.

Bey der Diviſion mit Buchſtaben kommts: Auf die Veränderung der + und — Zeichen und die Diviſion ſowohl einfacher, als zuſammengeſetzter Größen, ſowohl in Zeichen, als wenn ſie wirklich verrichtet wird, an.

§. 104.

Weil $+a$ $+a$ $-a$ $-a$ multiplicirt
$+b$ $-b$ $+b$ $-b$ geben.

$+ab$ $-ab$ $-ab$ $+ab$ (§. 90.) ſo muß auch $\frac{+ab}{+a}=+b$ $\frac{-ab}{+a}=-b$ $\frac{-ab}{-a}=+b$ und $\frac{+ab}{-a}=-b$ geben. (§. 54. Z. 3. 4. 5.) Folglich gilt auch hier, die (§. 90.) beym Multipliciren erwieſene Regel: Einerley Zeichen geben im Quotienten + verſchiedene aber —.

§. 105.

Einfache Grössen durch bloße Zeichen zu dividiren lehrt (§. 55.) ſo wär b dividirt in $a=\frac{a}{b}=b:a$. Und weil $a \times abcd = a^2bcd$, ſo iſt auch $\frac{a^2bcd}{a}=abcd$ (§. 54.) Zuſ. 3. 4. 5.) und (§. 91.) Daher die Regel: Wenn die Dividende Grösſen enthält, die dem Diviſor ähnlich ſind, ſo ſtreiche man dieſen in jener aus, was übrig bleibt iſt Quotient. Z. E. $\frac{a^2bcd}{a}=\frac{aabcd}{a}=abcd$ und $a^2b^3m:a^4b^5m^2=a^2b^2m$; $ab:6abm=6m$. Deßgleichen $abc:abc=1$ (§. 39. und §. 55. Zuſ. 3.) $\frac{+a}{-a}=-1$ und $\frac{abm}{1}=abm$ hingegen $\frac{abm}{-1}=-abm$ ſo wie $\frac{-abm}{-1}=+abm$.

Sind Coefficienten vorhanden, ſo werden ſie nach (§. 99. 100. 101 und 102.) behandelt z. E. 3 a b: 18 abc = 6 c; 2a : 5 ab = $\frac{5}{2}$b = $2\frac{1}{2}$ b.

Zuſatz 1.

Aehnliche Größen mit Exponenten werden alſo dividirt, wenn man ihre Exponenten ſubtrahirt. (§. 91. Zuſ. 3. und §. 54. Zuſ. 5.) Bey unähnlichen muß die Diviſion durch bloße Zeichen geſchehen. Z. E. $\frac{a^5}{a^2}$ $= \frac{aaaaa}{aa} = aaa = a^3$, folglich $b : b^4 = b^3$ und $a^2 : a^2 = a^0$ da aber auch $a^2 : a^2 = 1$ ſo iſt $a^0 = 1$; $a^n : a^m = a^{m-n}$. Hingegen wär a^m dividirt in b^n nicht b^{n-m} ſondern $\frac{b^n}{a^m} = a^m : b^n$.

Zuſatz 2.

Da ein doppelter Diviſor in einer doppelten Dividende nothwendig ſo oft ſteckt, als der einfache Diviſor in der einfachen Dividende, und eben ſo die Hälfte des Diviſors, eben ſo oft in der Hälfte der Dividende, ſo iſt auch $\frac{4}{2} \times 2 = \frac{8}{4} = \frac{4}{2}$ und $\frac{10}{4}$: $2 = \frac{5}{4} = \frac{10}{4}$ Oder allgemein: $\frac{a}{b} \times n = \frac{an}{bn}$ $= \frac{a}{b}$; $\frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b : m} = \frac{a}{b}$ das iſt: Wenn ſowohl der Diviſor als die Dividende mit

einerley Gröſſe multiplicirt oder dividirt werden, ſo bleibt der nemliche Quotient.

§. 106.

Allgemeine zuſammengeſetzte Gröſſen mit einfachen zu dividiren.

Auflöſung und Beweiß.

$$\begin{array}{l|l}
6ab + 4acd - 12abcx & 2a \\ \cline{2-2}
6ab & 3b + 2cd - 6bcx \\ \cline{1-1}
\quad + 4acd & \\
\quad + 4acd & \\ \cline{1-1}
\qquad - 12abcx & \\
\qquad - 12abcx & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

1) Man ziehe hinter die Dividende einen Strich und ſchreibe über denſelben den Diviſor hier 2a.

2) Dividire ins 1te Glied der Dividende (§. 105.) wobey in Rückſicht der Zeichen (§. 104.) wohl zu beobachten.

3) Man multiplicire wie gewöhnlich den Diviſor in den Quotienten (§. 100) und ſetze das Produckt unter den Theil der Dividende, aus welchem es entſtanden iſt.

4) Ziehe diß Produckt von dem darüber ſtehenden Theil ab (§. 97.)

5) Dieſe Regeln wiederhole man ſo lang, als der Diviſor in der Dividende ſteckt.

6) Sollten ſich in der Dividende ein oder mehr Theile finden, worinnen der Diviſor gar nicht enthalten wäre, ſo behilft man ſich mit der Zeichendiviſion (§. 55.) z. E.

$$
\begin{array}{l|l}
3a^2 - 6ab^3 + x - 2y & 3a \\
\underline{3a^2} & \overline{a - 2b^3 + \frac{x - 2y}{3a}} \\
\quad -6ab^3 & \\
\quad \underline{-6ab^3} & \\
\qquad\quad \frac{+x - 2y}{3a} &
\end{array}
$$

§. 107.

Wenn man allgemeine einfache Gröſſen durch zuſammengeſetzte dividiren ſoll, ſo iſt uns dermalen die Zeichendiviſion (§. 55.) hinreichend. Z. E. a b ſoll durch a — b dividirt werden. Es iſt $\frac{a\,b}{a-b} =$ (a—b) : ab. Nur muß man beym Gebrauch des letzten Ausdrucks, die zuſammengeſetzte Gröſſen, wie hier geſchah, in Klammern einſchlieſſen.

§. 108.

Allgemeine zuſammengeſetzte Gröſſen mit zuſammengeſetzten zu dividiren.

Aufløſung und Beweiß.

1) In jeder züſammengeſetzten, ſo viel möglich reducirten Gröſſe, kommt ein Buchſtabe, entweder häufiger vor, als ein anderer, oder nicht. Im 1ten Fall ordne man die Theile des Diviſors und der Dividende, nach dem am häufigſten vorkommenden Buchſtaben, und zwar gemeiniglich ſo, daß die gröſſern Exponenten, wenn welche da ſind, vorangehen. Im 2ten Fall ordne man nach (§. 79. Nr. 1.)

2) Man betrachte den 1ten Theil des Diviſors als eine einfache Gröſſe, und verfahre nach (§. 106.) Nur muß immer der ganze Diviſor, mit dem 1ten 2ten 3ten ꝛc. Theil des Quotienten, multiplicirt, abgezogen, und die folgende Theile der Dividende herab gerückt werden, wie ſchon das ähnliche (§. 101.) vorgekommen. Z. E.

$$
\begin{array}{l|l}
a^4+4a^3c+6a^2c^2+4ac^3+c^4 & a^2+2ac+c^2 \\
\underline{a^4+2a^3c+a^2c^2} & \overline{a^2+2ac+c^2} \\
\quad +2a^3c+5a^2c^2+4ac^3 & \\
\quad \underline{+2a^3c+4a^2c^2+2ac^3} & \\
\qquad\quad +a^2c^2+2ac^3+c^4 & \\
\qquad\quad \underline{+a^2c^2+2ac^3+c^4} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

deßgleichen

$$
\begin{array}{l|l}
a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 & a^2 - 2ab + b^2 \\
a^4 - 2a^3b + a^2b^2 & \overline{a^2 - 2ab + b^2} \\
\hline
\quad - 2a^3b + 5a^2b^2 - 4ab^3 & \\
\quad - 2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 & \\
\hline
\qquad\qquad + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 & \\
\qquad\qquad + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Anmerkung.

Dergleichen Diviſionen ſind mühſam und bey ſehr zuſammengeſetzten Größen oft äuſſerſt beſchwerlich. Zum Glück kommen ſie nicht allzuhäufig vor und gemeiniglich iſt die leichte Zeichendiviſion hinreichend. Noch eine einige wirklich berechnete Aufgabe und einige andere, zur Uebung bloß angegebene, ſollen dieſe Materie ſchlieſſen. Man wird aber in der erſten bemerken, daß die Gröſſen ſo geordnet werden, daß die kleinern Exponenten vorangehen. Thäte man nach Nro. 1. das Gegentheil, ſo würden Dividende und Quotient mit einer negativen Gröſſe anfangen, welches man, wo es die Umſtände erlauben, gern vermeidet.

$$
\begin{array}{l|l}
1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5 & 1 - 2x + x^2 \\
1 - 2x + x^2 & \overline{1 - 3x + 3x^2 - x^3} \\
\hline
\quad - 3x + 9x^2 - 10x^3 & \\
\quad - 3x + 6x^2 - 3x^3 & \\
\hline
\qquad\quad + 3x^2 - 7x^3 + 5x^4 & \\
\qquad\quad + 3x^2 - 6x^3 + 3x^4 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l|} -x^3+2x^4-x^5 \\ -x^3+2x^4-x^5 \\ \hline 0 \end{array}$$

Aufgaben zur Uebung.

$x^2-2xy-z^2+y^2 : x-y-z$ Quotient $x-y+z$

$12a^2-6ay+8ax-4xy : 3a+2x$ Quot. $4a-2y$

$12b^2x^3-9bx^3-8b^2x^2+6bx^2 : 4bx-3x$

$9y^4+12cy^3-4c^3y-c^4 : 3y^2-c^2$

$x^4-y^4 : x-y$ und endlich

$2a^2-3ab-3a-2b^2+6b-n : 2a+b-3$

§. 109.

Wer mit benannten Zahlen (§. 59.) rechnen will, muß ſich vorläufig genau bekannt machen, wie viel kleinere Einheiten, bey jeglicher, auf die nächſtfolgende höhere Sorte gehen. Dann hier gehts nicht wie bey den unbenannten von 10 zu 10. Diß muß durch Uebung und richtige Verzeichnüſſe erlernt werden. Letztere liefern Maler und N. Schmid ziemlich vollſtändig. Wer beſtändig mit mancherley Geldſorten umgehet, den wird Wierzen Wechſel Arbitrage unterſtützen. Wenigſtens muß jeder, den folgende Sätze in der Ausübung verlaſſen, die beyden erſtern nachſchlagen.

§. 110.

Grössere Sorten in kleinere und kleinere in grössere zu verwandeln.

1) Man multiplicire die Gröſſere mit der Zahl ihrer Einheiten z. E. 2 fl. ſind = 120 kr. = 480 Pf. Dann 1 fl. = 60 kr. und 1 kr. = 4 Pfennige (§. 50. Zuſ. 1.)

2) Im umgekehrten Fall dividirt man die kleinere Sorte mit der Zahl, welche beſtimmt, wie viel von ihr als Einheiten betrachtet, eine Einheit der nächſt gröſſern Sorte ausmachen. (§. 54. Zuſ. 1. und 5.) Z. E.

2304000 Gran : 60 = 38400 Quintgen. Dieſe : 4 = 9600 Loth, welche : 32 = 300 Pfund und endlich dieſe : 100 = 3 Centner.

§. 111.

Addition der benannten Zahlen.

Auflöſung.

1) Man ſetze alle ähnliche Poſten unter einander.

2) Fange bey der niedrigſten Sorte an, und wenn ihre Summe ein oder mehrere Einheiten der nächſt höhern Sorte enthält, ſo finde man durch Dividiren, wie viel von der nächſthöhern darinnen ſtecken (§. 110. Nr. 2.)

3) Dieſe Quotienten zählt man, wie ſonſt die Zehner, zur nächſthöhern Sorte (§. 69. Anmerk.) und der Reſt, wird unter die niedrigere, von welcher die Summe entſprang, geſetzt.

4) Dieſe Regeln, durch alle Sorten, biß auf die höchſte, fortgeſetzt, geben die Summe. Z. E.

3	Fudr.	8	Ohm	11	Viertl.	2	Maas	1	Schoppen.
2	—	7	—	6	—	5	—	3	—
6	—	9	—	10	—	4	—	2	—
11		11		11		1			
13	Fud. —	6	Ohm —	5	Viert. —	0	Viert. —	2	Schop.

§. 112.

Benannte Zahlen von benannten zu ſubtrahiren.

Auflöſung.

1) Beobachtet §. 111. Nr. 1.

2) Subtrahirt nach (§. 94.) nur beträgt hier im 2ten Fall des (§. cit.) die, von der höhern Ordnung in die niedrigere gebrachte Einheit, nicht immer zehn, ſondern ſo viel, als die Natur der benannten Zahl und ihre Eintheilung mit ſich bringt.

		10		4		4	
12	Malt.	8	Sri.	2	Vierling	2	Meßle.
6	—	9	—	3	—	3	—
5	Malt. —	8	Sri. —	2	Vierl. —	3	Meßle.

§. 113.

Benannte Zahlen mit unbenannten zu multipliciren.

Auflöſung.

1) Man multiplicire alle Theile des Multiplicanden beſonders und fange immer bey der niedrigſten Sorte an.

2) Alle einzelne Produckte, bringe man, wie (§. 111 Nr. 2.) zur nächſthöhern Sorte, ſo findt ſich das Produckt. Z. E.

8. Ehlen	3. Viert.	1. Achtel	1. Sechzenth.
VIII	VI.	IV.	9.
80 Ehlen —	1 Viert. —	1 Achtel —	1 Sechzehnth.

§. 114.

Benannte Zahlen mit unbenannten zu dividiren.

Auflöſung.

1) Man dividire alle einzelne Theile der benannten Zahl nach einander und fange bey der größten Sorte an.

2) Wenn der Diviſor nicht aufgeht, ſo verwandelt man den Reſt in die nächſt kleinere Sorte (§. 110 Nr. 1.) und addirt ſie dazu.

3) Diß, biß auf die letzte Sorte fortgeſetzt, giebt den ganzen Quotienten.

33 Jahr 11 Wochen 6 Tag 14 Stund. 32 Min. 24 Sec. | 6

30

3
52

167 Wochen.
12

47
42

5
7

41 Tag.
36

5
24

134 Stund.
12

14
12

2
60

152 Min.
12

32
30

2
60

144 Sec.
12

24
24

0

5 Jahr.
27 Wochen.
6 Tag.
22 Stund.
25 Minuten.
24 Secunden.

Anmerkung.

Dieſe Art zu multipliciren und zu dividiren nennen die Franzoſen ſehr gut; das zuſammengeſetzte Multipliciren und Dividiren (composée.) Wollte man alles vorher auf einmal auf die kleinſte Sorte bringen (§ 110 Nr. 1.) So giengs auch an. Allein man müßte alsdann das Product oder den Quotienten wiederum in gröſſere Sorten verwandlen, (§. 110. Nr. 2.) welches viel weitläuftiger wäre. Was iſt aber das Product oder der Quotient benannter Zahlen in benannte? Eine unbenannte Zahl. Genug Antwort auf die elende Frage arithmetiſcher Quackſalber, welche ſich wunder groß dünken, wenn ſie durch Vorlegung der Aufgabe: Man multiplicire 3 fl. 18 kr. 3 Pfen. mit 2 fl. 6 kr. 2 Pfen. ihre grobe Unwiſſenheit verrathen. Häufige die 4 Rechnungsarten in benannten Zahlen erläuternd und übende Aufgaben ſehe man in M. A. p. 25 biß 54.

§. 115.

Proben der 4 Rechnungsarten heiſſen alle Methoden, wodurch man ſich, durch eine andere Rechnung zu überzeugen hoffet, ob man in der erſten Rechnung geirrt habe oder nicht. Folgende Arten ſind die gewöhnlichſten:

1) Man laſſe verſchiedene Perſonen, oder auch die nemliche, zu verſchiedenen Zeiten, die nemliche Aufgabe berechnen. Iſt richtig gearbeitet, ſo muß immer einerley heraus kommen. (§ 65.) Diß iſt unter andern eine für den Staat ſehr wichtige Beſchäftigung der Rechnungsräthe.

2) Man prüfe eine Rechnungsart durch die andere. So läßt ſich eine jegliche durch ſich ſelbſt und alle übrige unterſuchen, wohin inſonderheit die ſogenannte Neunerprobe gehört, die ihren Grund im (§. 70) hat. Wovon mündlich.

3) Inſonderheit dienen ſich Addition und Subtrackſtion, Multiplication und Diviſion wechſelsweiſe zur Prüfung, wovon die Gründe (§. 48 biß 67.) liegen. Einige Aufgaben in allgemeinen Zeichen ſollens erläutern.

Man addire I. $3a + 4b - c$
II. $6a - 12b + 8c - d$

$9a - 8b + 7c - d$ hievon

Nr. II. abgezogen $3a + 4b - c$ giebt wieder Nr. I.

Man ſubtrahire von I. $6a - 4b$
II. $-12b + b - c$

$18a - 5b + c$ Wozu

Nr. II. addirt wiederum $6a - 4b$ wie in N. I. gibt.

Man multiplicire $3a - 2b$
mit $4a + 3b$

Und dividire das Product mit dem einen Facktor.

$$\begin{array}{l} 12a^2 - 8ab \\ \quad\quad +9ab - 6b^2 \\ \hline 12a^2 + ab - 6b^2 \;|\; 3a - 2b \\ 12a^2 - 8ab \quad\quad\quad | \; 4a + 3b \\ \hline \quad\quad +9ab - 6b^2 \\ \quad\quad +9ab - 6b^2 \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

S.

So erſcheint wieder der andere Facktor $4a+3b$.

Man dividire $14ax+10axy$ | mit $2x$

$$\begin{array}{r|l} 14ax+10axy & 2x \\ \underline{14ax} & \overline{7a+5ay} \\ +10axy & \\ \underline{+10axy} & \\ 0 & \end{array}$$

Und nun multiplicire man $7a+5ay$ den Quotienten mit dem Diviſor $2x$ ſo erſcheint wieder die Dividende $14ax+10axy$

4) Man verändere die Art der Berechnung. Kommt das vorige heraus, ſo hat man richtig gearbeitet. Z. E. beym addiren.

$$\begin{array}{r} 34 \\ 78 \\ 12 \\ 16 \\ \hline 140=S \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34 \\ 78 \\ \hline 112=a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ 16 \\ \hline 28=b \end{array} \qquad \begin{array}{r} 112=a \\ 28=b \\ \hline 140=S \end{array}$$

Man theile die Poſten, addire ſie, addire aufs neue die einzelne Summen hier a und b, ſo muß S von a und b dem erſten S gleich ſeyn.

Oder wenn man das erſtemal aufwärts ſummirt hat, ſo ſummire man das 2temal abwärts.

Beym Multipliciren verwechſele man die Facktoren. (§. 50. Zuſ. 2.) Z. E.

324		203
203		324
972		812
6480		406
		609
.		.
65772	=	65772

Ueber das pracktiſche von allen, vorzüglich der Neunerprobe das mehrere mündlich. Zur Wiederholung ſehe man M. A. 3tes Kapitel.

§. 116.

Alle dieſe Proben ſind in der Ausübung kein untrügliches Merkmal, daß man richtig oder unrichtig gerechnet habe, leiſten aber doch einen beträchtlichen Nutzen.

Beweiß.

1) Dann ſie ſetzen eine neue wiederholte Rechnung voraus, (§. 115.) und wer in der erſten fehlte, kann ja auch in der 2ten irren.

2) Doch iſts äuſſerſt unwahrſcheinlich, daß man bey veränderter Art zu rechnen, gerade den nemlichen Fehler, auf die nemliche Art begehen ſollte.

Anmerkung.

Gleichwohl iſt die Neunerprobe unter allen, entweder die unſicherſte oder mühſamſte. Eine durch ſtarke Ue-

bung erworbene Fertigkeit, welche, wenn man ſich anderſt durchs Rechnen nicht gänzlich ermüdet hat, das Irren beynahe unmöglich macht, erſetzt alle Proben.

§. 117.

Vortheile im Rechnen, heiſſen alle Regeln, welche uns fähig machen, eine Rechnung kürzer, oder mit weniger Gefahr zu irren auszuführen. Diß kann geſchehen:

1) Wenn ich weniger Zahlzeichen oder auch weniger Zeit brauche,

2) Eine minder mühſame Rechnungsart, ſtatt der beſchwerlichern anwende, wovon im IXten Abſchnitt das herrlichſte Beyſpiel.

3) Wenn ich das Gedächtnuß weniger beſchäftige.

§. 118. Zuſatz 1.

Nicht alle Abkürzungen ſind wahre Vortheile. Sie koſten oft mehr Zeit und ſind nicht ſelten der Richtigkeit gefährlich.

2) Am wenigſten ſind ſie es für alle Perſonen.

3) Nicht immer iſt die minder mühſame Rechnungsart der beſchwerlichern vorzuziehen. Sie kann oft 2, 3, 4mal ſo viel Zeit erfordern. (§. 82.)

4) Nicht alle weitläuftiger ſcheinende Auflöſungen ſind keine Vortheile. Dann ſie können bißwei-

len in weitläuftigen Rechnungen, die Gefahr zu irren ſehr vermindern. (§. 82. und §. 101 Zuſ. 2.)

5) Bey minder wichtigen Aufgaben ſehe man vorzüglich auf Abkürzungen, bey ſehr wichtigen, auf Vortheile, welche die Gefahr zu irren verringern.

§. 119.

Alle Hauptabkürzungsvortheile, der 4 Rechnungsarten in ganzen Zahlen, laufen auf folgendes hinaus, und in ihnen beſteht das weſentliche der ſogenannten welſchen Pracktick, womit ſo viel blauer Dunſt gemacht wird.

1) Additionsvortheile in benannten Zahlen, vorzüglich beym Summiren der Kreutzer, Livre, Pfunde, Secunden, Minuten. M. A. p. 26 und 27.

2) Eben dieſe beym ſubtrahiren gemeldter Sorten.

3) Anwendung der Buchſtabenrechnung beym addiren und ſubtrahiren benannter Zahlen.

4) Zerfällung vieler Poſten, in mehrere, wenigere, bey groſſen Additionen. (§. 115. Nr. 4. §. 117. Nr. 3.)

5) Gebrauch der Rechenpfenninge, beym Summiren vieler Seiten einer weitläuftigen Rechnung, wovon mündlich.

6) Wenn einer von den Facktoren Nullen hat. M. A. p. 33. und 34.

7) Wenn der Multiplicator 11 oder 5 iſt M. A. p. 34 und 37.

8) Wenn er aus 2 Ziffern beſteht deren eine 1 iſt. M. A. p. 35.

9) Wenn er ein Produckt aus 2 oder mehreren Zahlen iſt, ib.

10) Wenn er nur um eine einfache Zahl weniger als 10. 100. 1000 iſt. ib.

11) Wenn er die Hälfte, Drittel, Viertel von 10. 100. 1000 ꝛc. iſt. Ib. p. 36.

12) Vortheile erhält die Multiplication durch die Betrachtung der vollkommenen (aliquotæ) und unvollkommenen (aliquantæ) Theile. Die erſten ſind ſolche Theile des Ganzen, welche durch die Diviſion darinnen aufgehen. Unvollkommene das Gegentheil. M. A. p. 37.

Auch bey der Diviſion giebts dergleichen Abkürzungen.

13) Wenn der Diviſor überhaupt hinten Nullen hat.

14) Wenn er 10. 100. 1000 ꝛc. iſt. M. A. p. 47. und 48.

15) Wenn er die Hälfte, Drittel, Viertel, von 10. 100 ꝛc. iſt. Ib.

16) Wenn er 11. iſt.

17) Wenn er ein Produckt aus andern Zahlen iſt. Ib.

18) Wenn man die Produckte und Reſte, oder doch die erſtern gar nicht hinſchreibet. M. A. p. 51. Doch ſehe man (§. 118. Zuſ. 1. und 2.)

§. 120.

Von allen dieſen Vortheilen und ihren Gründen, ſoll, nach Beſchaffenheit der Zuhörer, mündlich geſprochen werden. Den einigen (§. 119. Nr. 3.) der am wenigſten bekannt iſt, will ich wirklich hier erläutern.

Ein Kaufmann erhält durch verſchiedene Frachtwägen Zucker. Einmal 8 Cent. 30 Pfund weniger 28 Loth, weniger 3 Quintgen. Denn 7 Centner 30 Loth 2 Quint. weniger 2 Pfund. Endlich fehlen im 3ten Faß, welches 6 Cent. und 1 Quint. wägen ſollte, 48 Pfund und 24 Loth. Wie viel erhielt er zuſammen?

Auflöſung.

Nach der gewöhnlichen Art müßte man von der 1ten Lieferung vorhin 28 Loth 3 Quint. Von der andern 2 Pfund und von der 3ten 48 Pfund 24 Loth abziehen und dann erſt die Reſte addiren. Allein diß iſt überflüßig. Es ſeyen a = Cent. b = Pfund c = Loth d = Quint. Die vorhandene Waare drücke man durch + die fehlende durch — aus (§. 79. Nr. 2.) hierauf addire man (§. 81.) und reducire die Summe.

$$8a + 30b - 28c - 3d$$
$$7a - 2b + 30c + 2d$$
$$6a - 48b - 24c + d$$

21a — 20b — 22c erhält er wirklich, das iſt 21 Cent. weniger 20 Pfund und 22 Loth = 20 Cent. 79 Pfund 10 Loth.

Beyſpiel von der Subtracktion.

Bey einer Fruchtlieferung kommen in einer Woche an 600 Malt. 2 Vierling wovon 7 Sri. und 2 Meßle verſchleudert werden. Hievon giebt man ab 203 Malt. 3 Vierling, weniger 9 Sri. und 3 Meßle. Wie viel bleibt im Magazin?

Auflöſung.

Man drücke alles nach voriger Methode aus und ſubtrahire (§. 97.)

$$600a - 7b + 2c - 2d$$
$$203a - 9b + 3c - 3d$$

$397a + 2b - c + d$ demnach bleiben übrig 397 Malter 1 Sri. 3 Vierling 1 Meßle.

§. 121.

Noch iſt die Anwendung der 4 Rechnungsarten im gemeinen Leben übrig. Ich will ſie nur in allgemeinen Sätzen angeben, dann Erläuterungen beſondrer Fälle findet man in allen practiſchen Rechenbüchern z. E. in der angeführten M. A.

1) Summen von Ausgaben oder Einnahmen, überhaupt, einzelner Theile, welche zuſammen ge-

nommen ein Ganzes ausmachen, findet man durch das addiren,

2) Den Unterſchied 2er Gröſſen durchs ſubtrahiren.

3) Die Multiplication wird angewendet

a, Wo es jedem die geſunde Vernunft ſagt, daß eine Gröſſe etlichemal müſſe genommen werden.

b. Wenn gröſſere Sorten in kleinere zu verwandeln ſind. (§. 110.)

c. Wenn Dinge Reihen weiß ins Gevierte ſtehen und die Anzahl der Reihen, aber auch, wie viel Einheiten eine Reihe enthält, bekannt iſt, und man die Summe von allen verlangt.

4) Die Diviſion findet ſtatt, wenn

a. Die Vernunft ſagt, daß eine Größe in mehrere gleiche oder ungleiche Theile ſoll getheilet werden.

b. Wenn kleinere Sorten in gröſſere müſſen verwandelt werden. (§. 110.)

c. Wenn Dinge Reihen weiß ins Gevierte ſtehen und die Summe, nebſt der Zahl der Reihen, oder die Gröſſe einer Reihe, bekannt iſt.

III. Abſchnitt.

Von den Brüchen.

§. 122.

Was Brüche überhaupt, Zähler, Nenner und vermiſchte Zahlen ſind, ſagt uns (§. 56. 57. 58.) Nun iſt der Zähler entweder $<$ der Nenner, oder ihm $=$ oder $>$ der Nenner. Die erſtere heiſſen Eigentliche (veræ) die andern Scheinbrüche (quaſi fractiones) die letzten Uneigentliche oder Baſtardbrüche. (ſpuriæ) Ferner ſind entweder Zähler und Nenner ganze Zahlen, oder bald die Zähler allein, oder auch Zähler und Nenner vermiſchte Zahlen. So entſtehen reine, unreine und zwar ſowohl einfach unreine als vermiſcht unreine Brüche. Z. E. $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{5}$. $\frac{9}{4}$. $\frac{2}{3\frac{1}{4}}$ $\frac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}}$.

§. 123.

Hieraus folgt:

1) Alle eigentliche Brüche ſind kleiner als eine Einheit des Ganzen von dem ſie entſtehen (§. 56.)
2) Alle Scheinbrüche ſind $= 1$. (§. 55. Zuſ. 3.)
3) Alle uneigentliche Brüche ſind gröſſer als die Einheit des Ganzen von dem ſie entſtunden (§. 58.)

4) Alle uneigentliche Brüche, deren Nenner = 1, betragen ſo viel ganze Einheiten, als der Zähler enthält. (§. 55. Zuſ. 4.)

5) Der Nenner ſtellt alle Theile des Ganzen vor, das iſt das Ganze ſelbſt, doch in gleiche Theile getheilt. (§. 56.)

6) Nur der Zähler beſtimmt die wirkliche Anzahl, ſolcher zum Bruch gehörigen Theile des Ganzen. (§. 56.)

7) Brüche von verſchiedenen Nennern ſind unähnliche Gröſſen. (§. 59 und 77.)

8) Je gröſſer der Zähler bey gleichen Nennern, deſto gröſſer iſt der Bruch und umgekehrt. (N. 6) $\frac{5}{9} > \frac{2}{9}$.

9) Je gröſſer der Nenner bey gleichen Zählern, deſto kleiner iſt der Bruch und umgekehrt. (Nr. 6.) $\frac{3}{5} > \frac{3}{10}$.

10) Ein Bruch, deſſen Zähler und Nenner mit einerley Gröſſe multiplicirt oder dividirt wird, wird zwar den Zeichen oder Zahlen, nicht aber dem Werth oder Gröſſe nach verändert. (§. 105. Zuſ. 2.)

11) Den Zähler eines Bruchs, deſſen Nenner unverändert bleibt, mit einer Gröſſe multipliciren, heißt den Bruch ſelbſt ſo oft vergröſſern, als der Multiplicator Einheiten hat. (Nr. 8. und §. 50. Zuſatz 1.)

12) Den Nenner eines Bruchs, deſſen Zähler unverändert bleibt, mit einer Gröſſe multipliciren, heißt den Bruch ſelbſt ſo oft verringern, als der Multiplicator Einheiten hat. (Nr. 9. und §. 50. Zuſ. 1.)

13) Brüche von gleichen Zählern und Nennern ſind einander gleich (§. 64.) Z. E. $\frac{3}{8} = \frac{2+1}{8}$ aber nicht umgekehrt.

14) Den Zähler eines Bruchs, deſſen Nenner unverändert bleibt, mit einer Gröſſe dividiren, heißt den Bruch ſelbſt ſo oft verringern, als der Diviſor Einheiten hat (Nr. 8 und §. 54.)

15) Den Nenner eines Bruchs, deſſen Zähler unverändert bleibt, mit einer Gröſſe dividiren, heißt den Bruch ſelbſt ſo oft vermehren, als der Diviſor Einheiten hat. (Nr. 9. §. 54.)

16) Ein jeder Bruch iſt eine durch Zeichen verrichtete Diviſion (§. 102.) Folglich ein wahrer Quotient aus dem Nenner in den Zähler. (§. 55. Zuſ. 1.)

17) Je öfter der Zähler im Nenner ſteckt, deſto kleiner iſt der Bruch und umgekehrt. (Nr. 8 u. 9) $\frac{1}{2} > \frac{3}{12}$ und $\frac{3}{15} < \frac{4}{16}$.

18) Wird der Bruch mit ſeinem Nenner multiplicirt, ſo fällt der Nenner weg, und der Zähler wird in Ganze verwandelt. (§. 55. Zuſ. 2.) Z. E. $\frac{3}{5} \times 5 = 3$. Dieſer Satz iſt in der ganzen

Mathematick, vorzüglich der Algebra, von groſ-ſer Wichtigkeit, man hüte ſich ihn zu vergeſſen.

§. 124.

Ganze in Brüche zu verwandeln ohne ihre Gröſſe zu ändern.

Auflöſung.

1) Wenn der Nenner unbeſtimmt iſt, ſo zieht man unter die Ganzen einen Strich und ſetzt unter denſelben 1. (§. 123. Nr. 4.)

2) Wär aber der Nenner unbeſtimmt, ſo multiplicirt man, die gegebene Ganze, mit dem gegebenen Nenner, zieht unter das Produckt einen Strich, und ſetzt den gegebenen Nenner darunter. Z. E. 4 ſoll in einen Bruch, deſſen Nenner 3 iſt, verwandelt werden. $4 \times 3 = \frac{12}{3} = 4$.

Beweiß für Nr. 2.

$4 = \frac{4}{1}$ (Nr. 1.) und $\frac{4}{1} \times 3 = \frac{12}{3}$ (§. 123 N. 10.)

§. 125.

Vermiſchte Zahlen in einen uneigentlichen Bruch zu verwandlen. Z. E. $2\frac{3}{4}$.

Auflöſung.

Da $2 = \frac{8}{4}$ (§. 124.) ſo ſind $2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ (§. 123. Nr. 6.) daher die Regeln:

1) Multiplicire die Ganzen mit dem Nenner des angehängten Bruchs.
2) Addire zum Produckt den Zähler des Bruchs.
3) Setze den vorigen Nenner darunter.

§. 126.

Finden wie viel Ganze in einem uneigentlichen Bruche ſtecken. Z. E. in $\frac{15}{4}$.

Auflöſung.

Dividirt den Nenner wirklich in den Zähler, der Quotient beſtimmt die Anzahl der Ganzen. (§. 100. und §. 54. Zuſ. 1.) $\frac{15}{4}$: 15 | $3\frac{3}{4}$.
12
3

Anmerkung.

Die 22 und 23te Aufgabe dienen ſich wechſelsweiſe zur Probe und §. 124. 125. und 126. werden eben ſo in Buchſtaben aufgelöſet.

§. 127.

Den Werth eines Bruchs finden heißt ihn in ſolchen Theilen ausdrücken, in welche das Ganze im gemeinen Leben eingetheilt wird. Oft genug weichen die Nenner der Brüche von dieſer Eintheilung ab. Daher entſteht die ſo nöthige Aufgabe: Den

Werth eines Bruchs zu finden. Z. E. wie viel $\frac{3}{10}$ fl. Kreutzer ausmachen.

Auflöſung.

1) Man beobachte: Von was für einem Ganzen der Bruch entſtanden. Hier wären es Gulden.

2) Aber auch, in wie viel Theile diß Ganze im gemeinen Leben getheilt wird, hier in 60, und wie ſie genennt werden, hier Kreutzer.

3) Multiplicire mit der Anzahl dieſer Theile den Zähler des Bruchs und

4) Dividire das Produckt mit dem Nenner, ſo giebt der Quotient den Werth des Bruchs.

$$\begin{array}{r|l} \frac{3}{10}\text{ fl. } 60 & \\ 3 & \\ \hline 10 : 180 & 18 \text{ kr.} = \frac{3}{10} \text{ fl.} \end{array}$$

Beweiß.

10 : 60 = 6. folglich iſt 6 = ein Zehentheil vom fl. Man will aber wiſſen, wie viel 3 ſolcher Zehentheile betragen, folglich müſſen die 6 noch mit 3 multiplicirt werden, und ſie geben auch wirklich 18 kr. wie vorhin. Weil aber dieſe Methode oft auf unſchickliche Brüche führen würde und $(10:60) \bowtie 3 = (60 \bowtie 3) : 10$ (§. 63.) ſo bedient man ſich der in der Auflöſung gezeigten Art, welche dieſe Unbequemlichkeit vermeidet.

§. 128.

Einen Bruch kleiner zu machen oder aufzuheben, ohne daß er ſeinen Werth verliehre.

Auflöſung.

Da $\frac{8:8}{16:8} = \frac{1}{2}$ (§. 123. Nr. 10.) ſo entſtehen folgende Regeln:

1) Man ſuche eine Zahl welche ſowohl im Zähler als Nenner aufgehet, oder den gemeinſchaftlichen Diviſor des Zählers und Nenners.

2) Dividire beyde damit, ſo iſt der neue Bruch dem vorigen gleich, und doch mit wenigeren Zahlen geſchrieben oder kleiner ausgedrückt. Z. E. $\frac{18}{36}: 9 = \frac{2}{4}: 2 = \frac{1}{2} = \frac{18}{36}$.

§. 129.

Alles kommt daher auf die Erfindung dieſes gemeinſchaftlichen Diviſors an. Dieſe hängt, wenn derſelbige 2, 5, oder 10 ſeyn ſoll, von der Beſchaffenheit der letzten einfachen Zahlen des Zählers und Nenners ab. Da nun eine gerade Zahl diejenige iſt, deren Hälften einander gleich ſind, ſo kann man alles in folgende Regeln bringen.

1) Sind Zähler und Nenner gerade Zahlen, ſo hebt 2 auf.

2) Haben beyde am End ein oder mehrere Nullen, ſo hebt 10, 100, 1000 ꝛc.

3) Sind beyde letzte 5, oder 5 und 0, ſo hebt 5 auf.

Dieſe 3 Regeln gründen ſich auf (§. 84. und das entgegengeſetzte von § 85. Nr. 3.)

4) Iſts keiner von dieſen Fällen, ſo verſuche man das Aufheben mit 9, 7. oder 3. Inſonderheit läßt ſich leicht finden, ob 3 ein möglicher Diviſor iſt. Man addirt alle Zahlzeichen des Zählers zuſammen, eben ſo des Nenners. Laſſen ſich beyde Summen mit 3 dividiren, ſo wird 3 auch im Zähler und Nenner aufgehen.

5) Gelingts auch hier nicht, ſo hat der Bruch keinen einfachen gemeinſchaftlichen Diviſor. Daher entſpringt die folgende Aufgabe, welche nicht nur hier, ſondern vorzüglich im VI. Abſchnitt höchſtwichtig wird.

§. 130.

Zu 2 gegebenen Zahlen den größten gemeinſchaftlichen Diviſor, der möglich iſt, erfinden.

Auflöſung.

1) Man dividire die kleinere Zahl in die Gröſſere. Geht ſie auf, ſo iſt ſie ſelbſt der geſuchte Diviſor.

2) Geht ſie nicht auf, ſo dividirt man den Reſt in den vorhergehenden Diviſor.

3) Die 2te Regel wird ſo lange angewendet, biß entweder ein Diviſor aufgehet, oder 1 übrig bleibt. Im 1ten Fall iſt die aufgehende Zahl der geſuchte gemeinſchafftliche Diviſor, im 2ten iſt keiner möglich. Z. E.

```
     153 |
153 : 162 | 1
     153 |
      9 : 153 | 17
           9  |
          63
          63
           0
```

Hier iſt alſo 9 der geſuchte gemeinſchafftliche Diviſor dann

```
9 : 153 | 17   und   9 : 162 | 18
     9  |                 9  |
    63                   72
    63                   72
     0                    0
```

Beweiß.

1) Nach der Auflöſung iſt 162 = 153 + 9. Es iſt daher nur zu zeigen, daß 9 ſowohl in 153, als in 9 ſelbſt aufgehe. Nun iſt 153 = 17 × 9 (§. 54. Zuſ. 3. und 4.) alſo muß 9 in 153 aufgehen. Folglich auch in 153 + 9 = 162. Es iſt daher 9 der gemeinſchaftliche Diviſor von 153 und 162 (§. 128. Nr. 1.)

Bayerische Staats-Bibliothek München

2) Allein es iſt auch 9 der gröſste gemeinſchaftliche Diviſor dieſer Zahlen. Denn geſetzt es wär ein gröſsrer Diviſor möglich der in 153 aufgieng, z. E. 51. ſo müſst' er doch auch in 162 = 153 + 9 aufgehen, ſonſt wär er nicht gemeinſchaftlicher Diviſor, folglich auch in 9 ſelbſt, welches aber, wenn er > 9 unmöglich iſt. Neun iſt alſo hier auch der gröſste gemeinſchaftliche Diviſor.

§. 131. Zuſatz.

Wenn daher die Fälle 1, 2, 3 und 4 (§. 129.) nicht ſtatt finden, ſo ſucht man, den Bruch aufzuheben, den gröſsten gemeinſchaftlichen Diviſor (§. 130.) und verfährt alsdenn wie (§. 128.)

Anmerkung.

In ſehr vielen Fällen wird (§. 129.) bequemer ſeyn. Tief und vollſtändig ſchreibt hievon: Lambert in ſeinen Beyträgen zur Mathematick, II. Theil Ite und II. Abhandlung, wo in einer groſſen Tabelle, die Diviſoren aller Zahlen von 1 biſs 10200 vor Augen liegen.

§. 132.

Brüche von ungleichen Nennern ſind unähnlich (§. 123. Nr. 7.) Sollen ſie addirt oder ſubtrahirt werden, ſo müſſen ſie alſo vorhin zu gleicher Benennung gebracht werden, ohne ihren Werth zu ändern. (§. 48. und 52.) Daher entſteht die Aufgabe:

Brüche von verſchiedenen Nennern zu einerley Benennung zu bringen.

Auflöſung.

1) Sinds nur 2 Brüche, ſo multiplicire man eines jeden Zähler und Nenner, durch des andern Nenner, ſo entſtehen 2 neue Brüche, welche den vorigen gleich ſind und einerley Nenner haben.

Z. E. $\frac{3}{4}$ (6 $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

$\frac{5}{6}$ (4 $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

2) Oder es ſind mehr Brüche vorhanden. Hier multiplicirt man jedes Bruchs Zähler und Nenner, mit dem Produckt aus allen übrigen Nennern, den ausgenommen, welchen man mit dieſem Produckt multiplicirt. Z. E.

$\frac{1}{2}$ (15 $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}$ (10 $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$\frac{4}{5}$ (6 $\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

Beweiß für Nr. 1.

Die Gleichheit der neuen Brüche mit den alten erhellt aus (§. 123 Nr. 10.) und die Gleichheit ihrer Nenner aus (§. 63.) weil $4 \times 6 = 6 \times 4$ (§. 50. Zuſ. 2.)

Beweiß für Nr. 2.

Die Gleichheit der neuen Brüche mit den vorigen zeigt auch hier (§. 123. Nr. 10.) und die Gleichheit ihrer Nenner ebenfalls (§. 63.) dann $15 = 5 \times 3$; $10 = 5 \times 2$ und $6 = 3 \times 2$ daher auch $15 \times 2 = 5 \times 3 \times 2 = 30$ und $6 \times 5 = 3 \times 2 \times 5 = 30$; $10 \times 3 = 5 \times 2 \times 3 = 30$.

§. 133. Zuſatz.

In Buchſtaben geſchieht das nemliche, nur fällt hier der Beweiß ſogleich in die Augen. Z. E.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} \;(dn\; \frac{adn}{bdn} = \frac{a}{b} \\[1em] \frac{c}{d} \;(bn\; \frac{bcn}{bdn} = \frac{c}{d} \\[1em] \frac{m}{n} \;(bd\; \frac{bdm}{bdn} = \frac{m}{n} \end{array}\right\} \text{§. 132.}$$

Anmerkung.

Vortheilhafte Abkürzungen bey dieſer Arbeit, ſiehe M. A. 4tes Kap. Schmids Rechenk. 1ter Theil 6tes Kap. Ihre Gründe liegen (§. 63.)

§. 134.

Brüche zu addiren.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man bringe ſie, wenn ſie nicht ſchon gleiche Nenner haben, zu gleicher Benennung (§. 132.)

2) Addire alsdann bloß ihre Zähler (§. 123. Nr. 6.)

3) Setze unter die Summe den allen gemeinſchaftlichen Nenner. Z. E.

$$\begin{array}{l} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \hline 6 \\ \hline 5 : \frac{6}{5} \Big| 1\frac{1}{5} \text{ (§. 126)} \\ \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \;(12\frac{12}{24} \\ \frac{2}{3} \;(\;8\frac{16}{24} \\ \frac{3}{4} \;(\;6\frac{18}{24} \\ \hline \quad 46 \\ \hline 24 : 46 \Big| 1\frac{22}{24} = 1\frac{11}{12} \\ \quad\; 24 \quad \text{(§. 126 u. 128.)} \\ \quad\; 22 \end{array}$$

Zuſatz.

Sollen Ganze, Brüche und vermiſchte Zahlen ſummirt werden, ſo behandelt man die Brüche allein nach der eben angegebenen Methode, und zählt die Ganzen, wenn in der Summe enthalten ſind, zu den ganzen Poſten.

§. 135.

Brüche von Brüchen zu ſubtrahiren.

Auflöſung und Beweiß.

1) Wenn ſie nicht ſchon gleiche Nenner haben, ſo bringe man ſie dazu (§. 132.)

2) Subtrahire ihre Zähler von einander und gebe dem Reſt den gemeinſchaftlichen Nenner. (§. 123. Nr. 6.) Z. E.

$\frac{13}{15}$	$\frac{3}{4}$ (5	$\frac{15}{20}$
$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$ (4	$\frac{8}{20}$.
$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ (§. 128.)		$\frac{7}{20}$

Zuſatz 1.

Sollen Brüche von Ganzen abgezogen werden, ſo verwandelt man eine Einheit der Ganzen, in einen Bruch, welcher mit der Minuende gleichen Nenner hat (§. 124. Nr. 2.) und verfährt nach der vorigen Regel. $3 - \frac{2}{3} = 2 + \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Zuſatz 2.

Iſt die Minuende eine vermiſchte, die Subtrahende ein Bruch oder vermiſchte Zahl, ſo iſt entweder der Bruch der Minuende $>$ der Bruch der Subtrahende, oder $=$ oder $<$ als dieſelbige. (§. 123. Nr. 17.) Die beyde erſtere Fälle werden nach der gewöhnlichen Regel aufgelößt. Im letzten verwandelt man eine Einheit der Minuende nach (Zuſ. 1.) in einen Bruch, addirt dieſen zum Bruch der Minuende (§. 134.) und ſubtrahirt von der Summe den Bruch der Subtrahende. Z. E. $4\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4} = (3 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2}) - 2\frac{3}{4} = 3\frac{3}{2} - 2\frac{3}{4} = 3\frac{12}{8} - 2\frac{6}{8} = 1\frac{6}{8} = 1\frac{3}{4}$ (§. 128.)

§. 136.

Unreine Brüche in reine zu verwandeln.

1) Sinds einfach unreine (§. 122.) ſo multiplicire man den Zähler und Nenner mit dem Nenner der vermiſchten Zahl. Z. E.

$$\frac{2}{3\frac{1}{4}} = \frac{8}{13}$$

2) Sinds doppelt unreine, ſo

a. Verwandle man den Zähler und Nenner in uneigentliche Brüche (§. 125.) und

b. Multiplicire alsdann eines jeden Zähler durch des andern Nenner. Z. E.

$$\frac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{2}} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3} \text{ (§. 128.)}$$

Beweiß für Nr. 1.

$$\frac{2}{3\frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{13}{4}} \text{ (§. 125.) und } \frac{2}{\frac{13}{4}} \times 4 = \frac{8}{13}$$

(§. 123. Nr. 18. und Nr. 10.)

Beweiß für Nr. 2.

$$\frac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{2}} \text{ (§. 125.) aber auch } \frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{2}} \times 3 = \frac{\frac{7}{21}}{2}$$

und $\frac{\frac{7}{21}}{2} \times 2 = \frac{14}{21}$ (§. 123. Nr. 18. und Nr. 10.)

endlich aber $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$ (§. 128.)

Zuſatz.

Unreine Brüche laſſen ſich alſo, wie reine, addiren und ſubtrahiren, wenn ſie in reine verwandelt werden.

Anmerkung.

Brüche in Buchſtaben werden nach den nemlichen Geſetzen addirt und ſubtrahirt. Beyſpiele mündlich. Ueber die ganze Materie von Verwandlung der Brüche ſehe der Stärkere: Lamberts Beytr. 2ter Theil III. Abhandlung.

§. 137.

Brüche mit Ganzen zu multipliciren.

Auflöſung und Beweiß.

Man multiplicire den Zähler mit den Ganzen und laſſe den Nenner unverändert. (123. Nr. 11.) Z. E. $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

§. 138.

Brüche mit Brüchen zu multipliciren.

Auflöſung.

1) Man multiplicire die Zähler in einander.

2) Eben ſo die Nenner, das erſte Produckt giebt den Zähler, das letzte den Nenner des Producks. Z E.

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \text{ und } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Beweiß.

$\frac{4}{5} \times 2 = \frac{8}{5}$ (137.) Diß iſt aber, da der Multiplicator nur $\frac{2}{3}$ iſt, 3mal zu groß, folglich muß von $\frac{8}{5}$ nur der 3te Theil genommen, oder der Nenner mit 3 multiplicirt werden, das iſt $\frac{8}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$ (§. 123. Nr. 12.) Diß gilt von allen Brüchen, man erhält

daher das Produckt zweyer Brüche durch die angegebene Auflöſung.

Will man dieſen Beweiß in Buchſtaben ganz allgemein führen, ſo verfahre man folgendermaſſen. Der Bruch $\frac{a}{b}$ iſt = b : a (§. 123. Nr. 16.) dieſer Quotient ſeye = x ſo iſt $\frac{a}{b} = x$ und eben ſo $\frac{c}{d} = y$. Daher wäre, weil

$$\frac{a}{b} = x$$
$$\frac{c}{d} = y$$

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = xy$ (§. 63.) Nun iſt

$\frac{a}{b} = x$ und $\frac{c}{d} = y$ alſo
$\times b \qquad \times d$

$a = bx \qquad c = dy$ (§. 63. u. 123 Nr. 18.)

Da alſo $a = bx$
$c = dy$ folglich

$ac = bxdy$ (§. 63.) ſo iſt auch : bd

$\frac{ac}{bd} = xy$ (§ cit.) Nun war auch Anfangs

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \|$ daher

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (§. 62.) oder das Produckt zweyer Brüche wird nach den gegebenen Regeln richtig gefunden.

Zuſatz 1.

Vermiſchte Zahlen werden in uneigentliche Brüche, Unreine Brüche in reine verwandelt (§. 125. und 136) und alsdann nach §. 137 oder 138 multiplicirt.

Zuſatz. 2.

Eben ſo können mehrere Brüche in einander multiplicirt werden. Z. E. $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$ da aber $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (§. 123. Nr. 10.) ſo läßt ſich die Multiplication mehrerer Brüche oft beträchtlich abkürzen, wenn man die Zähler aller Multiplicanden, ſo viel möglich, gegen die Nenner der Multiplicatoren aufhebt.

Zuſatz. 3.

Wenn 4 ein halbmal genommen wird, ſo iſt das Produckt 2, folglich kleiner als der Multiplicand. Man wundre ſich daher nicht, wenn beym Multipliciren eigentlicher Brüche, das Produckt immer kleiner wird, da ja einer oder beyde Facktoren nicht eine ganze Einheit, ſondern nur Theile derſelben enthalten. (§. 50. Z. 1. §. 123. Nr. 1.) Anwendung von der Multiplication der Brüche ſiehe M. A. p. 70. u. 71.

§. 139.

Brüche mit Ganzen zu dividiren.

Auflöſung und Beweiß.

Man multiplicire den Nenner des Bruchs mit den Ganzen, und laſſe den Zähler unverändert. (§. 123. Nr. 12.) Z. E.

$$3 : \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \text{ und } a : \frac{m}{n} = \frac{m}{an}$$

§. 140.

Brüche mit Brüchen zu dividiren.

Auflöſung.

Man kehre den Diviſor um und multiplicire mit dem verkehrten Diviſor die Dividende, ſo giebt das Produckt den Quotienten. Z. E.

$\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ ſtünde $\frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{10}$ und $\frac{c}{d} : \frac{m}{n}$ wär

$$\frac{d}{c} \times \frac{m}{n} = \frac{dm}{cn}$$

Beweiß.

$2 : \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$ (§. 139.) Man ſoll aber nur mit $\frac{2}{3}$ oder dem dritten Theil von 2 Ganzen dividiren, Folglich iſt der Quotient $\frac{4}{10}$ nur der dritte Theil vom wahren Quotienten. Daher muß man ihn 3mal nehmen, oder mit 3 ganzen multipliciren, folglich wär

$\frac{4}{10} \times 3 = \frac{12}{10}$. (§. 137.) Aber eben diß wird ja durchs Umkehren des Diviſors und die darauf folgende Multiplication erhalten, folglich geben die vorgeſchriebene Regeln den wahren Quotienten. In Buchſtaben wår der Beweiß folgender. Es ſeye wie (§. 138.) $\frac{c}{d} = x$ und $\frac{m}{n} = y$ ſo iſt gewiß $\frac{c}{d} : \frac{m}{n} = \frac{y}{x}$ Weil alſo

$$\frac{c}{d} = x \quad \text{und} \quad \frac{m}{n} = y$$ ſo wår

$$\times d \qquad\qquad \times n$$

$$c = dx \qquad\qquad m = ny$$ (§. 63. u. §. 123. Nr. 18.)

Folglich da $m = ny$
$c = dx$

Auch $\frac{m}{c} = \frac{ny}{dx}$ (§. 63.) und $\times\ d$

$$\frac{dm}{c} = \frac{ny}{x}$$ ingleichem $(: n)$

$$\frac{dm}{cn} = \frac{y}{x}$$ (§. 63. u. §. 123. Nr. 11. 14. 15. 18.)

Nun war $\frac{c}{d} : \frac{m}{n} = \|$ folglich

$$\frac{c}{d} : \frac{m}{n} = \frac{dm}{cn}$$ (§. 62.)

Oder der Quotient, wird durch die gegebene Vorſchrift richtig gefunden.

§. 141.

Ganze mit Brüchen zu dividiren.

Auflöſung und Beweiß.

Man verwandle die Ganzen in einen Bruch von unbeſtimmtem Nenner, (§. 124. Nr. 1.) und dividire nach (§. 140.) Z. E.

$\frac{2}{3} : 5$ ſtünde $\frac{3}{2} \times \frac{5}{1} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ oder $\frac{m}{n} : b$ wär $\frac{n}{m} \times \frac{b}{1} = \frac{bn}{m}$.

Zuſatz 1.

Vermiſchte Zahlen werden in uneigentliche Brüche, unreine Brüche in reine Brüche, verwandelt. (§. 125 und 136.) und alsdenn nach §. 139. 140. und 141. bearbeitet.

Zuſatz 2.

Wenn der Diviſor nach (§. 140.) umgekehrt iſt, ſo kann man wo es möglich, nach (§. 138.) vorhin die Zähler und Nenner gegen einander aufheben. Z. E. $\frac{4}{15} : \frac{16}{45}$ wär $\frac{15}{4} \times \frac{16}{45}$ oder $\frac{1}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Zuſatz 3.

Da man durch die Diviſion ſucht, wie oft der Diviſor in der Dividende ſteckt (§. 54. Z. 1.) und $\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{4}$ gewiß 2mal enthalten iſt, ſo kann gar wohl der Quotient gröſſer als der Diviſor oder Dividende ausfallen.

Zuſatz 4.

Wenn 2 Brüche mit einander multiplicirt und durch einen dritten dividirt werden ſollen, ſo giebt Zuſatz 2, verbunden mit §. 138. Z. 2.) eine vortrefliche leichte Abkürzung. Z. E.
$\frac{2}{3} : \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} = \frac{3}{2} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} = \frac{1}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{15}{16} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Wird in der Regel de Tri ſehr wichtig.

§. 142.

Zu finden was für ein Bruch oder Theil eine benannte geringere Sorte, von einer gröſſern ſey.

Auflöſung und Beweiß.

Man mache die geringere Sorte zum Zähler, und die Summe der Theile, welche auf die verlangte gröſſere gehen, zum Nenner. Z. E. 11 kr. ſind $= \frac{11}{60}$ fl. 9 Batzen $= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ fl. 13 Loth $= \frac{13}{32}$ Pf. welches aus dem Begriff des Ganzen und der Brüche klar iſt.

Anmerkung.

Aufgaben und Anwendung der Diviſion der Brüche ſiehe M. A. p. 73. Erläuterung und Erweiterung der Theorie findet, der Schwächere, in Häſelers Anfangsgründen, der ſtärkere in Lamberts Beyträgen zur Mathematick.

IV. Abſchnitt.

Von den Dignitäten und dem Wurzel Ausziehen.

§. 143.

Was ſind Dignitäten und Wurzeln, was für Zeichen gebraucht hier die Mathematick, wie werden Dignitäten und Wurzeln eingetheilt, wie laſſen ſich vieltheilige Wurzeln in 2 theilige verwandlen, aus was für Theilen beſtehen die niedere Dignitäten 2 theiliger Wurzeln, wie laſſen ſich 2 theilige Wurzeln leicht zu ihren niedern Dignitäten erheben, wie kann diß bey vieltheiligen Wurzeln geſchehen, wie zieht man Wurzeln aus den niedern Dignitäten? Die Beantwortung dieſer Fragen ſoll der gegenwärtige Abſchnitt enthalten.

§. 144.

Eine Dignität iſt das Produckt einer jeden ein oder etlichemal in ſich ſelbſt multiplicirten Gröſſe. Die Erſte Dignität einer jeden Gröſſe iſt ihr Produckt in 1. (§. 85. Z. 5.) die 2te Dignität iſt ein Produckt aus der erſten Dignität in die erſte. Die 3te Dignität ein Produckt aus der erſten in die 2te, Die 4te Dignität ein Produckt aus der erſten in die dritte Dignität ꝛc. Z. E. $a \times 1 = a^1$, $a^1 \times a^1 = a^2$, $a^2 \times a^1 = a^3$, $a^3 \times a^1 = a^4$ ꝛc. (§. 91.) Und die erſte Dignität heißt die Wurzel der übrigen

welche aus ihr entſpringen. So iſt z. E. a die Wurzel von a^2, a^3, a^7 ꝛc. und 4 Wurzel aus 16 aus 64 aus 256 ꝛc. Will man die Dignität allgemein ausdrücken, ſo zeichnet man ſie nach (§. 91.) a^n, b^n, c^r. ꝛc. ꝛc.

Anmerkung.

Die 2te Dignität nennt man auch das Quadrat, die 3te den Cubus, die 4te das Biquadrat einer Gröſſe und ihre Wurzeln, Quadrat, Cubick, Biquadrat Wurzeln. Von ihren ſchweren, faſt nicht mehr gebräuchlichen aus dem Arabiſchen und Italieniſchen entlehnten Namen, unten im letzten Abſchnitt.

Zuſatz 1.

Folglich ſind, alle Dignitäten, die 1te ausgenommen, Producte aus lauter gleichen Facktoren.

Zuſatz 2.

Die Wurzel iſt immer der einfache Facktor aus welchem die Dignität entſprang.

Zuſatz 3.

Der Exponent beſtimmt die Menge dieſer gleichen Facktoren, oder wie oft die gegebene Gröſſe mit ſich ſelbſt multiplicirt worden, daher ſein Name Exponent. (§. 91.)

Zuſatz 4.

Da ſich jedes Product durch ſeine Facktoren dividiren läßt, (§. 54. Zuſ. 4.) ſo kann man auch aus jeder Dignität die erſte, oder die Wurzel finden, wenigſtens ſich dieſelbige denken.

Will.

Willkührlicher Satz.

§. 145.

Man bezeichne die Wurzeln durch diß Zeichen $\sqrt{}$, nur beſtimme man durch kleine, zwiſchen die Arme des Wurzelzeichens geſetzte Zahlen oder Buchſtaben, von welcher Dignität die Wurzel seyn ſoll. Z. E. $\sqrt[2]{a^2} = a$ und $\sqrt[2]{a^4} = a^2$, $\sqrt[3]{x^9} = x^3$, $\sqrt[m]{a^m} = a$, $\sqrt[3]{64} = 4$ ꝛc.

§. 146.

Die Wurzel kann auch ein Bruch seyn, und dann iſt auch die Dignität ein Bruch. Z. E. $\frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$ und $\frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$ dann $\frac{2^2}{3^2} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$, ſo wäre $\frac{a}{b}$ zur 4ten Dignität erhoben $= \frac{a^4}{b^4}$ oder zur m ten Dignität $= \frac{a^m}{b^m}$. Folglich iſt auch die Wurzel eines Bruchs wieder ein Bruch, der zum Zähler die Wurzel des Zählers und zum Nenner die Wurzel des Nenners der gegebenen Dignität hat. Z. E. $\sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{4}{6}$ und $\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$. Soll aber die Wurzel ent-

weder aus dem Zähler oder aus dem Nenner allein gezogen werden, ſo ſteht im 1ten Fall das Wurzelzeichen nur beym Zähler, im andern nur beym Nenner der Dignität. Z. E. $\sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{4}{36}$ oder $\frac{16}{\sqrt{36}} = \frac{16}{6}$, $\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{a}{b^{\frac{m}{m}}}$ ꝛc.

Anmerkung.

Um die Quadratwurzel anzuzeigen, ſchreibt man gar nichts ins Wurzelzeichen. Z. E. $\sqrt[2]{a^2} = \sqrt{a^2}$.

§. 147.

Soll eine zuſammengeſetzte Gröſſe bloß durch Zeichen zu einer verlangten Dignität erhoben werden, ſo ſchließt man ſie in Klammern ein und ſetzt den Exponenten an ſeine gewöhnliche Stelle. Z. E. a + b — c zur 4ten oder auch nten Dignität. $(a + b - c)^4$ oder $(a + b - c)^n$. Und wenn die Wurzel einer ſolchen Gröſſe nach (§. 145.) ausgedruckt wird, ſo muß der Arm des $\sqrt{}$ ſich ſo weit erſtrecken, als die eingeklammerte Gröſſe geht, Z. E. $\sqrt[3]{(c+x-3y)}$ und $\sqrt[m]{(2+3-5)} + 7$.

§. 148.

Eintheilige (monomiæ.) Wurzeln heiſſen die, welche einfache Grössen ſind (§. 34. 37. 76.) Vieltheilige (polynomiæ) wenn es zuſammengeſetzte Grössen ſind (§. §. cit.) Inſonderheit zweytheilige (binomiæ) wenn ſie aus 2, dreytheilige (trinomiæ) wenn ſie aus 3 einfachen Grössen zuſammengeſetzt werden. So könnte man auch den Dignitäten, die Namen ihrer Wurzeln, von welchen ſie entſtehen, beylegen.

§. 149.

Eine Wurzel iſt rational wenn ſie von ihrer Dignität ein vollkommner Theil iſt, im Gegentheil irrational. (§. 119. Nr. 12.) $3 = \sqrt[3]{27}$ iſt eine rationale, $\sqrt[2]{5} = 2$ ꝛc. eine irrationale Wurzel.

§. 150.

Negative Dignitäten mit geraden Exponenten ſind unmöglich.

Beweiß.

Dann die Facktoren ſind entweder + oder — und in beyden Fällen iſt die Dignität + z. E. $a \times a \times a \times a = a^4$ und — a in der 4ten Dignität $= -a \times -a \times -a \times -a = +a^4$.

§. 151.

Negative Dignitäten mit ungeraden Exponenten ſind möglich.

Beweiß.

Denn — a in der 3ten Dignität iſt $= -a \times -a \times -a = -a^3$ ꝛc.

Zuſatz.

Folglich ſind alle Wurzeln negativer Gröſſen, welche gerade Exponenten haben, unmögliche Gröſſen, und wenn man ſie doch durch Zeichen ausdrückt, heiſſen ſie Eingebildete Wurzeln (imaginariæ) z. E. $\sqrt{-16}$, dann ſie iſt entweder $+4$ oder -4. In dieſem Fall aber keines von beyden (§. 150.) folglich iſt $\sqrt{-16}$ eine unmögliche, eine eingebildete Wurzel. Hingegen $\sqrt[3]{-64}$ iſt entweder -4 oder $+4$ (§. 151.) folglich ſind Wurzeln von negativen Gröſſen mit ungeraden Exponenten möglich. Man verwechsle dieſen Ausdruck ja nicht mit falſchen und wahren Wurzeln, wovon die Algebra ſpricht.

§. 152.

Es giebt demnach auch vollkommne und unvollkommne, mögliche und unmögliche Dignitäten (§. 149. 150. 151.) Die Erklärungen flieſſen aus den §. §. cit.

§. 153.

Eine jede, ſowohl Ein als vieltheilige Wurzel läßt ſich, in eine ihr gleiche zweytheilige verwandeln.

Beweiß.

Dann $625 = 620 + 5$ und $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $a + b - c = (a+b) - c$ und $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ (§. 61.)

§. 154.

Eine jede Wurzel in eine zweytheilige zu verwandlen.

Auflöſung und Beweiß.

1) Von den vieltheiligen ſchneide man in Zahlen, die Einheiten; in Buchſtaben, die letzte rechter Hand ſtehende einfache Gröſſe ab und mache dieſe zum 2ten, die übrigen zum 1ten Theil.

2) Iſt ſie eintheilig, ſo zerfällt man ſie in Poſten. (153.) Z. E. $3 = 2 + 1$, $\frac{5}{7} = \frac{2}{7} + \frac{3}{7}$, $5a = 3a + 2a$.

3) Wären in Zahlen keine Einheiten oder Zehner vorhanden, ſo nehme man ein oder etliche Einheiten vom Ganzen und mache ſie zum 2ten, den Reſt zum 1ten Theil. Z. E. $300 = 390 + 10$ ꝛc oder $399 + 1$ oder $380 + 20$.

Zuſatz.

Was demnach von zweytheiligen Wurzeln erwieſen wird, läßt ſich auf alle vieltheilige anwenden.

Willkührlicher Satz.

§. 155.

Den erſten Theil einer jeden Wurzel wollen wir gewöhnlich a, den 2ten b nennen.

Zuſatz 1.

Folglich wird a + b und a — b alle mögliche Wurzeln vorſtellen, und $(a \underline{+} b)^2$, $(a \underline{+} b)^3$, $(a \underline{+} b)^4$ wird alle mögliche Quadrate, Cubos und Biquadrate ausdrücken. (§. 144. Anmerk.)

Zuſatz 2.

In dieſen Ausdrücken kann a gar wohl 2, 3, 4 oder mehrere Zahlzeichen, von ſehr verſchiedenen Ordnungen, auf einmal enthalten (§. 154. Nr. 3)

Anmerkung.

Uns kürzer ausdrücken zu können, wollen wir die 4 erſten Dignitäten die niedern die übrigen die höhern Dignitäten nennen.

§. 156.

Alle Quadrate von zweytheiligen Wurzeln beſtehen

1) Aus dem Quadrat des erſten Theils,

2) Aus dem doppelten Produckt beyder Theile in einander,

3) Aus dem Quadrat des zweyten Theils der Wurzel.

Beweiß.

Denn $(a + b) \times (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a - b) \times (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$ (§. 92. Nr. I. und II.)

Zuſatz.

Wenn beyde Theile der Wurzel poſitiv ſind, ſo ſind auch alle Theile des Quadrats poſitiv. Iſt aber der 2te Theil der Wurzel negativ, ſo iſt auch der 2te Theil des Quadrats negativ, der 3te aber immer poſitiv. (§. 150.)

§. 157.

Der Cubus einer jeden zweytheiligen Wurzel beſteht aus 4 Theilen:

1) Aus dem Cubus des 1ten Theils.

2) Aus dem dreyfachen Produckt des Quadrats des 1ten Theils in den 2ten.

3) Aus dem dreyfachen Produckt des 1ten Theils ins Quadrat des 2ten.

4) Aus dem Cubus des 2ten Theils.

Beweiß.

Dann $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ und $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (§. 92. Nr. IV. und §. 144.)

Zuſatz

Wenn alle Theile der Wurzel poſitiv ſind, ſo ſind auch alle Theile des Cubus poſitiv. Iſt aber in der erſtern, der letzte Theil negativ, ſo iſt der 1te Theil des Cubus poſitiv, der 2te negativ, der 3te abermal poſitiv und der 4te wieder negativ.

§. 158.

Alle Biquadrate 2 theiliger Wurzeln beſtehen aus 5 Theilen, nemlich

1) Aus dem Biquadrat des 1ten Theils.

2) Aus dem 4 fachen Produckt des Cubus des 1ten Theils in den 2ten.

3) Aus dem 6 fachen Produckt des Quadrats eines jeden Theils in den andern.

4) Aus dem 4 fachen Produckt des 1ten Theils in den Cubus des 2ten.

5) Aus dem Biquadrat des 2ten Theils.

Beweiß.

Denn $(a + b)^4$ oder $(a - b)^4$ wirklich zum Biquadrat gemacht iſt = das 1te $(a^3 + 3a^2b$

$+ 3 a b^2 + b^3) \times (a + b) = a^4 + 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 ab^3 + b^4$ und das 2te $= (a^3 - 3 a^2 b + 3 ab^2 - b^3) \times (a - b) = a^4$ $4 a^3 b + 6 a^2 b^2 - 4 ab^3 + b^4$ (§. 144.) Die Beſchaffenheit der Zeichen eines jeden Theils zeigt der Ausdruck in Buchſtaben.

§. 159. Anmerkung 1.

Dergleichen in den Beweiſſen der §. §. 156. 157. und 158. durch Buchſtaben ausgedruckte Lehrſätze ſowohl, als die auf eine ähnliche Art ausgedruckte Regeln für Aufgaben, nennt man Formeln. Sie beweiſſen am deutlichſten den groſſen Nutzen der Buchſtabenrechnung und wer dieſe verſtanden hat, wird ſie leicht durch Worte ausdrücken können, aber auch die wenige Zeichen gewiß leichter im Gedächtnuß behalten, als die weitläuftige Worte, ja wenn ſie vergeſſen werden, ſchnell wieder verfertigen können.

Anmerkung 2.

Auf eine ähnliche Art lieſſen ſich Formeln für alle höhere Dignitäten finden (§. 144.) Die Abſicht dieſes Lehrbuchs bleibt bey den niedern ſtehen und erklärt nur das nöthigſte von ihnen, um ſo mehr, da die Algebra weit leichtere Kunſtgriffe, die Eigenſchafften der höheren zu entdecken, lehret, dann ihr gehört eigentlich der allgemeine Newtoniſche Satz. von den Binomiſchen Wurzeln.

§. 160.

Eben ſo leicht laſſen ſich die Beſtandtheile aller vieltheiligen niedern Dignitäten erfinden, wenn ſie

vorhin (§. 154.) in 2 theilige verwandelt werden; z. E. von a + b + c das Quadrat.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$
$$2\,(a + b) \times c = 2ac + 2\,bc$$
$$c^2 = c^2 \quad \text{daher}$$

$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2\,ac + 2\,bc + c^2$ demnach beſtünde das Quadrat einer 3 theiligen Wurzel aus

1) Dem Quadrat eines jeden Theils,

2) Dem doppelten Produckt eines jeden Theils in den andern. Bey Cubis und Biquadraten kann man das ähnliche zeigen.

§. 161.

Eine jede Wurzel zu einer beliebigen niedern Dignität erheben.

Aufloͤſung und Beweiß.

1) Iſt ſie eintheilig, ſo giebt man ihr den Exponenten der verlangten Dignität (§. 144.) z. E. a zum Cubus erhoben $= a^3$ zum Biquadrat $= a^4$ weil aber $a^4 = a^3 \times a$ (§. cit. aber auch $a^4 = a^2 \times a^2$ (§. 91. z. 3.) ſo wird auch das Biquadrat einer Wurzel gefunden, wenn man ihr Quadrat mit ſich ſelbſt multiplicirt. z. E. $4^2 = 16$ und $16 \times 16 = 256 = 4^4$.

2) Iſt ſie 2 theilig, ſo wende man die (§. 156. 157. 158.) gefundene Formeln an. Z. E. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ und $(m-n)^3 = m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$ oder $(c+y)^4 = c^4 + 4c^3y + 6c^2y^2 + 4cy^3 + y^4$ Oder in Zahlen ſeye $a+b = 34 = 30 + 4$ ſo wäre

$$a^2 = 30 \times 30 = 900$$
$$2ab = (30 \times 4)2 = 240$$
$$b^2 = 4 \times 4 = 16$$ daher nun

$$a^2 + 2ab + b^2 = 34^2 = 1156$$

Und eben ſo würde die 3te und 4te Dignität von 34 gefunden.

3) Wäre die Wurzel 3 ja vieltheilig, ſo giebt (§. 160.) die Regeln. Z. E. $(a+x+y)^2$ iſt $= a_2 + 2ax + x^2 + 2ay + 2xy + y^2$ Oder in Zahlen $304^2 = (300+4)^2$ daher

$$a^2 = 300 \times 300 = 90000$$
$$2ab = (300 \times 4) \times 2 = 2400$$
$$b^2 = 4 \times 4 = 16$$ folglich

$$(a+b)^2 = 304^2 = 92416$$

Das nemliche geſchieht beym Erheben zur 3ten und 4ten Dignität.

§. 162.

Dieſe, obſchon abgekürzte Methode iſt noch immer beſchwerlich. Ein bequemers Mittel, eine jede

Gröſſe zu einer beliebigen niedern Dignität zu erheben, läßt ſich aus folgenden Sätzen herleiten. Die Differenz 2er Quadrate, derer Wurzeln nur um 1 verſchieden ſind, iſt = der doppelten kleinern Wurzel + 1.

Beweiß.

Es ſeye die kleinere Wurzel = a ſo iſt die Gröſſere = a + 1

folglich $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1)$ §. 161.
und $a^2 = a^2$ folglich

$$(a+1)^2 - a^2 = 2a + 1.$$

§. 163.

Die Differenz 2er Cuborum derer Wurzeln nur um 1 verſchieden ſind, iſt gleich: Dem 3 fachen Quadrat der kleinern Wurzel + der 3 fachen kleinern Wurzel + 1.

Beweiß.

Die Benennung bleibe wie (§. 162.) ſo iſt

$(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1)$ §. 161.
und $a^3 = a^3$ folglich

$$(a+1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1.$$

§. 164.

Und die Differenz 2er Biquadrate, derer Wurzeln nur um 1 verſchieden ſind, iſt = dem 4 fachen Cu-

bus der kleinern Wurzel, + dem 6 fachen Quadrat derſelben, + der 4 fachen kleinern Wurzel + 1.

Beweiß.

Denn auch hier iſt nach (§. 162. und 161.)

$$(a + 1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 \text{ und}$$
$$a^4 = a^4 \quad \text{folglich}$$

$$(a+1)^4 - a^4 = 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1.$$

§. 165.

Eine jede Zahl, wenn die niedern Dignitäten, der unmittelbar vor ihr hergehenden kleinern Zahl gegeben ſind, leicht zu einer beliebigen niedern Dignität zu erheben.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man ſuche nach (§. 162. 163. oder 164.) die Differenz der gegebenen und zu findenden Dignität.

2) Addire dieſe Differenz zur gegebenen Dignität, ſo hat man die geſuchte.

Es ſeye $a = 1000$ ſo iſt $a^2 = 1000000$ und
$a + 1 = 1001$ folgl. $2a+1 = 2001$ daher §. 162.

$$(a+1)^2 = 1001^2 = 1002001$$

deßgleichen

a^3	=	1000000000
$3a^2$	=	3000000
$3a$	=	3000
1	=	1 alſo §. 163.)

$(a+1)^3 = 1001^3 = 1003003001$

Zuſatz.

Man kann alſo die Quadrate aller Zahlen durch bloſſes Addiren, aus dieſen aber, durch eine ſehr leichte Multiplication alle Cubos der nemlichen Zahlen, und aus dieſen, wenn es nöthig iſt, eben ſo alle Biquadrate finden. Wolf hat die Quadrate und Cubos in ſeinen Sinus Tafeln von 1—1000, Büchner biß auf 12000 geliefert. Da man aber die letztern, wegen vielen Fehlern, ohne gänzliche Verbeſſerung, nicht ſicher brauchen kann, ſo iſts zwar ein mühſames, aber gewiß nicht elendes Geſchäfte, wenn ſich jemand die Mühe giebt, ſie genau zu berechnen.

§. 166.

Aus einer gegebenen Gröſſe die **Wurzel** ziehen heißt: Sie als eine Dignität anſehen, und aus ihr eine andere Gröſſe erfinden, welche die gegebene Gröſſe entweder ganz, oder beynahe wieder hervor bringt, wenn man ſie zu der angenommenen Dignität erhebet.

Z. E. $\sqrt[2]{a^2} = a$ denn $a \times a = a^2$ und $\sqrt[3]{64} = 4$ denn $4 \times 4 \times 4 = 64$ und $\sqrt[m]{a^m} = a$, $\sqrt[4]{x^4} = x$.

§. 167.

Alle monomiſche Wurzeln der niedern Dignitäten zu finden.

Aufloͤſung und Beweiß.

1) Man dividire den Exponenten der Dignität, durch den Exponenten der verlangten Wurzel, der Quotient iſt Exponent der geſuchten Wurzel. (§. 166.) und (§. 91. Zuſ. 1.) Z. E. $\sqrt[2]{a^2} = a^{2:2} = a^1 = a$; $\sqrt[3]{a^3} = a^{3:3} = a$, $\sqrt[2]{a^4} = a^{4:2} = a^2$, $\sqrt[m]{a^n} = a^{n:m}$ und $\sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{a^1} = a^{1:2} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[r]{x} = \sqrt[r]{x^1} = x^{1:r} = x^{\frac{1}{r}}$ Oder man bediene ſich bey irrationalen Dignitäten auch nur des bloſſen Wurzelzeichens Z. E. aus a^5 wär $\sqrt[4]{} = \sqrt[4]{a^5}$.

2) Sinds Zahlen, ſo verfertiget man ſich eine Tabelle für alle niedere Dignitäten, aller einfachen ganzen Zahlen. Die Quadrate geben ſich aus dem Einmal Eins, die Cubi und Biquadrate werden nach (§. 161.) gefunden.

Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi.	1	8	27	64	125	216	343	512	729
Biquadrate.	1	16	81	256	615	1296	2401	4096	6561

Aus dieſer finden ſich nun, alle monomiſche Wurzeln, vollkommener niederer Dignitäten ohne Mühe. Bey den unvollkommenen hilft einſtweilen das Wurzelzeichen. Z. E. $\sqrt[3]{}$ aus 17 iſt $\sqrt[3]{17}$. Dann wir werden erſt unten ſehen, wie man dergleichen unvollkommene Dignitäten genauer bearbeitet.

§. 168.

Binomiſche Wurzeln aller niedern Dignitäten auszuziehen.

Aufloſung und Beweiß.

Iter Fall. Sinds allgemeine Gröſſen, ſo iſt die Dignität entweder vollkommen oder nicht. (§. 152.) Iſts letztere, ſo bedient man ſich entweder bloß der Wurzelzeichen Z. E. $\sqrt[2]{}$ aus a+b iſt $= \sqrt[2]{(a+b)}$ überhaupt $\sqrt[m]{(a+b)}$ (§. 147.) Oder man will die Wurzel wirklich ausziehen. Diß wird theils weiter unten gezeigt, theils gehört es in die Algebra. Zur gegenwärtigen Abſicht, iſt die erſte Methode, die Quadratwurzeln ausgenommen, aller Orten hinreichend. Iſts aber eine vollkommene Dignität, ſo verfährt man nach folgenden Regeln.

a) Aus einem vollkommenen Quadrat die Quadratwurzel ziehen.

1) Man ordne das Quadrat nach (§. 108.)

2) Suche das Quadrat des 1ten Theils und ſeine Wurzel (§. 167. Nr. 1.)

3) Die Wurzel kommt in die Stelle des Quotienten und das Quadrat wird von der Dignität abgezogen.

4) Den gefundenen 1ten Theil nehme man doppelt und dividire damit in den Reſt Nr. 3. ſo findt ſich der 2te Theil (§. 156.) welcher, neben den 1ten, in die Stelle des Quotienten geſetzt wird.

5) Mit dieſem multiplicirt man den doppelten 1ten Theil und ſetzt das Produckt unter den Reſt Nr. 3. auch

6) Neben daſſelbe das Quadrat des Nr. 4 gefundenen 2ten Theils.

7) Beyde Nr. 5. und 6. gefundne Gröſſen zieht man ab, und nun muß nichts übrig bleiben. (§.156.)

Z. E.

$$\begin{array}{r|l} a^2 + 2ab + b^2 & a + b \\ a^2 & \\ \hline 2a : + 2ab + b^2 & \\ + 2ab + b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

b) Aus einem vollkommenen Cubus die Cubickwurzel ziehen.

1) Ordnet den Cubus wie bey Nr. a.

2) Sucht den Cubus des 1ten Theils ingleichem ſeine Wurzel. (§. 167. 1.)

3) Verfahrt mit dieſem wie bey Nr. a, 3. Nur muß hier der Cubus abgezogen werden.

4) Quadrirt den 1ten Theil, nehmt das Quadrat 3 fach und dividirt damit in den N. 3. gefundenen Reſt, ſo giebt der Quotient den 2ten Theil, welcher, neben den erſten, in die Stelle des Quotienten geſetzt wird.

5) Mit dieſem multiplicirt man das Nr. 4. gefundene 3 fache Quadrat des 1ten Theils.

6) Quadrirt den 2ten Theil, multiplicirt ſein Quadrat mit dem 1ten Theil, diß Produckt mit 3 und ſetzt es neben das Produckt Nr. 5.

7) Cubirt den 2ten Theil und ſetzt ihn neben das Produckt Nr. 6.

8) Zieht dieſe 3 (Nr. 5. 6. und 7.) gefundne Produckte, vom ganzen Nr. 3. erhaltenen Reſt ab, ſo muß nichts übrig bleiben. (§. 157.) Z. E.

$$\begin{array}{l|l}
\quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 & a - b \\
\quad a^3 & \\
\hline
3a^2 : -3a^2b + 3ab^2 - b^3 & \\
\qquad\; \underline{-3a^2b + 3ab^2 - b^3} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

c. Wer Nr. a. und b. nebſt §. 158. verſtanden hat, kann ſich nun leicht die Regeln zu Ausziehung der Biquadratwurzel, aus einem vollkommenen Biquadrat, bilden. Z. E.

$$\begin{array}{l|l}
\quad a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 & a + b \\
\quad a^4 & \\
\hline
4a^3 : + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 & \\
\qquad\; \underline{+ 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

IIter Fall. In Zahlen finden, bey binomiſchen Wurzeln, vollkommen die nemliche Regeln ſtatt. Nur machen die Stellen, in welchen die einzelne Theile der Dignitäten anzutreffen ſind, die meiſten Schwierigkeiten. Will man alles aufs ſchärfſte entwickeln, ſo ſtößt man auf Schwierigkeiten und Weitläuftigkeiten, die die Kräften der meiſten Anfänger überſteigen, die ſelbſt ein Käſtner und ſein Commentator Müller nicht vermeiden konnten. (Man ſehe des Erſtern Anfangsgründe der Arithmetick und des letztern Erläuterung der Regeln, Quadrat und Cubickwurzeln auszuziehen.) Ich wähle daher die Mittelſtraſſe zwiſchen der bloß pracktiſchen nnd äuſſerſt ſcharfen Methode, um meine Zuhörer wenigſtens in Stand zu ſetzen, durch eigenen Fleiß, beyde angeführte gründliche Schriften völlig zu verſtehen.

a. Eine binomiſche rationale Quadratwurzel auszuziehen.

1) Die Quadrate aller einfachen Zahlen überſteigen nie die 1te Ordnung. Denn das kleinſte iſt = 1 das größte = 81.

2) Kein Quadrat einer binomiſchen Wurzel wird unter der 2ten, oder über der 3ten Ordnung gefunden. Dann die kleinſte binomiſche Wurzel iſt = 10 und 10^2 = 100 die größte = 90 und 90^2 = 8100.

3) Folglich hat kein monomiſches Quadrat über 2, aber auch kein binomiſches unter 3 und über 4 Ziffern. (§. 84. und §. 85. Zuſ. 1, 2. und 3.)

4) Eine jede Binomiſche Quadratzahl, kann alſo füglich in Claſſen, von der Rechten zur Linken, ſo getheilt werden, daß jede Claſſe zwo Zahlen ererhält, doch die letzte Claſſe zur Linken kann auch nur aus einer Ziffer beſtehen Nr. 1.

5) In der erſten Claſſe zur Linken iſt das Quadrat der Zehner oder a^2 d. i. der 1te Theil, in der andern aber, das Quadrat der Einheiten oder b^2 = dem 2ten Theil enthalten. Dann es ſeye z. E. nach (§. 161. Nr. 2.) die binomiſche Wurzel = 34 = 30 + 4 ſo iſt $(30+4)^2$ = 900 + 240 + 16 = 1156 und hier iſt gewiß in 11 | 56 | in der erſten Claſſe 1100, a^2 = 900 und in der letzten 56; b^2 = 16 enthalten.

6) Nun kann 2 ab oder das Produckt des doppelten 1ten Theils in den 2ten, nie unter die erſte Ordnung herab aber auch nie über die 3te hinaufſteigen (§. 85. Zuſ. 2.) Es ſeye a und b ſo klein als möglich ſo iſts 10 und 1 folglich 2 ab = 20, wiederum ſo groß als möglich, ſo iſts 90 und 9 folglich 2 ab = 2 $\times$ 90 $\times$ 9 = 1620.

7) Daher muß die niedrigſte Ziffer von 2 ab immer in die Stelle der Zehner der 2ten Claſſe von der Linken gegen die Rechte geſetzt werden. D. i. in 11 | 56 | fängt es unter der 5 an.

Auf dieſen Gründen beruhen nun folgende Regeln:

α. Man theile die gegebene binomiſche Quadratzahl in Claſſen, von der Rechten zur Linken, und

gebe jeder Claſſe 2 Zahlen. Die letzte zur Linken kann auch nur eine Zahl haben (Nr. 4.)

β. Suche das nächſte Quadrat zur erſten Claſſe zur Linken, ſchreib es unter dieſelbe, und deſſen Wurzel, nach (§. 167.) in die Stelle des Quotienten, ſo hat man a = dem 1ten Theil der Wurzel. (Nr. 5.)

γ. Man ziehe das Quadrat (Nr. β.) ab und rucke die folgende Claſſe herunter.

δ. Den (Nr. β.) gefundenen 1ten Theil verdopple man, und fange an, diß Produckt, unter die linkerhand ſtehende Zahl der folgenden Claſſe zu ſchreiben. (Nr. 6. und 7. und §. 168. a.)

ε. Dividire mit dieſem Produckt in die darüber ſtehende Zahlen, ſo findt man b = dem 2ten Theil. (Nr. 5. u. §. 168. a.)

ζ. Setze den gefundnen 2ten Theil in die Stelle des Quotienten zum 1ten, aber auch neben das (Nr. δ.) gefundne Produckt und multiplicire ſowohl den Diviſor (Nr. ε.) als den 2ten Theil ſelbſt, mit dem gefundnen 2ten Theil. (Nr. 5. und 6. u. §. 168. a.)

η. Subtrahire diß letzte Produckt, ſo muß kein Reſt übrig bleiben. (Nr. 7. §. 168.) Z. E.

$a^2 + 2ab + b^2$		$a + b$
11	56	34
$a^2 = 9$	00	
$2ab + b^2 = 2$	56	dann $2a = 60$ u. $b = 4$
$2a + b =$	64	
b	4	
$2ab + b^2 = 2$	56	
0	0	

b. Eine binomiſche rationale Cubickwurzel ausziehen.

1) Die Cubi aller Einheiten überſteigen nie die 2te Ordnung (§. 167. 2.) Sie können aber gar wohl in der erſten, oder auch unter den Einheiten angetroffen werden. (§. 167. Nr. 2.)

2) Kein Cubus einer binomiſchen Wurzel wird unter der 3ten aber auch nicht über der 5ten Ordnung gefunden. Dann $10^3 = 1000$ und $90^3 = 729000$

3) Folglich hat kein monomiſcher Cubus unter 3, aber auch kein binomiſcher unter 4 oder über 6 Ziffern. (§. 85. Zuſ. 1. 2. und 3.)

4) Eine binomiſche Cubickzahl kann daher füglich von der Rechten zur Linken in Claſſen getheilt werden, jede Claſſe wird 3 Zahlen enthalten, die letzte zur Linken ausgenommen, welche auch nur 2 oder eine haben kann (Nr. 1.)

5) In der 1ten Claſſe zur Linken iſt a^3 = dem Cubus des 1ten Theils, in der andern b^3 = dem

Cubus des 2ten Theils enthalten. Es ſeye nach (§. 161. Nr. 2.) die Wurzel = 34 = 30 + 4 ſo iſt ihr Cubus 39 | 304 = 27000 + 10800 + 1440 + 64. Und hier iſt gewiß in der 1ten Claſſe 39 | 000 | a^3 = 27000 enthalten, ſo wie in der 2ten 304 gewiß b^3 = 64 ſteckt.

6) Nie kann 3 a^2b unter die 2te Ordnung herab, aber auch nie über die 5te hinauf ſteigen. (§. 85. Zuſ. 2.) Es ſey a und b ſo klein als möglich, folglich 10 und 1; ſo iſt 3 a^2 b = 300 und wiederum ſo groß als möglich, ſo iſts 90 und 9 folglich 3 a^2b = 3 × 8100 × 9 = 24300 × 9 = 218700.

7) Folglich iſt die niedrigſte Ziffer von 3 a^2b immer in die Stelle der Hunderter der 2ten Claſſe, von der Linken gegen die Rechte zu ſetzen. D. i. in 39 | 304 fängt es unter der 3 an.

8) Nie kann 3 ab^2 unter die 1te Ordnung herab, aber auch nie über die 4te Ordnung hinauf ſteigen. (§. 85. Zuſ. 2.) Es ſey a und b wie Nr. 6. = 10 und 1 ſo iſt 3 ab^2 = 30 und wenn es = 90 und 9 iſt, ſo iſt 3 ab^2 = 3 × 90 × 81 = 270 × 81 = 21870.

9) Folglich iſt die niedrigſte Ziffer von 3 ab^2 immer in die Stelle der Zehner der 2ten Claſſe von der Linken gegen die Rechte zu ſetzen, d. i. in 39 | 304 fängt es unter der 0 an. Und auf dieſe Betrachtungen gründen ſich folgende Regeln:

α. Man theile die gegebene binomiſche Cubickzahl in Claſſen wie (Nr. a. α.) nur bekommt hier jede 3 Ziffern, die letzte zur Linken ausgenommen, welche auch 2, oder nur eine haben kann. Nr. 4.

β. Man ſuche den nächſten Cubus zur 1ten Claſſe zur Linken, ſchreib ihn unter dieſelbe und ſeine Wurzel in die Stelle des Quotienten (§. 167.) ſo hat man a = dem 1ten Theil der Wurzel (Nr. 5.)

γ. Dieſen Cubus ziehe man ab und rücke die folgende Claſſe herunter.

δ. Man erhebe den gefundenen 1ten Theil zum Quadrat, multiplicir' es mit 3 und fange das Produckt an unter die letzte, zur Linken ſtehende Zahl, der herabgeruckten Claſſe zu ſchreiben (Nr. 6. und 7. und §. 168. I. b. 4.)

ε. Dividire mit dieſem Produckt in in die darüber ſtehende Zahlen, ſo giebt der Quotient b = dem 2ten Theil der Wurzel (§. 168. I. b. 4.)

ζ. Setze den gefundenen 2ten Theil in die Stelle des Quotienten zum 1ten, multiplicire aber auch mit demſelben den Nr. δ. gefundenen Diviſor (§. 168. I. b. 5.)

η. Erhebe den 2ten Theil zum Quadrat, multiplicire diß mit dem 1ten Theil, das Produckt aber mit 3, und fange diß neue Produckt an unter die

Zehner der 2ten Claſſe zu ſchreiben. (Nr. 9. und §. 168. I. b. Nr. 6.)

ϑ. Endlich cubire man den 2ten Theil und fange ſeinen Cubus an unter die Einheiten der 2ten Claſſe zu ſetzen. (Nr. 5. und §. 168. I. b. 7.)

ι. Dieſe 3. Nr. ζ. η. und ϑ. gefundene Zahlen werden addirt, und von denen Nr. γ. herabgeruckten abgezogen, ſo muß alles aufgehen. (§. 168. I. b. 8.) Z. E.

			a b
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=39$	304		$34=a+b$
$a^3=27$	000		
$3a^2b+3ab^2+b^3=12$	304		
$3a^2=(2$	700		
$b=$	4		
$3a^2b=10$	800		
$3ab^2=1$	440		
$b^3=$	64		
$3a^2b+3ab^2+b^3=12$	304		
0	0		

κ. Eine binomiſche rationale Biquadratwurzel auszuziehen, ſucht man die Gründe auf eine ähnliche Art, wie bey a und b für die Quadrat und Cubickwurzeln. Die Regeln geben ſich durch Hülfe der Formel (§. 158. verbunden mit §. 168. I. c.) Der mündliche Vortrag kann das beygefügte Beyſpiel erläutern, und dem Zuhörer, welcher das vorhergehende verſtanden, die Wiederholung leicht genug machen.

			b a
$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4=$	4978	7136	84
$a^4 =$	4096	0000	$=a$
$4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4=$	882	7136	$+b$
$4a^3=$	(204	8)	
$b=$		4	

$4a^3b =$	819	2
$6a^2b^2 =$	61	44
$4ab^3 =$	2	048
$b^4 =$		256
$4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b4=$	882	7136
	0	0

§. 169.

Polynomiſche Wurzeln aller niedern Dignitäten auszuziehen.

Auflöſung.

Iter Fall. Sinds allgemeine Gröſſen und eine unvollkommene Dignität, ſo verfährt man wie (§. 168. I) Sinds aber vollkommene Dignitäten ſo

1) Wende man die (§. cit. Nr. a. b. c.) gegebene Regeln ſo lange an, biß man die 2 erſten Theile der Wurzel hat.

2) Da ſich nun jede polynomiſche Wurzel in eine binomiſche verwandeln läßt, (§. 153. und 154.) ſo ſehe man die beyde gefundene Theile als den 1ten Theil an, und verfahre wie vorhin, ſo giebt ſich der 3te Theil.

3) Nun ſehe man alle 3. Theile zuſammen als den 1ten an, und ſuche nach Nr. 2. den 4ten Theil ꝛc. Z. E.

$a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$	$a + b + c$
a^2	
$2a : 2ab + b^2$	
$\quad 2ab + b^2$	
$(2a + 2b) : 2ac + 2bc + c^2$	
$\quad 2ac + 2bc + c^2$	
0	

Anmerkung.

Was hier bey dem trinomiſchen Quadrat geſchehen kann auch bey polynomiſchen Quadraten, Cubis und Biquadraten verſucht werden.

IIter Fall. Sinds Zahlen, ſo wendet man wie im Iten Fall aus (§. 168. II.) die Regeln ſo lange an, biß man alle Theile der Wurzel hat. Z. E. bey Quadratzahlen.

				a / a b b
	3 3	9 8	8 9	5 8 3
$a^2 =$	2 5			
$2ab + b^2 =$	8	9 8		
$2a \ + b =$	1	0 8		
$b =$		8		
$2ab + b^2 =$	8	6 4		
$2ab + b^2 =$		3 4	8 9	
$2a \ + b =$		1 1	6 3	
$b =$			3	
$2ab + b^2 =$		3 4	8 9	
0		0		

Und aus 201230056 die Cubick Wurzel

				a a b b
201	230	056		586
$a^3 = 125$				
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$ 76	230			
$3a^2 =$ (7	5)			
$b =$	8			
$3a^2b =$ 60	0			
$3ab^2 =$ 9	60			
$b^3 =$	512			
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$ 70	112			
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$ 6	118	056		
$3a^2 =$ (1	009	2)		
$b =$		6		
$3a^2b =$ 6	055	2		
$3ab^2 =$	62	64		
$b^3 =$		216		
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$ 6	118	056		
0	0			

Das nemliche läßt ſich bey den polynomiſchen Biquadraten anwenden. Nur bemerke man folgenden Vortheil. Da $a^4 = a^2 \times a^2$ ſo iſt auch $a^2 : a^4 = a^2$ folglich wird $\sqrt[4]{a^4}$ gefunden, wenn man aus dem Biquadrat die Quadratwurzel und aus dieſer noch einmal die Quadratwurzel ziehet, in dem $\sqrt[4]{a^4} = a$ aber auch $\sqrt[2]{a^4} = a^2$ und $\sqrt[2]{a^2} = a$.

Zuſatz.

Man ſieht alſo, daß bey jeder polynomiſchen Dignität in Zahlen, die Wurzel ſo viel Zahlen bekomme, als die Dignität Claſſen, erhält. (§. 168. II.)

§. 170.

Wer Wolfens, noch beſſer Büchners Quadrat und Cubicktafeln hat, (§. 165. Zuſ.) kann ſich bey polynomiſchen Quadrat und Cubickzahlen, ja ſo gar bey Biquadraten (§. præced. Zuſ.) eine groſſe Erleichterung verſchaffen.

1) Denn alle trinomiſche Wurzeln ſtehen ſchon ausgezogen in den Wolfiſchen, und alle unter 12000 in den Büchneriſchen.

2) Iſt die Wurzel polynomiſch, ſo ſucht man die Ziffern der 3 letzten Claſſen zur Linken, in den Wolfiſchen Tafeln auf, zieht das dazu gehörige Quadrat, von dieſen 3 Claſſen ab, und die neben demſelben in den Tafeln ſtehende Zahlen ſind die 3 erſten Theile der Wurzel. (§. 169.)

3) Iſt die Wurzel $>$ 12000 ſo finden ſich auf eine ähnliche Art, aus den Büchneriſchen Tafeln, immer die 4 erſten Theile aller Wurzeln, wenn die 4 letzten Claſſen zur Linken nicht über 144000000 Millionen betragen. Z. E. die $\sqrt{100440484}$ nach den Wolfiſchen Tafeln.

Hier iſt von 10044 die nächſte Wurzel 100 daher

1	00	44	04	84	10022
1	00	00			
		44	04		
		20	02		
		40	04		
		4	00	84	
		2	00	42	
		4	00	84	
			0		

Hier durften alſo nur die 2 letzten Ziffern nach §. 169. geſucht werden.

§. 171.

Die Wurzeln unvollkommner Dignitäten ſind irrational (§. 149. und 152.) Z. E. $\sqrt{7}$ iſt $= 2$, allein in denen übrig bleibenden 3 ſtecken noch zur Wurzel gehörige Theile. Dieſe ſind keine Einheit. Dann man ſetze $\sqrt{7} = 3$ ſo wär $3^2 = 9$, und fehlt alſo zur erſten Wurzel 2, weniger als 1 d. i. ein Bruch. Aber auch dieſer läßt ſich in Zahlen nicht genau beſtimmen. Denn wenn er ſich beſtimmen lieſſe, ſo müßte das Quadrat der Wurzel als einer vermiſchten Zahl wieder $= 7$ werden, oder das Quadrat eines uneigentlichen Bruchs, deſſen Nenner im Zähler nicht aufgienge, müßte ein Bruch werden, deſſen Nenner im Zähler aufgienge. Geſetzt $\sqrt{7}$ wär $= 2\frac{1}{2}$ ſo müßte $\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} =$ ſeyn 7, da es doch nur $6\frac{1}{4}$ iſt. Folglich läßt ſich die Wurzel einer unvollkommenen Dignität weder durch Ganze noch durch Brüche genau beſtimmen, oder ſie iſt irrational, indem der nemli-

che Beweiß mit kleinen Veränderungen auf alle Dignitäten paßt.

§. 172.

Doch laſſen ſich irrationale Wurzeln ſo genau finden, als man ſie immer zur Ausübung nöthig hat.

Beweiß.

Dann man kann ja den übrig bleibenden Reſt in 10tel 100tel, 1000tel, 10000tel ꝛc. Millionſtel, Billionſtel, verwandeln (§. 124.) und alsdann die Wurzel aus dieſem Bruch ziehen (§. 146) So wär z. E. $\sqrt{7} = 2$ allein es bleiben 3 übrig. Nun ſind $7 = \frac{700}{100}$ und $\sqrt{\frac{700}{100}} = \frac{26}{10} = 2\frac{6}{10}$ beynahe. Eben ſo wär $\sqrt[3]{9}$ in Ganzen $= 2$ und 1 bliebe übrig. Weil aber $9 = \frac{9000000}{1000000}$ und $\sqrt[3]{\frac{9000000}{1000000}} = \frac{208}{100} = 2\frac{8}{100}$ beynahe, ſo iſt $\sqrt[3]{9}$ ſchon um $\frac{8}{100}$ genauer gefunden.

§. 173.

Diß Ausziehen der Wurzeln aus unvollkommenen Dignitäten, wodurch man der wahren Wurzel immer näher kommt, ohne ſie jemals ganz zu erreichen, nennt man: das Finden der Wurzel durch Annäherung. Für allgemeine Gröſſen ſorgt die Algebra auf eine ähnliche Art. Ich ziehe aus den vorigen §. folgende Schlüſſe, um die Regeln deſto leichter für Zahlen geben zu können.

1) Je mehr Nullen an die unvollkommene Dignität gehänget werden, deſto näher kommt man der wahren Wurzel.

2) An ſich iſts vollkommen gleichgültig, mit was für einer Zahl man den Reſt multiplicirt, wenn nur die nemliche Zahl zum Nenner des Bruchs gemacht wird.

3) Weil aber 10, 100, 1000 ꝛc. ſehr leicht multiplicirt, und ferner alle Wurzeln niederer Dignitäten aus 100, 1000, 10000 ꝛc. ohne beſonderes Ausziehen bekannt ſind, ſo wählt man zu Nennern der Brüche, worein man die unvollkommene Dignitäten verwandelt 100tel ꝛc. damit wenigſtens die Wurzel des Nenners rational wird.

4) Da nur 100, 10000, 1000000 rationale Quadratwurzeln, ferner 1000, 1000000 ꝛc. rationale Cubickwurzeln und endlich 10000, 100000000 ꝛc. rationale Biquadratwurzeln haben, ſo verwandelt man die unvollkommene Quadrate in 100tel, 10000tel ꝛc. die unvollkommene Cubos in 1000tel, 1000000tel ꝛc. die unvollkommene Biquadrate in 10000tel, 100000000tel ꝛc.

5) Und da es endlich einerley iſt, ob man die ganze Dignität, oder nur den Reſt, welcher beym Ausziehen übrig bleibt, in dergleichen Theile verwandelt. indem ja $\sqrt{\frac{700}{100}} = 2\frac{6}{10}$ (§. 172.) ſo gut als

7	2 $\frac{6}{10}$
4	
3	00
	46
2	76
	24

ſo pflegt man, um die Nullen nicht ſo oft zu ſchreiben, die Wurzel zuerſt aus den Ganzen zu ziehen, und alsdann erſt den Reſt in 100tel ꝛc. zu verwandeln.

§. 174.

Aus jeder unvollkommenen niedern Dignität, in Zahlen, die Wurzel, durch Annäherung, ſo genau finden als man verlanget.

Auflöſung.

1) Man ziehe, wenn die Dignität Ganze zur Wurzel enthält, dieſe wie gewöhnlich aus.

2) Hänge an den Reſt, beym Quadrat 2, 4, 6, 8; 10 ꝛc. Nullen, beym Cubus 3, 6, 9 ꝛc. Nullen, beym Biquadrat 4, 8, 12 ꝛc. Nullen, ſo findt man über die Ganze noch 10tel 100tel 1000tel ꝛc. der Wurzel (§. 171. und 172.)

3) Daher werden in der Wurzel, für die erſte mit Nullen angehängte Claſſe, 10, für 2 Claſſen, 100 für 3 Claſſen, 1000 ꝛc. zum Nenner des Bruchs geſchrieben.

4) Je genauer man die Wurzel haben will, deſto mehr Claſſen von Nullen werden angehängt. (§. 173. Nr. 1.)

5) Sollten gar keine Ganze in der Dignität ſtecken z. E. $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$ ſo behandelt man gleich anfänglich,

den Zähler und Nenner, nach der (§. 173.) angegebenen Methode.

3. E. Man verlangt $\sqrt{17}$ ſo genau, daß ſie um kein 1000tel von der wahren Wurzel abweichet, ſo iſt

17	$4\frac{123}{1000}$		
16			
1	00		
	81		
	19	00	
	8	22	
	16	44	
	2	56	00
		82	43
	2	47	29
		8	71

```
       4123
       4123
   --------
      12369
     8246
    4123
  16492
  ---------
   16999129
        871
  ---------
   17000000
```

Zuſatz.

Da $\sqrt{a^2} = a$ und $a \times a = a^2$ ſo kann die Ausziehung der Quadratwurzel geprüfet werden, wenn man die Wurzel wieder zum Quadrat erhebt. Dann muß, wenn es ein vollkommenes Quadrat war, daſſelbe ſogleich wieder erſcheinen, iſts aber unvollkommen, ſo wird, wie in vorſtehender Aufgabe, der Reſt dazu addirt, und alsdann muß die unvollkommene Dignität mit ſo viel Nullen, als beym Ausziehen angehängt wurden, erſcheinen. Die nemliche Probe, hat bey den übrigen Dignitäten, mit einer kleinen, ihrer Natur gemäſſen Veränderung ſtatt, ſo wie ſich

überhaupt, die Regeln, vom Annähern, auf die Cubick und Biquadratzahlen, leicht anwenden laſſen.

V. Abſchnitt.

Etwas von den Gleichungen und dem Wurzel Calcul.

§. 175.

Die ſchönſte und kürzeſte Beweiſſe der wichtigſten Lehrſätze ſowohl, als die leichteſte Auflöſungen der Aufgaben in der Mathematick, gründen ſich auf eine, wenigſtens etwas genauere Kenntnüß der Gleichungen. Dieſer Vortheile nicht verluſtig zu werden, ſoll hier, von den erſten Anfangsgründen dieſer Materie, nur ſo viel geſagt werden, als Kürze, Gründlichkeit und Deutlichkeit in der Folge verlangen. Und wer diß noch ſo gut weiß, hüte ſich doch für der lächerlichen Einbildung: Daß er nun die Algebra verſtehe. Denn dieſe erfordert ungleich mehr und iſt durchaus kein Gegenſtand meiner dermaligen Abſicht.

§. 176.

Den Begriff der Gleichungen giebt (§. 20. und 61. Zuſ.) Der Werth der in einer Gleichung vorkommenden unbekannten Gröſſe, heißt ihre **Wurzel.** Dieſen finden heißt die Gleichung reduciren oder auflöſen. Glieder der Gleichung ſind die durch

das = Zeichen verbundene Gröſſen. Künftig ſoll das linker Hand ſtehende immer das Erſte, das rechter Hand befindliche aber das zweyte Glied heiſſen.

§. 177.

Ein jedes compleres Glied, beſteht aus mehrern durch + und — verbundenen Gröſſen (§. 76.) Dieſe einfache Gröſſen nenne man Theile der Glieder. Z. E. in $a + b - c = 3x + bd$ iſt $a + b - c$ das erſte, $3x + bd$ das 2te Glied und a, b, c, ingleichen 3 x und bd ſind Theile dieſer Glieder.

§. 178.

Eine einfache oder niedere Gleichung iſt diejenige, in welcher die unbekannte Gröſſe, welche nirgends Diviſor iſt, nur in der 1ten Dignität vorkommt. Z. E. $x + b = a - b + cd$ oder $3x + ax = c - d$. Eine höhere oder zuſammengeſetzte Gleichung hingegen iſt, worinnen die unbekannte Gröſſe über die erſte Dignität ſteigt. Vom Exponenten derſelben hängt der Grad der Gleichung ab. Sie heißt Quadratiſch, wenn die unbekannte Gröſſe zur 2ten, Cubiſch, wenn ſie zur 3ten, biquadratiſch, wenn ſie zur 4ten, Eine Gleichung vom 5ten 6ten ꝛc. Grad, wenn die unbekannte Gröſſe zur 5ten 6ten ꝛc. Dignität erhoben iſt. So wär Z. E. $x^2 = a + b$ oder $x^2 + 3ax = m + p$ eine quadratiſche Gleichung.

§. 179.

Eine Gleichung iſt beſtimmt, wenn nur eine unbekannte Gröſſe darinnen vorkommt, die nur einen, oder doch eine beſtimmte Anzahl von Werthen hat. Unbeſtimmte Gleichungen ſind das Gegentheil.

§. 180.

Reine Gleichungen nennt man alle, worinnen die unbekannte Gröſſe nur in einerley Dignität vorkommt, oder wenigſtens eine vollkommene Dignität iſt, Unrein wenn ſie verſchiedene Dignitäten hat und das Ganze keine vollkommne Dignität iſt. Die erſtern heiſſen Æquationes puræ, die letztern adfectæ z. E. $a + b = x^2$ oder $a + b = x^2 + 2ax + a^2$ ſind reine, $y^2 + ay = c$ oder $x^3 + 2x^2 = m$ aber unreine Gleichungen.

§. 181.

Das Hauptgeſchäft bey allen Gleichungen iſt das Reduciren (§. 176.) Worauf kommt diß an? Wie reducirt man die leichteſte Fälle?

Es ſeyen 2 Wagſchalen mit gleichem Gewicht beſchwert, z. E. in jeder 24 Loth. Die Wage wird immer inne ſtehen, wenn ich ſchon in jeder Wagſchale gleichviel zulege, oder gleichviel wegnehme, das Gewicht halbire oder auch verdopple. Dieſe ſinnliche Vorſtellung wird die Anwendung, der (§. 61. 62. u. 63.) auf die Lehre von den Gleichungen, ſehr erleichtern.

1) Es bleibt immer eine Gleichung, wenn beyde Glieder auf einerley Art vergrösſert oder vermindert werden, nur muß, was mit einem Gliede vorgenommen wird, auch mit dem andern geſchehen. Z. E.

I. $2+3=12-7$ | $a+b=x-c$
$+7 \quad +7$ | $+c \quad +c$

$2+10=12$ | $a+b+c=x$

II. $8=5+3$ | $c-d=y+a$
$-3 \quad -3$ | $-a \quad -a$

$8-3=5$ | $c-d-a=y$

III. $16=\frac{32}{2}\ (\times 2)$ | $a+b=\frac{x}{c}\ (\times c)$

$16\times 2=32$ | $(a+b)\times c=x$ (§. 123. Nr. 18.)

IV. $24=12\times 2\ (:2)$ | $a+b=cx\ (:c)$

$\frac{24}{2}=12$ | $\frac{a+b}{c}=x$

§. 182.

Wenn eine Gleichung reducirt werden ſoll, ſo muß, die geſuchte Grösſe, poſitiv, allein, nur einmal in einem von beyden Gliedern ſtehen. (176.) Folglich

1) Wenn die geſuchte Grösſe negativ wäre, ſo bringt man ſie durch die Addition in das entgegen geſetzte Glied (§. 181. I.) Z. E.

$$a-x=b+c \quad (+x)$$
$$a=b+c+x$$

2) Iſt ſie mit andern Gröſſen verbunden, ſo befreye man ſie von denſelbigen, durch die, derjenigen gerade entgegen geſetzte Rechnungsart, welche ſie mit ihnen verbindet. Dann Addition hebt die Subtracktion, Multiplication die Diviſion, und umgekehrt, auf (§. 181.)

3) Eben ſo leicht laſſen ſich alle Theile eines Glieds in das andere bringen, folglich ein ganzes Glied in o verwandlen. Z. E.

$$\frac{a + b - c = d + m - x}{a + b - c - d - m + x = o}$$

4) Eine jede Gleichung kann von allen Brüchen befreyt werden. Nr. 2. Z. E.

$$\frac{a + b - c = \frac{x+d}{m} \; (\times m)}{(a + b - c)m = x + d}$$

Sind mehr Brüche vorhanden, ſo laſſen ſich alle auf einmal wegſchaffen, wenn man eines jeden Zähler mit dem Produckt aller Nenner multiplicirt und die neue Brüche verkleinert. (Abſ. III.) Z. E.

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{m} = \frac{c}{n} - \frac{d}{r} \; (\times bmnr)$$

$$\frac{abmnr}{b} + \frac{bmnrx}{m} = \frac{bcmnr}{n} - \frac{bdmnr}{r}$$

$$amnr + bnrx = bcmr - bdmn.$$

§. 183.

Da $(x^2 = 2ab + c) = (xx = 2ab + c)$ ſo iſt man auch oft genöthigt, durch Hülfe des Wurzelausziehens zu reduciren. (§. 182.) und da in $\sqrt{x^2}$ oder $\sqrt[m]{x}$ die geſuchte Gröſſe gleichfalls nicht alleine ſtehet, das Wurzelausziehen aber, durch Erheben zu Dignitäten vom nemlichen Exponenten aufgehoben wird, weil $\sqrt{x^2} \times \sqrt{x^2} = x \times x = x^2$, ſo wirds auch Fälle geben, die ſich bloß durch Erheben zu Dignitäten reduciren laſſen.

§. 184.

Iſt im 1ten Fall die Dignität vollkommen, ſo zieht man die ſo vielte Wurzel aus beyden Gliedern, als der Exponent der unbekannten Gröſſe verlangt. Z. E.

$x^3 = b - c$ oder auch $x^2 \pm 2ax + a^2 = b + c$

$$x = \sqrt[3]{b-c} \qquad x \pm a = \sqrt{b+c}$$

$$x = \sqrt{b+c} \pm a$$

Iſt aber die Dignität unvollkommen, zum Beyſpiel

1. $2ax + a^2 = b$ ſo wird Nr. 1. und 2. nach
2. $x^2 + a^2 = b$ §. 182. und §. 184. reducirt.
3. $x^2 + 2ax = b$

In Nr. 3. hingegen fehlt augenſcheinlich das Quadrat des 2ten Theils (§. 156.) diß muß daher aufgeſucht, in beyden Gliedern addirt, und alſo aus der

unvollkommenen Dignität eine vollkommene gemacht werden, damit ſie nach den vorigen Regeln behandelt werden kann.

Anmerkung.

Cubiſch und biquadratiſch unreine Gleichungen, gehören nicht in diß Lehrbuch.

§. 185.

Die würkliche Reducktion unreiner quadratiſcher Gleichungen gründet ſich auf folgende Betrachtungen.

1) Das Quadrat der unbekannten Gröſſe iſt entweder wirklich allein vorhanden, oder kann doch leicht, von den mit ihm verbundenen bekannten Gröſſen, befreyt werden. Z. E.

$ax^2 + rx = r^2$ (:a (§. 181. IV.) $\frac{x^2}{a} + rx = r^2$ (+a (§. 181. III)

$$x^2 + \frac{rx}{a} = \frac{r^2}{a} \qquad x^2 + arx = ar^2$$

2) In der Gleichung $x^2 + rx = r^2$ fehlt dem 1ten Glied gewiß nichts zum vollkommenen Quadrat, als das Quadrat des 2ten Theils (§. 156.)

3) Weil x^2 = dem Quadrat des 1ten Theils, ſo muß rx = dem doppelten Producкt des 1ten Theils in den 2ten ſeyn. (§. 156.)

4) Nun iſt $\frac{rx}{x} = r$. Es wird daher der fehlende doppelte 2te Theil gefunden, wenn man mit dem 1ten in diß doppelte Producкt dividirt.

5) Iſt r = dem doppelten 2ten Theil, ſo muß es halbirt werden, um den 2ten Theil $\frac{r}{2}$ ſelbſt zu erhalten.

6) Und da gerade das Quadrat deſſelben im 1ten Glied fehlt Nr. 2. ſo macht man aus dem gefundenen 2ten Theil $\frac{r}{2}$ das Quadrat $= \frac{r^2}{4}$ und addirts in beyden Gliedern der Gleichung (§. 181. Nr. 1.) Z. E.

$$\begin{array}{l} x^2 + rx = r^2 \\ \quad + \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4} \\ \hline x^2 + rx + \frac{r^2}{4} = r^2 + \frac{r^2}{4} \end{array}$$

7) Nun iſt das 1te Glied ein vollkommenes Quadrat (§. 156.) und die Gleichung kann nach (§. 184. 1. 2) behandelt und endlich x nach (§. 181. I. II.) reducirt werden. Dann es war Nr. 6.

$$x^2 + rx + \frac{r^2}{4} = r^2 + \frac{r^2}{4} \text{ folglich}$$

$$x + \frac{r}{2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} \text{ daher endlich}$$

$$x = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2} = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} - \frac{r}{2}$$

Zuſatz.

$x \times x = x^2$ und $-x \times -x = x^2$ (§. 90. und 150.) folglich kann Nr. 6 und 7. $\sqrt{x^2 + rx + \frac{r^2}{4}}$

ſowohl $x + \frac{r}{2}$ als $x - \frac{r}{2}$ ſeyn. Nur würde im 2ten Fall $(x - \frac{r}{2})^2 = x^2 - rx + \frac{r^2}{4}$ (§. 156.) Daher ſchreibt man den Nr. 7. vorgekommenen Ausdruck alſo: $x \pm \frac{r}{2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}}$ und dann

$$x = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} \pm \frac{r}{2}$$

Ob das + oder — gelte, entſcheiden die Umſtände.

§. 186.

Hieraus flieſſen folgende kurze Regeln, für die Reducktion aller unreinen quadratiſchen Gleichungen:

1) Man befreye das Quadrat der unbekannten Gröſſe, von allen, mit ihm, durch Multiplication oder Diviſion verbundenen bekannten (§. 185. 1.)

2) Halbire die, mit der erſten Dignität der unbekannten Gröſſe, multiplicirte bekannte Gröſſe. (§. 185. 5.)

3) Erhebe dieſe Hälfte zum Quadrat und addire ſie in beyden Gliedern. (§. 185. 6.)

4) Ziehe aus der ergänzten Gleichung die √ und reducire ſie (§. 185. 7.)

Zuſatz.

Zur Uebung mögen folgende Beyſpiele dienen.

I. $x^2 \pm x = q$ IV. $x^2 \pm ax = q$
II. $x^2 \pm 2x = q$ V. $x^2 \pm 2ax = q$
III. $x^2 \pm 3x = q$ VI. $x^2 \pm 3ax = q$

§. 187.

Wäre nach dem 2ten Fall §. 183.

$\sqrt{x} = a + b$ oder $\sqrt[3]{x+a} = 2c$ ſo würde

$x = a^2 + 2ab + b^2$ $x + a = 8c^3$

$x = 8c^3 - a$

Jedermann ſieht, daß hier beyde Glieder zur Dignität der unbekannten Gröſſe erhoben und dadurch die unbekannte vom Wurzelzeichen befreyt worden. Folglich iſt ganz allgemein, wenn

$$\sqrt[m]{x} = a + b + c$$

$$x = (a + b + c)^m$$

§. 188.

Kommt mehr als eine unbekannte Gröſſe in einer Gleichung vor, ſo wird ſie durch Subſtituiren reducirt. Subſtituiren aber heißt, den Werth einer Gröſſe in die Stelle einer andern Gröſſe ſetzen. Z. E. wenn $x + y = c$ und ich wüßte daß $y = 10$ ſo wär

$$\begin{array}{c} x + y = c \\ \| \\ 10 \end{array}$$

$x + 10 = c$ folglich $x = c - 10$. Daher

1) Suche man den Werth von einer der unbekannten Gröſſen, aus den Umſtänden der Frage.

2) Subſtituire ihn vor die unbekannte ihm gleiche Gröſſe und nehme folglich mit der Gröſſe, welche ſubſtituirt wird, alle die Veränderungen vor, welche mit der Gröſſe vorgenommen wurden, vor welche ſie ſubſtituirt wird.

3) Reducire nach den vorigen Regeln. Z. E.

Es ſeyen von 2 unbekannten Zahlen M und m, die Summe = S und die Differenz = d gegeben. Man ſoll die Zahlen ſelbſt erfinden. So iſt die kleinere Zahl = m
die gröſſere = m + d folglich

$$S = 2m + d \ (\S. 48.)$$

$$S - d = 2m \text{ und } (:2$$

$$\frac{S-d}{2} = m$$

Es iſt aber auch $m + d = M$ und wie eben gefunden

$$m = \frac{S-d}{2} \text{ daher}$$

$$\frac{S-d}{2} + d = M \text{ oder}$$

$$\frac{S-d+2d}{2} = M \text{ das iſt}$$

$$\frac{S+d}{2} = M$$

Anmerkung.

Kürzer kann dieſe Aufgabe folgendermaſen aufgelößt werden. Die Benennung bleibe, ſo iſt

$$S = M + m$$
$$d = M - m$$ beyde addirt

$$S + d = 2M \; (:2$$

$$\frac{S+d}{2} = M$$

Ferner $S = M + m$

$d = M - m$ die letztere ſubtrahirt

$$S - d = 2m \; (:2$$

$$\frac{S-d}{2} = m$$

§. 189. Zuſatz 1.

$\frac{S-d}{2} = m$ alſo

$$\frac{S}{2} - \frac{d}{2} - m = 0$$ (§. 182. Nr. 3.

$$\frac{S}{2} - m = \frac{d}{2}$$

Zuſatz 2.

$\frac{S}{2} + \frac{d}{2} = M$ folglich

$$\frac{S}{2} + \frac{d}{2} - M = 0$$ (§. 182. Nr. 3.)

$\frac{S}{2} = M - \frac{d}{2}$ und $\frac{d}{2} = M - \frac{s}{2}$

Zuſatz 3.

Mit weniger Mühe hat man alſo 5 wichtige Sätze erfunden.

1) Wenn von 2 Zahlen die halbe Summe und die halbe Differenz gegeben iſt, ſo iſt die gröſſere = der halben Summe + der halben Differenz. §. 188.

2) Die kleinere hingegen = der halben Summe weniger der halben Differenz (§. cit.)

3) Die halbe Differenz iſt = der halben Summe weniger der kleinern Gröſſe, oder auch der gröſſern Gröſſe weniger der halben Summe. Zuſ. 1. und 2.

4) Die halbe Summe iſt = der gröſſern Gröſſe weniger der halben Differenz. Zuſ. 2.

Zuſatz 4.

Zur Uebung im Reduciren durch Hülfe des Subſtituirens dienen folgende Aufgaben.

$a + y = x + b - c$ und es ſeye $y = d - p$

$a - y = x + b - c$ — — $y = d - p$

$a^2 + bx - c^2 = ad + a^2 - y^2$ — — $x = m + n$

$c^2 + y^2 - 2bd = a^2 - bx$ — — $x = a + b - c$

$\sqrt{y^2} - c = ax + b$ — — $y^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\sqrt[3]{x^3} + a = cx$ — — $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Zuſatz

Zuſatz 5.

Wie Gleichungen, worinnen 3 und mehr unbekannte Gröſſen vorkommen, durch die Subſtitution zu reduciren, fließt theils aus dem bißher erklärten, theils kann es mündlich gezeigt und angewendet werden.

§. 190.

Noch iſt die Anwendung der 4 Rechnungsarten auf die Wurzelgröſſen übrig. Auch hiervon will ich, doch nur das nöthigſte berühren. Wurzelgröſſen nennt man alle diejenige Gröſſen, vor welchen das Wurzelzeichen irgend einer beliebigen Dignität ſteht. Z. E. $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[m]{a^n}$. Wie kann man dieſen einerley Exponenten geben, ohne ihren Werth zu ändern? Wenn ſind Wurzelgröſſen ähnlich? Wie kann man eine, vor dem Wurzelzeichen ſtehende Gröſſe, unter daſſelbe bringen, ohne den Werth der Gröſſe zu verändern? Wie werden Wurzelgröſſen addirt, ſubtrahirt, multiplicirt und dividirt? dieſe Fragen ſollen hier beantwortet werden.

§. 191.

Wurzelgröſſen, welche im Wurzelzeichen verſchiedene Exponenten haben, einerley Exponenten zu geben.

Auflöſung und Beweiß.

$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ und $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$ (§. 167. 1) Nun ſind $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ Brüche,

1) Daher bediene man ſich dieſes letzten Ausdrucks.

2) Bringe die Brüche zu gleicher Benennung (§. 132.)

3) Setze die neue Zähler in die Stelle der vorigen Exponenten unter die Wurzelzeichen, und die neue Nenner in die Stelle der vorigen Wurzel Exponenten. Z. E. $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4} = \frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$ (§. 132) u. (Nr. 2.) da nun $a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{8}{12}}$ und $a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{9}{12}}$ ſo iſt auch $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ und $\sqrt[12]{a^9} = \sqrt[4]{a^3}$ Nr. 3. Eben ſo verfährt man wenn die Exponenten lauter allgemeine Zeichen ſind.

§. 192.

Aehnliche Wurzelgröſſen heiſſen diejenige, welche einerley Gröſſen unter dem Wurzelzeichen, einerley Wurzel Exponenten und ähnliche Gröſſen vor dem $\sqrt{}$ haben. Z. E. $2a\sqrt[3]{bd} \backsim 4a\sqrt[3]{bd}$ ingleichem $4c\sqrt[5]{x} \backsim 8c\sqrt[5]{x}$ hingegen $2a\sqrt[3]{b}$ und $3a\sqrt[3]{c}$, $4\sqrt{c}$ und $4\sqrt[3]{c}$, $a\sqrt[3]{b}$ und $c\sqrt[3]{b}$ ſind unähnlich.

§. 193.

Eine vor dem Wurzelzeichen ſtehende Gröſſe mit unter das Wurzelzeichen zu bringen, ohne den Werth der ganzen Gröſſe zu ändern. Z.E. in $a\sqrt[m]{c}$ ſoll a mit unter das Wurzelzeichen gebracht und die Gröſſe dennoch der vorigen $a\sqrt[m]{c}$ gleich bleiben.

Auflöſung und Beweiß.

Man ſetze daß $a\sqrt[m]{c} = u$ ſo iſts zur Dignität m erhoben

$a^m c = u^m$ (§.187) u. nun $\sqrt[m]{}$ ausgezogen,

$\sqrt[m]{a^m c} = u$ da aber

$a\sqrt[m]{c} = $ || ſo iſt auch

$$\sqrt[m]{a^m c} = a\sqrt[m]{c}$$

Woraus folgende Regeln flieſſen:

1) Erhebt die Gröſſe vor dem Wurzelzeichen zur Dignität des Wurzel Exponenten, und

2) Multiplicirt damit die unter dem Wurzelzeichen ſtehende Gröſſe. Z. E. $2\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{8a}$, $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$; $2a\sqrt{b} = \sqrt{4a^2 b}$.

Zuſatz.

Dividiren iſts Entgegengeſetzte vom Multipliciren. Wenn ich daher die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen mit einer Gröſſe von der nemlichen Dignität dividire, welche der Wurzel Exponent beſtimmt, ſo kann die Wurzel dieſes Diviſors vor das $\sqrt{}$ geſetzt werden. Z. E.

$$\sqrt{16} = \sqrt{4 \times 4} = 2\sqrt{4},\ \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64 \times 2}$$

$$= 4\sqrt[3]{2} \text{ und } \sqrt[m]{y^m b} = y\sqrt[m]{b}.$$

§. 194.

Wurzelgröſſen zu addiren.

Aufloͤſung.

1) Sind ſie ähnlich ſo werden ſie wie gewöhnlich addirt. (§. 81.)

2) Sind ſie unähnlich ſo ſucht man ſie nach (§. 191. und §. 193.) in ähnliche zu verwandlen.

3) Geht diß nicht an, ſo behilft man ſich mit der Addition durch Zeichen (§. 81.) Z. E.

$$2\sqrt[3]{4} + a\sqrt[m]{b} - 3a\sqrt[n]{cd}$$

$$3\sqrt[3]{4} - 4a\sqrt[m]{b} + 5a\sqrt[n]{cd}$$

$$\overline{5\sqrt[3]{4} - 3a\sqrt[m]{b} + 2a\sqrt[n]{cd}} \text{ Nach Nr. 1.}$$

$\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{256} = 3\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[3]{4} = 7\sqrt[3]{4}$
$= \sqrt[3]{1372}$ (Nr. 2.) und endlich $2\sqrt[3]{5}$ addirt zu
$3\sqrt[2]{7} = 2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[2]{7}$ (Nr. 3.)

§. 195.

Wurzelgröſſen zu ſubtrahiren.

Auflöſung.

Die Regeln ſind, mit einer kleinen Veränderung, mit (§. 194.) übereinſtimmend, nur muß (§ 97.) genau beobachtet werden. Z. E.

$$\begin{array}{l} 4\sqrt{5} + a\sqrt[n]{b} - 3a\sqrt[r]{cm} \\ 2\sqrt{5} - 2a\sqrt[n]{b} + 6a\sqrt[r]{cm} \\ \hline 2\sqrt{5} + 3a\sqrt[n]{b} - 9a\sqrt[r]{cm} \end{array}$$

$\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{243} = 2\sqrt[4]{3} - 3\sqrt[4]{3} = 5\sqrt[4]{3}$
$= \sqrt[4]{1875}$; und von $a\sqrt[m]{b}$ abgezogen $b\sqrt[n]{ac}$ iſt
$= a\sqrt[m]{b} - b\sqrt[n]{ac}$.

§. 196.

Wurzelgröſſen zu multipliciren.

Auflöſung.

1) Wenn ſie nicht einerley Wurzel Exponenten haben, ſo bringe man ſie dazu. (§. 191.)

2) Alsdann multiplicire man die unter dem $\sqrt{}$ ſtehende Gröſſen allein in einander und ſetze das vorige Wurzelzeichen vor das Produckt.

3) Haben die Wurzelzeichen Coefficienten, ſo werden dieſelbige nach den gewöhnlichen Regeln multiplicirt.

4) Bey gleichen Wurzel Exponenten fällt Nr. I. vor ſich weg. Z. E.

$\sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{ab}$, $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[6]{b^4} = \sqrt[6]{a^3b^4}$ $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{6} = 6\sqrt{30}$, $a\sqrt[n]{b} \times b\sqrt[n]{c} = ab\sqrt[n]{bc}$.

Beweiß.

Es ſeye $\sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} = p$ ſo iſt zur Dign. m

erhoben $bc = p^m$ und $\sqrt[m]{}$ ausgezogen

$\sqrt[m]{bc} = p$ allein da

$\sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} =$ ‖ ſo iſt auch

$\sqrt[m]{bc} = \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}$

Zuſatz.

Folglich können auch complexe Wurzelgröſſen eben ſo leicht mit einander multiplicirt werden. Z. E.

$$3a\sqrt[n]{b} + 2c\sqrt[n]{d}$$
$$3a\sqrt[n]{b} + 2c\sqrt[n]{d}$$

$$9a^2b + 6ac\sqrt[n]{bd}$$
$$+ 6ac\sqrt[n]{bd} + 4c^2d$$

$$9a^2b + 12ac\sqrt[n]{bd} + 4c^2d$$

§. 197.

Wurzelgröſſen mit Wurzelgröſſen zu dividiren.

Auflöſung und Beweiß.

Diviſion iſt der Ruckweg von der Multiplication. Folglich

1) Dividire man, wenn Diviſor und Dividende einerley Wurzel Exponenten haben, die unter dem $\sqrt{}$ befindliche Gröſſen in einander, und gebe dem Quotienten das vorige $\sqrt{}$.

2) Haben ſie nicht einerley Wurzel Exponenten, ſo bringt man ſie darzu (§. 191.)

3) Haben ſie Coefficienten, ſo dividirt man dieſe nach den gewöhnlichen Regeln. Z. E.

$\sqrt{4}:\sqrt{12}=\sqrt{3}$; $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{abc}=\sqrt[m]{bc}$ und endlich $\sqrt[3]{a}:\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{a^3}:\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{\frac{b^2}{a^2}}$; $2\sqrt{4}:4\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

§. 198.

Wurzelgröſſen zu verlangten Dignitäten zu erheben.

Auflöſung und Beweiß.

Da das Quadrat von $\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{a^2}$ folglich ſein Cubus $=\sqrt[m]{a^3}$, überhaupt die Dignität n von $\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{a^n}$ ſo erhebe man bloß die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen zur verlangten Dignität. Z. E. der Cubus von $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{64}$.

§. 199.

Aus einer Wurzelgröſſe, die Wurzel einer verlangten Dignität zu ziehen. Z. E. $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$.

Auflöſung und Beweiß.

Da $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$ (§. 167.) folglich auch $\sqrt{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{6}}$ und $a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$, ſo iſt auch $\sqrt{(\sqrt[3]{a})}=\sqrt[6]{a}$ oder überhaupt $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{c})}=\sqrt[mn]{c}$. Daher die Regeln:

1) Man multiplicire beyde Wurzel Exponenten in einander.

2) Setze das Produckt als neuen Wurzel Exponenten in das $\sqrt{}$.

3. Und unter daſſelbe die gegebene unter dem 2ten $\sqrt{}$ ſtehende Wurzelgröſſe.

Zuſatz.

Durch diß Mittel kann man alſo einer Wurzelgröſſe, welche mehrere Wurzelzeichen hat, leicht nur eines verſchaffen.

VI. Abſchnitt.

Von den Verhältnüſſen und Proportionen.

§. 200.

So bald ich 2 Gröſſen ſo auf einmal denke, daß der einen in Beziehung auf die andere etwas zukommt, welches ihr einzeln nicht zukäme, ſo denkt man beyde Gröſſen in Verbindung. Wer z. E. 2 und 6. ſich auf einmal denkt, und zugleich beobachtet, daß 6 entweder um 4 gröſſer als 2, oder auch daß 2 in 6, 3mal enthalten iſt, denkt 6 und 2 in Verbindung.

§. 201.

Hier heiſſen: Die Verbindung ſelbſt ein Verhältnüß. (Ratio mathem.) Die verbundene Gröſſen,

Glieder des Verhältnüſſes. Z. E. 2. und 6. Das was der einen Gröſſe, in Beziehung auf die andre, zukommt, Name des Verhältnüſſes (Nomen rationis) Z. E. hier 4. und 3.

Zuſatz 1.

Der Name des Verhältnüſſes zeigt daher: Entweder, um wie viel eine Gröſſe > iſt als die andere, oder wie oft eine in der andern ſteckt. (§. 200.)

Zuſatz 2.

Jedes Verhältnüß beſteht aus 2 Gliedern, von welchen eines zuerſt, das andre nach dem erſten muß geſetzt werden. Man nenne das erſte Glied das vorhergehende (antecedens) das 2te: Das folgende Glied (conſequens).

Zuſatz 3.

Wo ein Verhältnüß iſt, muß auch ein Name des Verhältnüſſes ſeyn.

Zuſatz. 4.

Zwey oder mehr Verhältnüſſe ſind einander = wenn ſie einerley Namen des Verhältnüſſes haben. Z. E. 2 und 6 = 4 und 8, 3 und 9 = 5 und 15 = 4 und 12.

§. 202.

Wenn der Name des Verhältnüſſes durch Subtrahiren gefunden wird, ſo iſts ein Arithmetiſches

Verhåltnůß, findet man ihn durch Dividiren, ein geometriſches Verhåltnůß. Man braucht daher, beym erſtern, das Zeichen der Subtracktion, beym letztern das Zeichen der Diviſion. Folglich wår 4 — 6 ein arithmetiſches, 2 : 6 ein geometriſches Verhåltnuß. Daher ſoll der Name des Verhåltnůſſes bey arithmetiſchen in Zukunft Differenz heiſſen und mit d bezeichnet werden, bey geometriſchen hingegen Exponent und mit m.

Zuſatz.

In jedem Verhåltnuß iſt das 1te Glied an ſich willkůhrlich das 2te aber nothwendig, entweder die Summe des 1ten und der Differenz, oder ein Produckt des 1ten in den Exponenten. Z. E.

I. $=$ a II. $=$ a$+$d oder I. $=$ a und II. $=$ am.

Anmerkung.

Da die Alten nur dem geometriſchen Verhåltnuß den Namen Verhåltnůß beylegten, ſo verſteht man noch immer ein geometriſches Verhåltnůß, ſo oft der Ausdruck Verhåltnůß ohne Beyſatz gebraucht wird.

§. 203.

Wenn 2 Verhåltnůſſe einem 3ten gleichen, ſo ſind ſie einander ſelbſt gleich. Z. E. wenn

$$a - (a + d) = b - (b + d) \text{ und}$$

$$c - (c + d) \qquad = \|$$

ſo iſt $a - (a+d) = c - (c+d)$ oder auch wenn

$$\begin{aligned} a : am &= b : bm \text{ und} \\ &\;\;\| \\ c : cm &= \| \end{aligned}$$

ſo iſt $a : am = c : cm$

Beweiß.

Dann ſie haben in dieſem Fall immer gleiche Namen des Verhältnüſſes. (§. 62. und 201. Zuſ. 4.)

§. 204.

Wenn zu 2 Gröſſen gleiches addirt oder von ihnen gleiches ſubtrahirt wird, ſo verhalten ſich ihre Summen oder Reſte, arithmetiſch, wie die Gröſſen ſelbſt.

Beweiß.

Es ſeye $a - (a+d)$ ſo iſt die Differenz $= d$

$$\begin{array}{ll} +c & +c \\ \hline \end{array}$$

$(a+c) - (a+c+d)$ wo abermal die Differ. $= d$ folglich iſt $a - (a+d) = (a+c) - (a+c+d)$ W. d. E. W

Ferner ſeye $a - (a+d)$ ſo iſt die Differenz $= d$

$$\begin{array}{ll} -c & -c \\ \hline \end{array}$$

$(a-c) - (a-c+d)$ und die Differenz wieder $= d$ daher verhält ſich

$a - (a+d) = (a-c) - (a-c+d)$ W. d. A. W.

§. 205.

Wenn beyde Glieder eines Verhältnüſſes mit einerley Gröſſe multiplicirt oder dividirt werden, ſo ver-

halten ſich die Produckte oder Quotienten, wie die multiplicirt oder dividirte Gröſſen. Z. E. a:b ($\times$c) $= ac : bc$ und $a : b\ (:c) = \frac{a}{c} : \frac{b}{c}$. Hier iſt alſo $a : b = ac : bc$ und $a : b = \frac{a}{c} : \frac{b}{c}$.

Beweiß.

Da $a:b = \frac{b}{a}$ und $\frac{b}{a} \times c = \frac{bc}{ac}$ aber auch

$$\frac{bc}{ac} = \frac{b}{a} \text{ (§. 123. Nr. 10) und}$$

$$\begin{matrix} \frac{bc}{ac} & & \frac{b}{a} \\ \| & & \| \\ ac:bc & & a:b \end{matrix} \text{ ſo iſt auch}$$

$$a:b = ac:bc \text{ (§. 203.) W. d. E. W.}$$

Wenn ferner $a:b = \frac{b}{a}$ u. $\frac{b}{a} = \frac{b:c}{a:c}$ (§. 123. Nr. 10.)

$$\begin{matrix} \frac{b}{a} & & \frac{b:c}{a:c} \\ \| & & \| \\ a:b & & \frac{a}{c}:\frac{b}{c} \end{matrix}$$

ſo iſt auch

$$a:b = \frac{a}{c}:\frac{b}{c}$$

W. d. A. W.

Zuſatz 1.

Da alſo Verhältnüſſe Brüchen gleichen, in welchen der Nenner das vorhergehende, der Zähler das nachfolgende Glied iſt, ſo kann man mit ihnen die nemliche Veränderungen, wie mit den Brüchen vornehmen, ohne ihren Exponenten d. i. die Verhältnüſſe ſelbſt zu ändern.

Zuſatz 2.

Man kann ſie alſo auch auf einen kleinern Ausdruck bringen. Z. E. 24 : 32 (: 8) = 3 : 4.

Zuſatz 3.

Der Exponent kann als ein Bruch ausgedruckt werden.

Zuſatz 4.

Iſt der Exponent irrational, ſo heißt auch das Verhåltnůß irrational (§. 149.) im Gegentheil aber ein rationales Verhåltnůß. Z. E. 12 : $\sqrt{5}$ iſt irrational.

§. 206.

Die bißher erklårte Verhåltnůſſe ſind Einfache. Ein zuſammengeſetztes Verhåltnůß (compoſita) entſteht, wenn man von 2 oder mehr einfachen Verhåltnůſſen die vorhergehende, aber auch die nachfolgende Glieder in einander multiplicirt, das 1te Produckt giebt das neue Vorhergehende, das 2te das neue nachfolgende Glied. Z. E.

3 : 9	und	a : b
2 : 6		c : d
6 : 54		ac : bd

§. 207. Zuſatz 1.

Arithmetiſche zuſammengeſetzte Verhåltnůſſe entſpringen aus der Addition mehrerer einfachen arithmetiſchen Verhåltnůſſe.

Zuſatz 2.

Was bißher von den einfachen Verhältnüſſen bewieſen worden, gilt auch von den zuſammengeſetzten.

§. 208.

Eine Proportion iſt die Gleichheit zweyer Verhältnüſſe, folglich giebts

1) Arithmetiſch und geometriſche Proportionen. (§. 202.)

2) In den erſtern iſt d=d in den letztern m=m.

3) Jede Proportion hat 4 Glieder, 2 vorhergehende und 2 nachfolgende.

4) In jeder Proportion heiſſen das 1te und 4te Glied die äuſſere, das 2te und 3te aber die mittlere Glieder.

5) In jeder iſt das 1te und 3te Glied an ſich willkührlich, das 2te und 4te hingegen, entweder = Summe der Differenz und des vorhergehenden, oder dem Produckt des Exponenten in das vorhergehende Glied. (§. 202. 3.) Nur wird, bey der arithmetiſchen, wenn das vorhergehende > das nachfolgende, d negativ.

6) Die natürlichſte Zeichen ſind die von Leibnitz und Wolfen eingeführte, weil ſie zugleich die Natur der Verhältnüſſe und die Erklärungen der Proportionen ausdrücken. Z. E.

Für arithmetiſche Proportionen 2—7=3—8

Für geometriſche — — 3 : 9=5 : 15

Sonſt drückt mau auch die erſtere folgendermaſen aus: 2 7 ∵ 3. 8 oder 2. 7 : 3. 8 u. die letztere 3. 9 :: 5. 15. Dieſer Zeichen bedienen ſich die meiſten Franzoſen.

§. 209.

Wenn das 2te Glied dem 3ten gleich iſt, ſo iſts eine ſtätige oder zuſammenhängende Proportion (continua.) Im Gegentheil eine Discrete. Das 1te und 3te, ingleichem das 2te und 4te Glied nennt man gleichnamigte Glieder. (Termini homologi) Z. E. $2 - 4 = 4 - 6$, $3 : 6 = 6 : 12$; $a - b = b - c$, $a : am = am : am^2$ ſind ſtätige, $2 - 5 = 7 - 10$, $3 : 9 = 2 : 6$, $a - b = c - d$, $a : am = b . bm$ aber discrete Proportionen.

Zuſatz 1.

Es giebt demnach ſowohl arithmetiſch als geometriſche ſtätige und discrete Proportionen.

Zuſatz 2.

Da in der ſtätigen, das 2te Glied = dem 3ten, ſo braucht man es nicht doppelt zu ſchreiben. Man drücke die ſtätige arithmetiſche Proportion alſo aus, ∸ 2. 4. 6, ∸ a. b. c. oder auch ÷ 2. 4. 6. und die geometriſche ∺ 3. 6. 12, ∺ a. am. am^2.

Zuſatz 3.

Hier heißt das mittlere Glied, die mittlere Proportionalgröſſe, folglich hat man ſowohl arithmetiſch

metiſch als geometriſche mittlere proportional Gröſſen.

§. 210.

In jeder arithmetiſchen Proportion, iſt die Summe der beyden äuſſern Glieder der Summe der beyden mittlern gleich.

Beweiß.

$$a - (a + d) = b - (b + d)$$
$$+ b \qquad\qquad + a$$
$$a + b + d = a + b + d \text{ (§. 63.}$$

§. 211. Anmerkung.

Leicht lieſſe ſich das umgekehrte des vorhergehenden Satzes erweiſen und daraus mancherley Veränderungen der arithmetiſchen Proportionen herleiten. Da diß aber auf mein Syſtem keinen nothwendigen Einfluß hat, ſo will ichs theils dem Leſer, theils dem mündlichen Vortrag überlaſſen.

§. 212.

Zu 3 gegebenen Gröſſen die 4te arithmetiſche proportional Gröſſe finden. Z. E. zu a, a+d, b. Die 4te ſeye = x.

Auflöſung.

$$a - (a + d) = b - x \text{ ſo iſt}$$
$$a + x = a + b + d \text{ (§. 210.) u. (}-a$$
$$x = b + d \text{ (§. 63.)}$$

Das iſt: Man addire die 2te und 3te der gegebenen Gröſſen und ſubtrahire die 1te, ſo hat man die verlangte 4te.

§. 213.

Zu 2 gegebenen Gröſſen, die mittlere arithmetiſche Proportional Gröſſe zu finden. Sie ſeyen a und $a + 2d$, die geſuchte $= x$.

Auflöſung.

$a - x = x - (a + 2d)$ ſo iſt

$2a + 2d = 2x$ (§. 210. und (: 2

$a + d = x$ (§. 63.) folglich nun

$a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$

§. 214. Anmerkung.

Alle vorhergehende Sätze laſſen ſich leicht durch Zahlen erläutern. Inſonderheit wird der letzte häufig gebraucht, wenn von einerley Gröſſe verſchiedene Werthe vorhanden ſind, welche alle von ihrem wahren Werth viel oder wenig abweichen, und man den mittlern Werth verlangt.

§. 215.

In jeder geometriſchen Proportion iſt das Produckt der beyden äuſſern Glieder, dem Produckt der beyden mittlern gleich.

Beweiß.

Es ſeye $a : am = b : bm$ ſo iſt

$$\frac{b \qquad\qquad a}{abm = abm}$$

Dann beyde ſind ein Produckt, aus dem 1ten, 3ten Glied und dem Exponenten (§. 208. Nr. 5. folglich gleich (§. 63.)

Zuſatz 1.

Daher iſt in der ſtätigen geometriſchen Proportion das Produckt der beyden äuſſern Glieder = dem Quadrat des mittlern Glieds z. E.

$$a : am = am : am^2$$

$$a^2 m^2 = a^2 m^2 \quad (\text{§. } 144.)$$

Zuſatz 2.

Und weil $\sqrt{a^2m^2} = am$ ſo iſt die mittlere geometriſche Proportionale = der Quadratwurzel aus dem Produckt der beyden äuſſern Glieder.

§. 216.

Wenn bey 4 Gröſſen das Produckt der beyden äuſſern Glieder = dem Produckt der mittlern, ſo ſtehen die Gröſſen in einer geometriſchen Proportion. z. E. Sie ſeyen

$a \quad am \quad b \quad bm$ ſo iſt, wenn

$abm = abm$ gewiß

$$a : am = b : bm$$

Beweiß.

$a:am = \frac{am}{a}$ und $b:bm = \frac{bm}{b}$ folglich iſt auch

$(a : am = b : bm = \left(\frac{am}{a} = \frac{bm}{b}\right)$ da nun p. hyp. $abm = abm$ ſo iſt auch (: ab

$\frac{abm}{ab} = \frac{abm}{ab}$ folglich auch §. 123. N. 10.

$\frac{am}{a} = \frac{bm}{b}$ oder

$a : am = b : bm$

Zuſatz.

Es läßt ſich alſo jede Gleichung in eine geometriſche Proportion, und jede geometriſche Proportion in eine Gleichung verwandlen. (§. 215.) Dann jedes Glied der Gleichung, welches man will, giebt die beyde äuſſere, und das andere die beyde mittlere Glieder. Z. E.

$ab = cd$ giebt $a : c = d : b$

§. 217.

Hieraus laſſen ſich mit leichter Mühe, alle mögliche Verwandlungen der geometriſchen Proportionen herleiten und beweiſen. Es bleibt die Proportion, ſo lang das Produckt der beyden äuſſern und mittlern Glieder gleich bleibt. Sie kann daher verändert werden.

1. Alternando. $a : am = b : bm$

$a : b = am : bm$

2. Jnvertendo. $am : a = bm : b$ und

$b : bm = a : am$ ꝛc.

3. Componendo. $a+am:am = b+bm:bm$

4. Separando. $a-am:am = b-bm:bm$

5. Addendo. a) $a:am=b:bm$ u. $n:nm=a:am$

$n:nm$

$a+n:am+nm = b:bm$

b) $a:am = b:bm$

$n:nm$

$a:am = b+n:bm+nm$

c) $a:am = b:bm$

$n \quad : \quad nm$

$a+n:am = b+nm:bm$

d) $a:am = b:bm$

$n \quad : \quad nm$

$a:am+n = b:bm+nm$

6. Subtrahendo. a) $a:am=b:bm$ u. $n:nm=a:am$

$n:nm$

$a-n:am-nm = b:bm$

b) $a:am = b:bm$

$n:nm$

$a:am = b-n:bm-nm$

c) $a:am = b:bm$

$n \quad : \quad nm$

$a-n:am = b-nm:bm$

d) $a:am = b:bm$

$n \quad : \quad nm$

$a:am-n = b:bm-nm$

7. Multiplicando. a) $a : am = b : bm$

$c \quad c$

$ac : acm = b : bm$

b) $a : am = b : bm$

$c \quad c$

$a : am = bc : bcm$

c) $a : am = b : bm$

$c \qquad c$

$ac : am = bc : bm$

d) $a : am = b : bm$

$c \qquad c$

$a : acm = b : bcm$

8. Dividendo. a) $a : am = b : bm \; (: c$

$$\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = b : bm$$

---

b) $a : am = \frac{b}{c} : \frac{bm}{c}$

---

c) $\frac{a}{c} : am = \frac{b}{c} : bm$

---

d) $a : \frac{am}{c} = b : \frac{bm}{c}$

9. Ad dign : evehendo. $a : am = b : bm$

$$a^n : a^n m^n = b^n : b^n m^n$$

---

10. Radices extrahendo. $a : am = b : bm$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{am} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{bm}$$

11. Ordinatim ex æquo. a) $a : am = b : bm$

$$a : an = b : bn$$

$$am : an = bm : bn$$

b) $a : am = b : bm$

$$an : am = bn : bm$$

$$a : an = b : bn$$

c) $a : am = b : bm$

$$am : an = bm : bn$$

$$a : an = b : bn$$

12. Perturbate ex æquo. a) $a : am = b : bm$

$$a : amn = \frac{b}{n} : bm$$

$$am : amn = \frac{b}{n} : b$$

b) $a : am = b : bm$

$$amn : am = b : \frac{b}{n}$$

$$a : amn = \frac{b}{n} : bm$$

c) $a : am = b : bm$

$$am : amn = \frac{b}{n} : b$$

$$a : amn = \frac{b}{n} : bm$$

Beweiß.

Alle dieſe Fälle beweiſt §. 216. Nur wird im 5ten und 6ten, bey c und d, die Gleichheit des Produckts der äuſſern und mittlern Glieder nicht deutlich in die Augen fallen, wenn man ſich nicht erinnert: Daß, da

$a:am = b:bm$ und addirt wurde

$n \quad : \quad nm$

man wie in Nr. a und b vorausſetzte, daß

$a : b = n : nm$ folglich auch

$amn = bn$ (§. 215.)

Nun war ja nach geſchehener Veränderung Nr. 5. c.

$a+n : am = b+nm : bm$ und

$abm + bmn = abm + ammn$ weil aber

$bn = amn$ ſo iſt ja

$abm + m = abm + m$ wenn nemlich bmn mit bn und $ammn$ mit amn dividirt wird. (§. 63.)

Und eben ſo iſt in Nr. d wo

$a:am + n = b:bm + nm$

$abm + amn = abm + bn$ weil

$amn = bn$

Werden bey Nr. 6. in c und d die — in + verwandelt, ſo findet die nemliche Bemerkung ſtatt.

§. 218. Anmerkung.

1. Im vorhergehenden §. werd' ich manchen zu viel geſagt zu haben ſcheinen. Es wird ſie aber der Gebrauch dieſer Sätze im folgenden befriedigen.

2. Durch alterniren und invertiren können alle von Nr. 3. an entwickelte Sätze noch oft verändert werden.

3. Den 1ten 2ten 3ten und 4ten Satz braucht Geometrie und Mechanick häufig.

4. In Nr. 9. und 10. muß die Veränderung mit allen 4 Gliedern, nicht nur mit 2 und 2, wie in den übrigen vorgenommen werden.

5. Erläuterungen durch Zahlen Beyſpiele, mündlich.

6. Der ſehr groſſe Nutzen dieſer Lehre rechtfertigt den Ausdruck der Meßkünſtler: Daß ſie die Seele der Mathematick ſey. Wir werden ihn ſchon in folgenden §. §. kennen lernen.

§. 219.

Zwiſchen 2 gegebenen Gröſſen 2 und 8 oder a und am^2 die mittlere geometriſche Proportionalgröſſe zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Multiplicirt die gegebene Gröſſen in einander.

2) Zieht aus dem Produckt die Quadratwurzel. Dieſe iſt die verlangte mittlere geometriſche Proportionale. (§.215. Z. 1. u. 2) $8 \times 2 = 16$ und $\sqrt{16} = 4$ folglich ∺ 2. 4. 8. und $am^2 \times a = a^2 m^2$ und $\sqrt{a^2m^2} = am$ daher ∺ a. am. am^2.

Zuſatz.

Man findet alſo zu 2 gegebenen Gröſſen die 3te geometriſche Proportionale, wenn man die 2te mit dem Exponenten multiplicirt. (§. 209. und Zuſ. 2.)

Z. E. Wenn a : am ſo iſt die 3te = am^2 weil ∺ a. am. am^2.

§. 220.

Zu 3 gegebenen Grôſſen die 4te Geometriſche Proportional Grôſſe finden.

Auflôſung und Beweiß.

Man multiplicire die 2te mit der 3ten und dividire das Produckt mit der 1ten, der Quotient iſt die 4te (§. 215.) Z. E.

$$2 : 4 = 8 : x$$

$$32 = 2x \; (: 2$$

$$16 = x \text{ und nun iſt}$$

$$2 : 4 = 8 : 16 \text{ da } 2 \times 16 = 4 \times 8$$

Oder $a : b = c : y$

$$bc = ay \; (: a$$

$$\frac{bc}{a} = y \text{ folglich}$$

$$a : b = c : \frac{bc}{a} \text{ weil } a \times \frac{bc}{a} = b \times c$$

§. 221.

Dieſe vorhergehende Aufgabe nennt man gewôhnlich die Regel de Tri, weil immer zu 3 bekannten Gliedern das 4te gefunden wird. Ihr unendlich mannigfaltiger Gebrauch bracht' ihr auch den Namen: Regula aurea zu wegen. Man merke bey ihr:

1) Sie iſt nur in dem Fall anwendbar, wenn man verſichert iſt, daß die 3 gegebene Gröſſen mit der 4ten unbekannten, wirklich eine geometriſche Proportion ausmachen. Z. E. 2 Pfund koſten 8 fl. was koſten 4 Pfund. Hier ſind

2 Pfund : 4 Pfund = 8 fl : x fl.

2) Da aber auch 2 Pfund : 8 fl = 4 Pfund : x fl. (§. 217. I.) Und diß letztere im Ordnen der gegebenen Glieder oft bequemer ſcheint, wenigſtens faſt allgemein angenommen iſt, ſo kann man ſie auch wirklich ſo ordnen: 2 Pfund : 8 fl = 4 Pf. Ungeachtet ſich Pfunde und Gulden, als heterogen, unmöglich gegen einander verhalten können, dann man betrachtet ſie hier bloß als Zahlen, welche mit der zu findenden 4ten eine Proportion ausmachen.

3) Es mag in der Proportion $a : am = b : m$ fehlen welches Glied will, ſo kann es durch (§. 215. §. 216. Zuſ. und §. 181. IV.) gefunden werden. Es ſeye

a) $x : am = b : bm$ ſo iſt

$$bmx = abm \;(: bm$$

$$x = a$$

b) $a : x = b : bm$

$$abm = bx \;(: b$$

$$am = x$$

c) $a : am = x : bm$

$$abm = amx \;(: am$$

$$b = x$$

$$\text{d) } a : am = b : x$$

$$ax = abm \; (: a$$

$$x = bm$$

Daher die kurze Regel: Fehlt ein äuſſeres Glied, ſo wird das Produckt der mittlern, durch das gegebene äuſſere dividirt; fehlt ein mittleres, ſo dividirt man das Produckt der beyden äuſſern, durch das gegebene mittlere Glied.

4) Wenn die benannte Zahlen in gleichnamigten Gliedern nicht aus einerley Einheiten oder Sorten beſtehen, ſo muß man ſie darauf bringen, um die Multiplication und Diviſion bequemer zu machen, folglich die vorhandne gröſſere Sorte, in die kleinſte, welche in der Aufgabe vorkommt, verwandlen. (§. 110.) Z. E.

2 Pfund 3 L. : 3 fl. 5 kr. = 3 Pfund 4 L. 2 Q.

268 Q. : 185 kr. = 402 Q.

5) Wenn die gleichnamigte gegebene Glieder ein einfaches Verhältnüß ausmachen, (§. 206.) ſo iſts eine einfache ſind ſie aber ein zuſammengeſetztes Verhältnüß (§. cit.) ſo iſts eine zuſammengeſetzte Regel de Tri, wohin die ſogenannte Regel de Quinque und die Reeſiſche Regel gehören. Folglich darf man zuſammengeſetzte Glieder und ſolche, welche in einem zuſammengeſetzten Verhältnüß ſtehen, ja nicht verwechſeln. Die Aufgabe Nr. 4. giebt ein Bey-

ſpiel von zuſammengeſetzten Gliedern, ungeachtet ſie in die einfache Regel de Tri gehört.

6) Wenn 12 Perſonen in 6 Tagen mit einer Arbeit fertig werden, und man wollte finden, wie viel Arbeiter nöthig ſind, ſie in 3 Tagen zu vollenden, ſo würde offenbahrer Unſinn heraus kommen, wenn man ſchlöſſe:

6 T. : 12 P. = 3 T. : 6 Perſonen.

Diß fühlten die gemeine Rechenmeiſter und verfielen daher auf eine ſogenannte umgekehrte Regel de Tri, (Regula trium inverſa) im Gegenſatz der bißher erklärten gewöhnlichen (Regula trium directa.) Hier war ihre Vorſchrift: Multiplicire die 2 erſten Glieder und dividire mit dem letzten. Z. E.

6 T : 12 P. = 3 T.
6

3 : 72 | 24 Perſonen.

Nun erhält man zwar auf dieſe Art eine richtige Antwort, aber es entſteht die neue ſchwierigere Frage: Welche Aufgaben gehören dann in die gewönliche, welche in die verkehrte Regel de Tri? Auch hierüber gaben ſie weitläuftige, oft unbeſtimmte, wenigſtens dem Anfänger ſchwere Regeln. Alle, nebſt der ganzen verkehrten Regel de Tri, kann man auf folgende Art entbehren.

§. 222.

Die 3 gegebene Glieder der Regel de Tri ſo ordnen, wie es die Natur der Proportion und der Frage erfordert, oder die Regel de Tri anſetzen.

Auflöſung.

Unter den 3 gegebenen Gliedern ſind immer 2 ähnliche und ein unähnliches, daher

1) Gebe man dem unähnlichen die mittlere Stelle, oder mach' es zum 2ten Glied.

2) Beurtheile aus der Natur der Frage, ob das zu findende 4te Glied gröſſer, oder kleiner, als das 2te ſeyn müſſe.

3) Im erſten Fall bekommt das kleinere, im letzten das gröſſere, von den ähnlich gleichnamigen Gliedern, die 1te Stelle, und folglich das übrig bleibende die letzte. Z. E. die §. 221. Nr. 6. vorgetragene Aufgabe ſtünde nun alſo:

3 T. : 12 P. = 6 T. : 24 Perſonen.

M. A. dritte von mir verbeſſerte Ausgabe p. 78.

§. 223.

Die Regel de Tri findet immer die 4te geometriſche Proportionale. Daher läßt ſich leicht nach (§. 216) die Probe anſtellen, ob man richtig gearbeitet habe, wenn man das gefundne 4te Glied mit dem 1ten multiplicirt. Iſt diß Produckt, dem anfänglich (§. 220.) gefundenen Produckt des 2ten und 3ten

Glieds gleich, ſo iſt richtig gerechnet. Z. E.

$$\begin{array}{lll} 2 : 4 = 8 & \text{nun iſt} & 16 \\ \quad\ \ 8 & & \ \ 2 \\ \hline 2 : 32 \mid 16 & & 32 = 4 \times 8 \text{ folglich} \\ & 2 : 4 = 8 : 16 & \text{gewiß} \end{array}$$

Anmerkung.

Dieſe Prüfung hat, vor der gewöhnlichen bekannten, den beträchtlichen Vorzug, daß ſie weit einfacher und kürzer iſt, indem ſie das neue Anſchreiben 3er Sätze und die Diviſion vermeidet. Siehe die gewöhnliche unter andern in M. A.

§. 224.

Oft ſoll ein ganzes ſo getheilt werden, daß die Theile ein vorhin beſtimmtes Verhältnüß unter einander haben. Diß geſchieht bey der Geſellſchafts-Rechnung (Regula Societatis.) Und oft beſtimmt man das Verhältnüß 2er Gröſſen durch mehr als 2 Verhältnüſſe anderer Gröſſen, wovon die beyde erſtere abhängen, wozu man ſich der ſo genannten Reeſiſchen Regel bedient. Dieſe gehören alſo, nebſt der Regel de Quinque, in die zuſammengeſetzte Regel de Tri (§. 221. 5.) von welcher nun gehandelt werden muß.

§. 225.

Wenn 2 geometriſche Proportionen mit einander multiplicirt werden, ſo iſt auch das Produckt eine Proportion. Z. E.

$$\begin{array}{l} a : am = b : bm \\ c : cn = d : dn \\ \hline ac : acmn = bd : bdmn \end{array}$$

Beweiß.

Dann auch hier iſt ac $\times$ bdmn = bd $\times$ acmn (§. 216.)

§. 226.

Wenn 2 Wirkungen in gleicher Zeit hervorgebracht werden, ſo verhalten ſie ſich wie ihre Urſachen, und wenn ſie von einerley Urſachen hervorgebracht werden, ſo verhalten ſie ſich wie die Zeiten, in welchen ſie hervorgebracht werden. Es ſeyen die Zeiten t und T, die ſchwächere Urſache = c ihre Wirkung = e. Die ſtärkere Urſache = C und ihre Wirkung = E. So iſt, wenn t = t ; c : C = e : E. Sind aber die Urſachen C = C, die kleinere Zeit = t die gröſſre = T die Würkung in t = E die Wirkung in T = W, ſo wär t : T = E : W.

Da nun wenn

$$\begin{array}{l} t = t)\ c : C = e : E \text{ und wenn} \\ C = C)\ t : T = E : W \text{ folglich (§.225.)} \\ \hline ct : CT = eE : EW \text{ und } (:E \\ \hline ct : CT = e : W \end{array}$$

§. 227.

Daher iſt auch ct : e = CT : W (§. 217. 1.) und diß iſt der wahre Grund von der Regel de Quin-

que welche unter andern M. A. p. 98 — 102. vorkommt. Eine einige Aufgabe ſoll die Anwendung deſſelben erläutern. Wenn z. E. 3. Koſtgänger in 6 Wochen 8 fl. bezahlen, wie viel werden 9 Koſtgänger in 18 Wochen bezahlen müſſen? hier ſind

3 Koſtg. = c 8 fl. = e 9 Koſtg. = C
6 Woch. = t 18 Woch. = T daher

$$c \times t : e = C \times T : W$$

|| || || || ||

3 K. × 6 W. : 8 fl. 9 K. × 18 W. : W oder

$$ct : e = CT : W$$

$$18 : 8 = 162 : 72$$ Wochen (§. 220.)

Hier erhellt die Regel ſelbſt, theils aus der Anwendung des §. theils ſteht ſie in der angeführten Stelle. Die Prüfung kommt mit (§. 223.) überein. Den Anſatz lehrt (§. 222. verbunden mit §. 206.) Dann e iſt gewiß der unähnliche Satz und da W > e ſo muß auch eben ſo gewiß ct die erſte Stelle erhalten. Weil nun bey dergleichen Aufgaben gemeiniglich (nicht nothwendig) 5 Glieder vorkommen, ſo hat ſie den Namen Regel de Quinque erhalten.

Anmerkung.

Niemand wende ein: Die Regel de Quinque wird in unzählichen Fällen gebraucht, wo nicht gerade wirkende Urſachen und Wirkungen vorkommen. Dann die Glieder der zuſammengeſetzten Verhältnüſſe, werden ſich doch immer nach (§. 226.) verhalten. Z. E. Maaſe, Geſchwindigkeiten, ꝛc.

§. 228. Zuſatz 1.

Daß ſich dergleichen Aufgaben auch durch eine doppelte Anwendung der einfachen Regel de Tri aufloͤſen laſſen, wie in M. A. p. 98. zeigt ſich folgendermaſen:

c : e = C : E und nun

t : E = T : W (§. 226.)

Welches allenfalls eine andere Probe abgeben kann.

Zuſatz 2.

Wenn in einer Aufgabe, aus den Umſtaͤnden, c, t, C, T, und e, richtig beſtimmt worden, ſo kann auch die Aufloͤſung, der ſonſt ſchweren verkehrten Regel de Quinque M. A. p. 101. nicht ſchwer fallen.

§. 229.

Wenn mehrere Verhaͤltnuͤſſe ſo unter einander geſchrieben werden, daß immer das nachfolgende Glied des 1ten, das vorhergehende Glied des unmittelbar folgenden Verhaͤlnuͤſſes wird, ſo verhaͤlt ſich das Produckt aller vorhergehenden Glieder, zum Produckt aller nachfolgenden, wie das vorhergehende Glied des 1ten Verhaͤltnuͤſſes, zum nachfolgenden Glied des allerletzten Verhaͤltnuͤſſes.

Beweiß.

a : b

b : c

$$\begin{array}{ccc} c & : & d \\ d & : & e \\ e & : & x \end{array}$$

abcde : bcdex (: bcde ſo iſt

abcde : bcdex = a : x (§. 205.)

§. 230.

Die Reeſiſche Regel (Kettenregel, Conjoint, Multipler) findet das Verhältnüß 2er Gröſſen aus dem Verhältnüß mehrerer Gröſſen, von welchen die zu findende abhangen, ohne alle einzelne Zwiſchenfragen der mittlern Verhältnüſſe beſonders aufzulöſen. Man verlangt z. E. zu wiſſen: Wie viel 9 rauhe fl. in Sächſiſchen Groſchen betragen, wenn 5 Reichsgulden 6 rauhe Gulden, 3 Reichsgulden 2 Reichsthaler und 1 Reichsthaler 24 Sächſiſche Groſchen betragen. Hier liegen nun wirklich zwiſchen den 9 fl. und den geſuchten Sächſiſchen Groſchen mehrere Verhältnüſſe, von welchen das Verhältnüß derſelben abhängt. Dann wenn man wüßte:

a) 1) Wie viel 9 rauhe fl. in Reichs fl. betrügen, und

2) Wie viel dieſe Nr. 1. gefundne Summe in Reichsthalern ausmachte,

3) So ließ ſich durch das letzte angegebene Verhältnüß 1 Reichsthaler = 24 Sächſiſche Groſchen, leicht finden; Wie viel Sächſiſche Groſchen die 9 rauhe fl. ausmachten. Nun ſeyen

die Reichsgulden = x, die Reichsthaler = y die Sächſiſche Groſchen = z ſo wäre

1) 6 R. fl. : 5 Reichs fl. = 9 R. fl. : x
2) 3 Rchs. fl. : 2 Reichsth. = x : y u. endl.
3) 1 Rthlr. : 24 S. Gr. = y : z folgl.

$$1.\ 3.\ 6 : 24.\ 2.\ 5 = y.\ x.\ 9 : z.\ y.\ x \text{ oder}$$

$$1.\ 3.\ 6 : 24.\ 2.\ 5 = 9 : z \ (\text{§}.205. \text{ und } 229.)$$

$$24.\ 2.\ 5.\ 9 = 1.\ 3.\ 6.\ z \ (\text{§}.215)$$

$$\frac{24.\ 2.\ 5.\ 9}{1.\ 3.\ 6.} = Z \text{ od. } \frac{2160}{18} = Z \text{ das iſt}$$

$$120 = Z$$

b) Man erhält aber das nemliche, wenn man die Aufgabe gleich Anfangs folgendermaſen ordnet, und mit dem Produckt aller vorhergehenden Glieder ins Produckt aller nachfolgenden dividirt.

$$\begin{array}{ccc} z & : & 9 \\ 6 & : & 5 \\ 3 & : & 2 \\ 1 & : & 24 \\ \hline \end{array}$$

$$18\,z = 2160 \ (: 18$$

$$z = 120$$

§. 231.

Nun ſind noch die Fragen übrig: Wie kann man alle Aufgaben am leichteſten nach der Reeſiſchen Regel anſetzen, wie prüft man die nach ihr berechnete

Aufgaben, wo wird ſie mit wahrem Vortheil angebracht? Die 1 Frage erhält eine doppelte Antwort:

a) Will man ganz ſicher gehen, ſo löſe man die ganze Aufgabe, wie (§. 230.) geſchehen, in einzelne Proportionen auf.

b) Mechaniſch abkürzende Regeln] des Anſatzes giebt M. A. p. 110—114. ſowohl, als Exempel zur Uebung, beyde erhalten ihren Beweiß aus (§. 230.)

2) Man mache das Geſuchte zum Gegebenen und das Gegebene zum Geſuchten, ſo muß wiederum das anfänglich gegebene 1te Glied heraus kommen. (§. 217. Nr. 2.)

3) So lang gewöhnliche Regel de Tri und de Quinque zur bequemen Auflöſung einer Aufgabe hinreichen, braucht man die Reeſiſche nicht. Müßte man aber die einfache Regel de Tri 2. 3. 4. ꝛc mal anwenden, ſo wird die Reeſiſche Regel die Arbeit erſtaunend abkürzen, daher hat ſie ihren Hauptnutzen bey Wechſelrechnungen.

§. 232.

Die Geſellſchaftsrechnung lehrt uns ein Ganzes in verſchiedene Theile alſo theilen, daß die gefundene Theile ein vorhin beſtimmtes Verhältnüß unter ſich haben. (§. 224.) Nun ſeye das Ganze = a die zu findende Theile = x, y, z. Dieſe ſollen ſich ver-

halten wie b : c; c : d demnach wären die Theile welche das Verhältnüß beſtimmen

b, c, und d, die zu findende x, y, z.

Aufloͤſung.

1) Dividirt das Ganze durch die Summe der Theile welche das Verhältnüß beſtimmen.

2) Multiplicirt den Quotienten durch einen jeden Theil beſonders.

3) Die Produckte geben die verlangte Theile. Z. E.

$\frac{a}{b+c+d}$ nach Nr. 1. u. $\frac{a}{b+c+d} \times b = x$ ferner $\frac{a}{b+c+d} \times c = y$ u. $\frac{a}{b+c+d} \times d = z$ (Nr. 2. u. 3.)

Beweiß.

Es iſt zu zeigen daß $x : y = b : c$ und $y : z = c : d$.

Weil $\frac{ab}{b+c+d} = x$ und $\frac{ac}{b+c+d} = y$ ſo wär $\frac{ab}{b+c+d} : \frac{ac}{b+c+d} = b : c$ Nun iſt

$$\frac{abc}{b+c+d} = \frac{abc}{b+c+d}$$ daher (§. 216)

wirklich $\frac{ab}{b+c+d} : \frac{ac}{b+c+d} = b : c$ und weil $\frac{ab}{b+c+d} = x$, $\frac{ac}{b+c+d} = y$ ſo iſt auch

$$x : y = b : c$$

Auf die nemliche Art zeigt ſich daß $y : z = c : d$.

Dieſe allgemeine Auflöſung giebt uns folgende leichte Regeln.

1) Man addire die Theile welche das Verhältnüß beſtimmen, nach welchem das Ganze getheilt werden ſoll, und ihre Summe giebt in der anzubringenden Regel de Tri den 1ten Satz.

2) Das Ganze welches man theilen ſoll, giebt den 2ten Satz.

3) Der 3te Satz iſt, für die Erfindung des 1ten geſuchten Theils, der 1te Nr. 1. gegebene Theil, für den 2ten geſuchten, der 2te Nr. 1. gegebene ꝛc. ꝛc.

Zuſatz a.

Die einfache Regel de Tri muß daher ſo oft angewendt werden, als Theile vorhanden ſind, und geſucht werden.

Zuſatz b.

Das Verhältnüß der beyden 1ten Sätze bleibt in der nemlichen Aufgabe immer das nemliche. Man kann es daher nach (§. 205. Nr. 2.) ſo klein als möglich machen, um beſchwerlichen Multiplicationen und Diviſionen auszuweichen.

Zuſatz c.

Multiplicator und Diviſor bleiben in der nemlichen Aufgabe die nemlichen (Zuſ. b.) daher bringt hier die Multiplication und Diviſion ohne Einmal Eins (§. 82. und §. 101. Anmerk. 2.) ausnehmende Vortheile.

Anmerkung 1.

Die bißher vorgetragene Gründe und Regeln der Geſellſchaftsrechnung, liefern die Beweiſe für alle in M. A. häufig zur Uebung angegebene Aufgaben.

Anmerkung 2.

Die Probe ob man richtig gerechnet iſt ſehr leicht. Man addirt alle gefundne Theile, ihre Summe muß dem getheilten Ganzen gleich ſeyn. (§. 61.)

Anmerkung 3.

Die Geſellſchaftsrechnung wird hauptſächlich angewendet

a. Bey Handlungsgeſchäften. Mündlich von Haſerey und Mascopey.

b. Bey Vermiſchung verſchiedener Dinge zu einem Ganzen.

c. Bey Theilungsgeſchäften.

e. Bey Schatzungsanlagen und andern Vermögens Steuren.

§. 233.

Hieher gehört noch die Vermiſchungs Regel (Regula allegationis) Sie lehrt uns 2 oder mehrere Dinge von verſchiedenem Werthe, ſo vermiſchen, daß das vermiſchte einen beſtimmten mittlern Werth erhält. Z. E. Man hat ſchlechten Wein wovon 1 Maas 10 kr. und beſſern wovon 1 Maas 16 kr. koſtet. Wie viel muß von beyden Sorten genommen werden, um 1 Maas für 12 kr. geben zu können?

Es ſeye 16 kr. = a, 10 kr. = b, 12 kr. = c, 1 Maas = 1, die Menge des ſchlechtern = x, ſo iſt ſein Werth = bx die Menge des beſſern = 1—x folglich ſein Werth = a—ax daher iſt

$$a - ax + bx = c \quad (+ ax$$

$$a + bx = ax + c \quad (- bx$$

$$a = ax - bx + c \quad (- c$$

$$a - c = ax - bx \text{ oder}$$

$$a - c = (a - b)x \text{ (§. 93.) } (: a - b)$$

$$\frac{a - c}{a - b} = x$$ folglich wenn ſubſtituirt wird

$\frac{16-12}{16-10} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = x$. Demnach muß vom ſchlechtern $\frac{2}{3}$ Maas, vom beſſern $\frac{1}{3}$ Maas genommen werden, in dem wirklich $\frac{2}{3}$ Maas vom 10 kr. Wein = $6\frac{2}{3}$ kr., $\frac{1}{3}$ Maas vom beſſern aber $5\frac{1}{3}$ kr. koſten, folglich die alſo vermiſchte Maas auf 12 kr. zu ſtehen kommt. Hieraus flieſſen vor die Miſchung zweyer Dinge folgende Regeln:

1) Sucht den Unterſchied des höchſten und mittlern Werths.

2) Sucht den Unterſchied des höchſten und geringſten Werths.

3) Dividirt den 2ten Reſt in den erſten.

4) Der Quotient zeigt wie viel vom ſchlechtern zu nehmen.

5) Dieſen zieht von der Gröſſe des zu vermiſchenden ab, ſo bleibt die Menge des beſſern.

Anmerkung.

Aufgaben zur Uebung ſiehe M. A. p. 108. 109. 110. Die Münzwiſſenſchaft, Verarbeitung der Metalle überhaupt, Frucht, Wein ꝛc. Handel, braucht dieſe Regel. Mehrere Dinge ſo zu miſchen, zeigt die Algebra. Man ſehe Eulers Algebra, 2ten Theil p. 174. ingleichem Makers Algebra §. 302. alte Ausg.

§. 234.

Noch etwas muß von denen bey der Regel de Tri anzuwendenden Vortheilen geſprochen werden. Alle Hauptvortheile betreffen entweder ſolche Aufgaben, wo lauter Ganze vorkommen, oder es finden ſich in den 3 gegebenen Sätzen gebrochene Gröſſen. Die erſtern gründen ſich auf (§. 205. Z. 2.) die letzten auf den ganzen IIIten Abſchnitt. Von allen überhaupt ſpricht M. A. p. 83—89. wovon mündlich die Beweiſe. Nur die Vortheile bey vorkommenden Brüchen, worinn ich etwas von Malern abgehe, will ich noch kurz berühren.

§. 235.

So oft in einer einfachen Regel de Tri Brüche vorkommen, ſo finden ſich dieſelbe

1) Entweder nur in einem Satz folglich

a. Entweder im 1ten,

b. Oder im 2ten,

c. — — 3ten.

2) Oder in mehrern, daher

a. Entweder in 2 Sätzen, und zwar

α. In beyden vordern,

β. Oder im vordern und hintern,

γ. Oder in beyden letztern Sätzen.

b. Oder in allen 3 Sätzen.

Alſo wären es überhaupt ſieben Fälle. Für die 5 erſten merke man folgende allgemeine Regel: Schafft alle Brüche weg. Für den 6ten: Man verwandle auch den erſten Satz in einen Bruch und behandle die Aufgabe nach dem 7ten Fall. Folgende bloß angezeigte Aufgaben erläutern dieſe gegebene Regeln.

I. $\frac{2}{3} : 4 = \frac{8}{3}$

$2 : 4 = 24$

II. $\frac{4}{3} : \frac{2}{3} = 8$

$12 : 2 = 8$

III. $\frac{4}{3} : 8 = \frac{2}{3}$

$12 : 8 = 2$

IV. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = 6$

$2 \times 5 : 4 \times 3 = 6$

$10 : 12 = 6$

V. $\frac{2}{3} : 6 = \frac{4}{5}$

$2 \times 5 : 6 = 4 \times 3$

$10 : 6 = 12$

(I.–V.: §. 123. Nr. 18 u. §. 217. N. 1. u. 7.)

VI. $6 : \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$

$\frac{6}{1} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$ } §. 124. Nr. 1.

VII. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$ §. 220.

$\frac{3}{2} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$ (§. 140. u. 138. u. §. 141. Z. 2.)

$\frac{3}{2} : \frac{1}{5} = \frac{3}{1}$

$$\frac{3 \times 1 \times 3}{2 \times 5}$$

$$\frac{9}{10}$$

Und diß mag von den Vortheilen genug ſeyn. Dann Käſtner urtheilt hier (wie aller Orten) aufs treffendſte: „Dieſe und ähnliche Vortheile heißt man „die welſche Practick. Wer viel rechnen muß „und die Gründe des Rechnens verſteht, erfindt ſie „ſelbſt, und einem andern iſt nichts an ihnen gele= „gen.„ Die ausführlichſte theoretiſche Behandlung des practiſchen in der Regel de Tri, findet man in Karſtens Lehrbegriff der Mathematick, erſten und Anfang des 2ten Theils.

VII. Abſchnitt.

Von den Progreſſionen.

§. 236.

Da ſich auf dieſe Materie der ganze Abſchnitt von den Logarithmen gründet, und umgekehrt verſchiedene

Progreßions Aufgaben, erſt durch die Logarithmen in ein gehöriges Licht geſetzt werden können, ſo werd ich hier nur das vortragen, was die Geſetze der Lehrart verlangen und erlauben, das übrige aber bey den Logarithmen nachholen.

§. 237.

Eine Progreßion iſt eine Reihe Gröſſen, welche nach ein und eben demſelben beſtimmten Geſetz wachſen oder abnehmen. Z. E. 1. 2. 3. 4. 5. 6. oder 1. 2. 4. 8. 16. 32. oder allgemein $a. a+d. a+2d. a+3d. a+4d.$ oder $a. am. am^2. am^3. am^4. am^5.$ die einzelne Gröſſen woraus dieſe Reihen beſtehen, heiſſen Glieder der Progreßion.

Zuſatz 1.

Folglich giebts überhaupt zweyerley Progreßionen, wachſende (creſcentes) und abnehmende (decreſcentes.) Man nennt ſie auch ſteigend und fallende Progreßionen. So ſind z. E. die im §. gegebene Reihen wachſende Progreßionen, man kehre ſie um ſo ſinds abnehmende.

§. 238.

Unter vielen andern ſind 2 Haupt Geſetze merkwürdig, nach welchen dergleichen Gröſſen fortſchreiten können. Dann

1) Sie ſind entweder fortgeſetzte, ſtätige, arithmetiſche Proportionen. (§. 209.) Alsdann

hat man eine arithmetiſche Progreßion indem (2—5=5—8=8—11) = 2. 5. 8. 11. Daher ſie bequem nach (§ cit. Z. 2.) ſo ausgedruckt werden: ∸ 2. 5. 8. 11 oder ∸ a. a+d. a+2d. a+3 d ꝛc.

2) Oder ſie ſind fortgeſetzte, ſtätige, geometriſche Proportionen (§. 209. Z. 2.) und nun erhält man eine geometriſche Progreßion. Z. E. 2 : 4=4 : 8=8 : 16= 16 : 32= ∺ 2. 4. 8. 16 . 32. oder a : am=am : am^2=am^2 : am^3=am^3 : am^4 = ∺ a. am. am^2. am^3. am^4.

3) Daher ſind in Nr. 1. die Differenzen, in Nr. 2. aber, die Exponenten gleich.

§. 239.

Nun ſey in der ſteigenden arithmetiſchen Progreſſion das 1te Glied = a die Differenz = d, ſo iſt die Progreßion ſelbſt

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
a.	a+d.	a+2d.	a+3d.	a+4d.	a+5d

und wenn in der fallenden das erſte Glied = a ſo iſt die Progreßion ſelbſt:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
a.	a—d.	a—2d.	a—3d.	a—4d.	a—5d.

Woraus folgende Eigenſchaften dieſer Progreßionen flieſen:

1) In der ſteigenden Progreßion iſt das folgende Glied immer = dem unmittelbar vorhergehenden +

der Differenz, in der fallenden gleichfalls, aber — der Differenz.

2) In der ſteigenden iſt das letzte Glied immer = dem 1ten + der Differenz, welche mit der Zahl der Glieder weniger 1 multiplicirt worden. In der fallenden aber = dem 1ten Glied — der Differenz, welche vorhin mit der Zahl der Glieder weniger 1 multiplicirt worden.

3) Wenn daher die Zahl der Glieder = n, das letzte Glied = u ſo wär im 1ten Fall $u = a + (n - 1)d$ und im 2ten Fall, $u = a - (n - 1)d$.

4) Da man jedes Glied für u annehmen kann, ſo läßt ſich auch aus a, d und dem durch u beſtimmten n die Gröſſe eines jeden verlangten Glieds finden. Z. E. für das IVte Glied wäre u = IVten Glied, folglich n = 4, daher nun das IVte Glied = $a + 3d$ in der ſteigenden und in der fallenden = $a - 3d$.

5) Die Summe des 1ten und letzten Glieds iſt immer = der Summe zweyer, gleichweit von den beyden äuſſerſten Gliedern, entfernter Glieder.

Z. E. I. = a II. = $a + d$
VI. = $a + 5d$ V. = $a + 4d$ ſo iſt

$$2a + 5d = 2a + 5d$$

Daher iſt auch die Summe des 1ten und IIIten Glieds = dem IIten Glied × 2. Z. E.

I. = a II. = $a + d$
III. = $a + 2d$ 2

$$2a + 2d = 2a + 2d$$

6) Folglich iſt auch die Summe aller Glieder = dem 1ten + dem letzten multiplicirt mit der Zahl der Glieder, dividirt durch 2. Z. E.

$$\begin{array}{ll|l}
\text{I.} & = a & \text{I.} = a \\
\text{II.} & = a+d & \text{VI.} = a+5d \\
\hline
\text{III.} & = a+2d & \quad 2a+5d \\
\text{IV.} & = a+3d & \quad\quad 6 \\
\hline
\text{V.} & = a+4d & \\
\text{VI.} & = a+5d & \quad 12a+30d\ (:2 \\
\hline
 & 6a+15d & = \quad 6a+15d
\end{array}$$

und wenn daher S = der Summe ſo iſt

$$S = \frac{(a+u)n}{2} = S = (a+u)\,\frac{n}{2} = S = \frac{(a+u)}{2} \times n.$$

7) Eine jede arithmetiſche Progreßion, deren 1tes Glied nicht 0 iſt, kann in eiue andre verwandelt werden, wo $a = 0$. Dann es ſeye die Progreſſion ganz allgemein:

$$\begin{array}{lllll}
\div\ a. & a+d. & a+2d. & a+3d & \\
-a & -a & -a & -a & \text{ſo iſt} \\
\hline
\div\ 0. & d. & 2d. & 3d. &
\end{array}$$

Das iſt man ſubtrahirt a von allen Gliedern, ſo erhält man eine neue, der Vorigen in Abſicht auf die Differenz, gleiche Progreßion, in welcher $a = 0$.

§. 240.

Man kann alſo aus dem (§. 239.3.) gegebenen, u, und aus dieſem, a, d und n finden.

1)

$1)\ u = a + (n - 1)\, d$ wår nun u bekannt a

$2)\ u - (n - 1)\, d = a$ unbekannt, ſo iſt

$u = a + (n - 1)\, d$ Wår u bekannt und d

$u - a = (n - 1)\, d$ unbekannt, ſo iſt

$$3)\ \frac{u - a}{n - 1} = d$$

$u = a + (n - 1)\, d$ Iſt u bekannt und n

$u - a = (n - 1)\, d$ unbekannnt, ſo wird n

$$\frac{u - a}{d} = n - 1$$

$$4)\ \frac{u - a}{d} + 1 = n$$

§. 241.

Da $S = \frac{(a+u)n}{2}$ (§. 239. Nr. 6) ſo låßt ſich auch hier, wenn 3 von den in dieſer Gleichung vorkommenden Gröſſen gegeben ſind, die 4te, ja, wenn vor u ſein (§. 239. Nr. 3.) gefundner Werth ſubſtituirt wird, auch d finden. Es ſeye z. E.

$S = \frac{(a+u)n}{2}$ und u unbekannt

$$2S = (a+u)\, n$$

$$\frac{2S}{n} = a + u$$

$$1)\ \frac{2S}{n} - a = u$$

$$S = \frac{(a+u)n}{2}$$ Wår a unbekannt

$$2)\ \frac{2S}{n} - u = a$$

$$S = \frac{(a+u)n}{2}$$ Wår n unbekannt

$$3)\ \frac{2S}{a+u} = n$$

$$S = \frac{(a+u)n}{2}$$ Iſt d zu finden

$$S = \frac{(a+a+(n-1)d)n}{2}$$ (§. 239. Nr. 3. u. 6.)

$$\frac{2S}{n} = 2a + (n-1)d$$

$$\frac{2S}{n} - 2a = (n-1)d$$

$$\frac{2S-2an}{n} = (n-1)d$$

$$4)\ \frac{2S-2an}{n^2-n} = d$$

Zuſatz.

Die, in den beyden vorhergehenden §. §. entwickelte Formeln werden mündlich in Zahlen erläutert. Eine kleine Vergleichung zeigt daß

1) Im §. 239. Nr. 3. der Beweiß für §. 86. in M. A.

2) Im §. cit. Nr. 6. der Beweiß für §. 87. in M. A. und endlich

3) Im §. 240. Nr. 3. der Beweiß für die p. 193. M. A. vorgetragenen Aufgaben enthalten ſeye.

4) Aufgaben und Anwendungen dieſer Lehre findet man M. A. Kap. 6. und in Eulers Algebra 1tem Theil 3ten Abſchnitt Kap. 3. 4. und 5.

§. 242.

Wenn in der ſteigenden geometriſchen Progreßion das 1te Glied = a und der Exponent = m, ſo wäre die Progreßion ſelbſt:

I. II. III. IV. V. VI.

∺ a. am. am^2. am^3. am^4. am^5 Und in der fallend.
∺ am^5. am^4. am^3. am^2. am. a wenn das 1te Glied = am^5. Auch hier geben ſich wie (§. 239.) die Eigenſchaften dieſer Progreßion.

1) In der ſteigenden iſt das folgende Glied immer = dem unmittelbar vorhergehenden multiplicirt in den Exponenten. In der fallenden hingegen iſts = dem unmittelbar vorhergehenden dividirt durch den Exponenten. (§. 91. Z. 3. §. 105. Z. 1.)

2) In allen Gliedern, das 1te in der ſteigenden und das letzte in der fallenden ausgenommen, iſt der Exponent als Factor, enthalten.

3) Das letzte Glied in der ſteigenden iſt $=$ dem 1ten $\times$ durch den Exponenten, der ſo oft in ſich ſelbſt multiplicirt worden, als die Anzahl der Glieder Einheiten hat, weniger eins Z. E. $a \times m^5 = am^5$. In der fallenden hingegen iſts $=$ dem 1ten dividirt durch den Exponenten, der ſo oft in ſich ſelbſt multiplicirt wurde, als die Zahl der Glieder Einheiten hat, weniger 1. Z. E. $am^5 : m^5 = a$.

4) Nun ſeye die Zahl der Glieder $=$ n das letzte $=$ u ſo iſt in der ſteigenden $u = am^{n-1}$ und eines weiter als das letzte $= am^n$ in der fallenden $u = \frac{am^{n-1}}{m^{n-1}}$, und da hier das 1te $= am^{n-1}$ ſo iſt eins weiter als das 1te am^n.

5) Auch hier kann man jedes Glied für u annehmen, folglich läßt ſich auch aus dem 1ten Glied, m, und dem durch das angenommene u beſtimmten n ein jedes verlangtes Glied finden. Z. E. das 3te: Hier wär $u =$ dem 3ten Glied, folglich $n = 3$ daher in der ſteigenden Progreßion das 3te Glied ſelbſt $= am^2$, in der fallenden aber $= am^5 : m^2 = am^3$.

6) Das Produckt aus dem 1ten Glied ins letzte iſt gleich dem Produckt aus irgend 2 andern gleichweit vom 1ten und letzten entfernten Gliedern.

I. VI. II. V.

Z. E. $au = a. \times am^5$ und $am \times am^4$

$au = a^2m^5 = a^2m^5$

7) Ferner iſt au in der ſteigenden Progreßion $= a^2 \times m^{n-1}$ Dann es ſeye $n=6$ ſo iſt

$$\begin{array}{ll} a=a & a \times a = a^2 \\ u=am^5 & m^{n-1} = m^5 \\ \hline au=a^2m^5 & = a^2m^5 \end{array}$$

In der fallenden hingegen iſt $au=u^2 \times m^{n-1}$ dann $u^2 = a^2$ $a = am^5$

$$\begin{array}{ll} m^{n-1} = m^5 & u = a \text{ daher} \\ \hline u^2 \times m^{n-1} & = a^2m^5 = au = a^2m^5 \end{array}$$

8) Wenn man die Summe einer ſteigenden geometriſchen Progreßion = S mit m — 1 multiplicirt, ſo iſt das Produckt = der Differenz des 1ten Glieds und eines Glieds weiter als das letzte. Es ſey n= 6. ſo wär die Progreßion.

$$\begin{array}{l} a + am + am^2 + am^3 + am^4 + am^5 \\ m - 1 \\ \hline am + am^2 + am^3 + am^4 + am^5 + am^6 \\ \quad - a - am - am^2 - am^3 - am^4 - am^5 \\ \hline am^6 - a = S \times (m-1) \end{array}$$

9) Da nun $am^{n-1} = u$ ſo iſt $am^n = u \times m$ u. da $am^n - a = S \times (m-1)$ und $(: m-1)$

$$\frac{am^n - a}{m-1} = S \text{ weil aber}$$

$\frac{am^n - a}{m-1} = \frac{am^{n-1} - a}{m-1} + am^{n-1}$ und am^{n-1} $= u$ ſo iſt auch $S = \frac{u-a}{m-1} + u$.

10) Wird in der fallenden das letzte Glied für das 1te und das 1te für das letzte angenommen, ſo kann auch hier Nr. 8. und 9. oder die Regeln für S zu finden, angewendet werden.

11) Eine jede geometriſche Progreßion, deren erſtes Glied $\lessgtr$ 1 kann in eine andre verwandelt werden, wo $a = 1$ ohne daß m verändert würde. Dann es ſey $a => 1$ z. E. 2. und $m = 3$ ſo wär ſie ∺ 2. 6. 18. 54. Nun dividirt man mit a in alle vorhandene Glieder, ſo erhält man ∺ 1. 3. 9. 27. Wär aber $a =< 1$ z. E. $\frac{1}{2}$ und $m = 2$ ſo wär ∺ $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. ꝛc. und nun multiplicirt man mit dem Nenner des 1ten Glieds alle vorhandene Glieder, ſo hat man ∺ 1. 2. 4. 8. 16. ꝛc.

§. 243.

Da $u = am^{n-1}$ (§. 242. 4.) ſo kann auch hier, wie (§. 240.) wenn 3 von den in der Gleichung vorkommenden Gröſſen gegeben ſind, immer die 4te gefunden werden. Z. E.

1. $u = am^{n-1}$ wenn u unbekannt wäre

2. $\frac{u}{m^{n-1}} = a$ wenn a unbekannt wäre.

3. Wäre m unbekannt, ſo wird diß in der 1ten Gleichung reducirt. Z. E.

$$u = am^{n-1}$$

$$\frac{u}{a} = m^{n-1}$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = m$$

4. n läßt ſich erſt im 9ten Abſchnitt finden.

§. 244.

Weil $S = \frac{am^n - a}{m - 1}$ ſo findt man auch hier aus 3 gegebenen bekannten Grössen die 4te Z. E.

1. $S = \frac{am^n - a}{m - 1}$ wenn S unbekannt wäre.

$S(m-1) = (m^n - 1)a$ Wär a unbekannt, ſo iſts

2. $\frac{S(m-1)}{m^n - 1} = a$

3. Iſt u unbekannt, ſo ſucht man nach Nr. 2. a und dann läßt ſichs aus a, m u. n nach (§. 243. 1) leicht finden.

4. Wäre m unbekannt, ſo ſuche man u (Nr. 3.) alsdann iſt, weil (§. 242. 9.) $S = \frac{u - a}{m - 1} + u$.

$$Sm - S = u - a + mu - u$$

$$Sm - S = - a + mu$$

$$Sm - mu = S - a$$

$$(S - u)\,m = S - a$$

$$m = \frac{S - a}{S - u}$$

5. n kann erſt im IXten Abſchnitt gefunden werden, wo überhaupt manche Abkürzungen und Erleichterungen dieſer Berechnungen vorkommen.

§. 245.

Geſetzt man hätte folgende Progreßion

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \ldots \frac{1}{\infty}$$

ſo kann man ſich dieſelbige wenigſtens, ins unendliche fortgeſetzt, gedenken, indem ja das Glied, welches jemand für das letzte ausgeben wollte, noch immer mit dem Exponenten aufs neue multiplicirt werden kann. Auch dergleichen Progreßionen laſſen ſich ſummiren, wenn ſie fallend ſind, aber nicht wenn ſie ſteigen. Dann im erſten Fall werden die Glieder endlich ſo klein, daß ſie verſchwinden, folglich ohne Gefahr zu irren können weggelaſſen werden. Im 2ten Fall hingegen, werden ſie immer gröſſer und nach und nach unendlich groß. Bey dergleichen unendlichen fallenden Progreßionen giebts 2 Fälle. Entweder ſind alle Glieder + oder die Zeichen wechſeln ab. Von der erſten Art iſt das ſchon gegebene Beyſpiel, die 2ten ſehen ſo aus:

$\div + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ ꝛc. Für beyde ſollen nun Formeln gefunden werden.

§. 246.

Es ſeye das 1te Glied = a der Exponent $\frac{m}{n}$ ſo iſt die Progreßion

$$a + \frac{am}{n} + \frac{am^2}{n^2} + \frac{am^3}{n^3} + \frac{am^4}{n^4} \ldots \text{ ins Unendl.}$$

Folglich die Summe

$$\text{I. } S = a + \frac{am}{n} + \frac{am^2}{n^2} + \frac{am^3}{n^3} + \frac{am^4}{n^4} \left(\times \frac{m}{n} \right)$$

$$\frac{m}{n}$$

$$\text{II. } S \times \frac{m}{n} = \frac{am}{n} + \frac{am^2}{n^2} + \frac{am^3}{n^3} + \frac{am^4}{n^4} + \frac{am^5}{n^5}$$

Da nun $S \times \frac{m}{n}$ gewiß $< S$ ſo iſt Nr. II. von Nr. I. abgezogen $S - S \times \frac{m}{n} = a$ oder ſchicklicher

---

$$S \times \left(1 - \frac{m}{n}\right) = a$$

$$S = \frac{a}{1 - \frac{m}{n}}$$

$$S = \frac{a}{\frac{n-m}{n}} = (S = a : \frac{n-m}{n} \text{ und } (\text{§. } 140.)$$

$$S = a \times \frac{n}{n-m} \text{ oder}$$

$$S = \frac{an}{n-m}$$ welches die verlangte Formel iſt.

Nun war in der §. 245. angenommenen Progreßion $a = 1$

$\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ daher hier $S = \frac{1 \times 2}{2-1} = 2$ folglich iſt.

$\div\!\div\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \ldots = 2.$

§. 247.

Bey abwechſelnden Zeichen wäre die Progreſſion

$$\text{I. } S = a - \frac{am}{n} + \frac{am^2}{n^2} - \frac{am^3}{n^3} + \frac{am^4}{n^4} \ldots \times \frac{m}{n}$$

$$\text{II. } S \times \frac{m}{n} = \frac{am}{n} - \frac{am^2}{n^2} + \frac{am^3}{n^3} - \frac{am^4}{n^4} \ldots$$

diß addirt $S + S \times \frac{m}{n} = a$ und ſchicklicher

$$S \times \left(1 + \frac{m}{n}\right) = a \text{ oder}$$

$$S \times \left(\frac{n+m}{n}\right) = a \text{ und } : \frac{n+m}{n}$$

$$S = \frac{a}{\frac{n+m}{n}}$$ folglich §. 140.

$$S = \frac{a \times n}{n+m}$$ Nun ſeye die Reihe

$\div\!\div\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ ſo iſt $a = 1$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$

Daher $S = \frac{1 \times 2}{2+1} = \frac{2}{3}$.

Zuſatz 1.

Folglich kann eine unendliche Reihe gar wohl gröſſer ſeyn als eine andere, denn

$\div \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$; ; $= \frac{2}{3}$ und

$\div \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$; ; $= 1$

Ohngeachtet alſo die Reihe unendlich iſt, ſo iſt doch ihre Summe endlich.

§. 248. Anmerkung.

Dieſe ganze Lehre von den Progreßionen, hat den wichtigſten Einfluß in die beyde folgende Abſchnitte, die ganze angewandte Mathematick und Phyſick. Ueberdiß enthält §. 243. 1. der Beweiß für §. 89. M. A. und §. 244. Nr. 1. den Beweiß für §. 90. M. A. überhaupt aber, die Gründe, aller dort zur Uebung vorgetragenen Aufgaben. Anwendung der Formeln in Zahlen, wird mündlich gegeben.

§. 249.

Aus §. 31. biß 38. erhellt: Daß unſre gewöhnliche Zahlen 1. 10. 100. 1000. ꝛc. in einer geometriſchen Progreßion fortſchreiten, worinnen $a=1$, $m=10$ daher man unſre Art zu zählen ſchicklich Dekadick nennen kann. Daß diß Geſetz nicht abſolut nothwendig ſeye, wird hier die Anwendung der Progreßionen, auf die Leibnitziſche Dyadick ꝛc. zeigen. Die Ite Tabelle ſtellt unſre Dekadick und andre Arten zu Zählen

vor, damit ſie kurz erklärt und verglichen werden können.

§. 250.

Aus dieſer Tabelle ſieht man, daß

1) Alle darinnen angegebene Methoden zu zählen in einer geometriſchen Progreßion fortlaufen, worinn der Exponent immer der Zahl der gebrauchten einfachen wirklichen Zahlzeichen + 1 gleich iſt, und man alſo nur auf dieſe Acht geben darf, um die Natur aller dieſer Zählarten einzuſehen.

2) Daß die Glieder dieſer Progreßionen ihren Werth durch das Vorrücken gegen die linke Hand erhalten.

3) Daß, jemehr einfache Zahlzeichen angenommen werden, man deſto weniger Zeichen zu groſſen Zahlen nöthig habe, und umgekehrt.

4) Daß die Dekadick mit den wenigſten und niedrigſten Zahlzeichen, die größten Summen am bequemſten ausdrücke, folglich allen übrigen vorzuziehen.

5) Daß ſich aus dieſen Gründen unzähliche Arten zu Zählen, ohne ſonderlichen Aufwand des Nachdenkens erfinden laſſen. Daß aber auch dieſe ganze Sache mehr zum Vergnügen des Verſtands, als zum wirklichen Gebrauch diene, daher ſie hier nicht weiter erklärt, ſondern die wirkliche Anwendung im Rechnen, nach Beſchaffen=

heit der Zuhörer, dem mündlichen Vortrag vorbehalten wird.

§. 251. Anmerkung.

Die 4 Rechnungsarten der Dyadick und Tetracktick zeigt ausführlich Daries in ſeinen Erſt. Gr. der Mathematick. Die Dyadick erfand Leibnitz und wandte ſie zur Erklärung einiger chineſiſchen Characktere, des dem Kaiſer Fohi zugeſchriebenen Buchs Y——Kim an. Siehe Hiſtoire de l'Academie Royale des ſciençes 1703. p. 175. ed. Amſtel. & Miſcell. Berol. 1710. p. 336. Wiedeburg de præſtantia arithmet. dyadicæ Jenæ 1718. Die Tetracktik erfand Weigel, ſiehe ſeine Aretologiſtica Norimbergæ 1687. Die hier ſo genannte Eikoſitetartick, zeigt wie Haarsdörfers Idee biß auf 24 zu zählen wirklich gemacht werden kann. Und endlich giebt die von mir beygefügte Heptadik ein Beyſpiel, wie noch andre Arten zu erfinden.

VIII. Abſchnitt.

Von den Decimal und Sexageſimal-Brüchen.

§. 252.

Eine Einheit in der 2ten Stelle zur Linken iſt $=10$ in der 3ten $=100$ in der 4ten $=1000$ ꝛc. (§. 36.) oder ihr Werth ſteigt nach einer geometriſchen Progreßion, wo $m=10$. Man nehme gerade das Gegentheil von dieſem willkührlichen Satz an, ſo wird die Einheit in der 1ten Stelle zur Rechten $\frac{1}{10}$ in der 2ten $\frac{1}{100}$ in der 3ten $\frac{1}{1000}$ ꝛc. ſeyn, oder ihre Werthe werden in einer geometriſchen Progreßion fallen, wo

$m = \frac{1}{10}$ §. 242. Sie werden Brüche ſeyn, deren Nenner in einer dekadiſchen Progreſſion zunehmen, worinn das erſte Glied = 1 iſt. Dergleichen Brüche nennt man Decimalbrüche.

Zuſatz 1.

Daher müſſen die Stellen, in welchen die Ganze aufhören und die Brüche anfangen, durch ein Zeichen bemerkt werden. Man wählte hierzu das Comma. Z. E. $23,4 = 23, + \frac{4}{10}$ und $8,23 = 8\frac{23}{100}$ ꝛc. ꝛc. Sind gar keine Ganze da, ſo ſetzt man an ihre Stelle eine 0. Z. E. $0,423 = \frac{423}{1000}$. Fehlt ein Glied in der Progreſſion der Decimalbrüche, ſo wirds auch durch 0 erſetzt. Z. E. $2,0304 = 2 + \frac{304}{10000}$.

Zuſatz 2.

Der Nenner hat alſo immer ſo viel Nullen hinter der 1, als der Zähler, oder die hinter dem (,) befindliche Zahl einzelne Zahlzeichen hat. (Zuſ. 1.) Man läßt ihn daher gewöhnlich weg.

§. 253.

Da nun 34 = 34 Ganze, ſo können ſie leicht in jeden Decimalbruch, von einem beliebigen Nenner verwandelt werden. Man hängt an ſie ſo viel Nullen, als der verlangte Nenner hat, und ſondert die Ganze nach §. 252. Zuſ. 1. ab. Z. E. 34 in 1000tel = $34,000 = 34 + \frac{000}{1000}$ und umgekehrt ſind 352,000 = 352 Ganze.

§. 254.

Decimalbrüche werden demnach zu gleicher Benennung gebracht, wenn man an die kleinern Nenner und Zähler ſo viel Nullen hängt, bis die erſtern eben ſo viel Stellen haben, als der gröſte Nenner hat. Z. E. $\frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{5}{1000}$ (§. 123. 10.) Weil aber $300 + 40 + 5 = 345$ ſo bringen ſich Decimalbrüche von ſelbſt zu gleicher Benennung, wenn man ihre Zähler, nach der Decimalprogreſſion, unmittelbar neben einander ordnet, die etwa fehlende Stellen mit Nullen ausfüllt, und dann den gröſten vorhandenen Nenner darunter ſetzt.

§. 255.

Daher können ſie, wie ganze Zahlen, addirt und ſubtrahirt werden, wenn auch gleich Ganze oder Brüche dabey vorkommen. Denn dieſe verwandelt man nach §. 253. in Brüche vom gröſten vorhandenen Nenner, oder ſetzt ſie blos in die Stelle der Ganzen. Z. E. 8, 234 + 17, 04 + 0, 0003 + 28 =

8, 2340		8, 234
17, 0400	oder	17, 04
0, 0003		0, 0003
28, 0000		28,
53, 2743	=	53, 2743 und

17, 034—8, 23 = 8, 804 desgleichen

8, 24—0, 57 = 7, 67 wie auch

+0, 42 addirt zu —8, 22 iſt = 7, 80 (§. 81.) und von +0, 42 ſubtrahirt —8, 22 iſt = 8, 64 (§. 97.) Folg-

lich werden auch Decimalbrüche, mit entgegen geſetzten Zeichen, wie Ganze behandelt.

§. 256.

Das Multipliciren der Decimalbrüche macht wenig Schwierigkeiten. Z. E. $3,24 \times 2,22 = 3\frac{24}{100} \times 2\frac{22}{100}$ (§. 252. Zuſ. 1. 2.) diß aber $= \frac{324}{100} \times \frac{222}{100} = \frac{71928}{10000}$ (§. 125 und §. 138. Z. 1.) daher $3,24 \times 2,22 = 7,1928$. Woraus folgende kurze Regel fließt: Multiplicire, wie gewöhnlich, und ſchneide, von der Rechten zur Linken, ſo viel Zahlzeichen ab, als im Multiplicator und Multiplicand zuſammen, einzelne Zahlen, hinter dem Comma, ſtehen, ſo hat man das Produkt.

Zuſatz.

Sind im Produkt weniger Zahlen, als man abſchneiden ſoll, ſo werden ſowohl die gegen die Linke fehlende, als auch die erſte Stelle der Ganzen, mit Nullen erſetzt. Z. E. $0,00023 \times 0,8 = 0,000184$. Dann $0,00023 = \frac{23}{100000}$ und $0,8 = \frac{8}{10}$ folglich iſt hier $\frac{23}{100000} \times \frac{8}{10} = \frac{184}{1000000} = 0,000184$.

§. 257.

Gewöhnliche Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln.

Auflöſung.

1. Hängt an den Zähler ſo viel Nullen, als beliebig;
2. Dividirt mit dem Nenner.

3) Vor den Quotienten ſezt eine 0 mit dem Comma, ſo hat man den verlangten Decimalbruch, der dem gegebenen entweder vollkommen gleich iſt, oder doch ſo nahe gebracht werden kann, als man will. Z. E.

a. $\frac{2}{5} = 0,400$ dann $5 : 2000 = 0.400$
b. $\frac{3}{7} = 0,428$ dann $7 : 3000 = 0,428$ beynahe.
c. $\frac{5}{6} = 0,8333$ dann $6 : 50000 = 0,8333$ beynahe.

Beweiß.

In Nro. a. iſt $0,400 = \frac{400}{1000}$ (§. 252. Z. 1.) diß aber $= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. In Nro. b. iſt $0,428 = \frac{428}{1000} = \frac{3}{7} - \frac{\frac{4}{7}}{1000}$. Eben ſo fehlt in Nro. c. denen $0,8333 = \frac{8333}{10000}$ nur $\frac{\frac{2}{6}}{10000}$ zu $\frac{5}{6}$, folglich im lezten Fall nicht einmal $\frac{1}{10000}$. Hätte man gleich anfänglich 6 Nullen angehängt, ſo fehlte kein Millionſtel ꝛc. ꝛc.

§. 258.

Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche zu verwandeln.

Auflöſung.

1. Iſt der Decimalbruch einem andern gewöhnlichen vollkommen gleich, wie (§. 257. a.) ſo giebt man ihm ſeinen gehörigen Nenner wirklich (§. 252. Z. 2.) und bringt ihn auf die kleinſte Benennung (§. 128.) Z. E. $0,400 = \frac{400}{1000} = \frac{2}{5}$.
2. Wo nicht, z. E. in 0, 3333 .... oder 0, 848484 oder 0, 82 657 379 ... ſo iſt er eine unendliche Reihe, da $0,3333 = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100}$ ꝛc. und

$0,84\,84\,84 = 0 + \frac{84}{100} + \frac{84}{10000}$ ꝛc. ꝛc. und endlich $0,82\,687\,379 = 0 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100}$ ꝛc. ꝛc. Die beyden erſtern kann man ſummiren (§. 245. und §. 246.) den leztern aber blos durch Näherung finden.

§. 259.

Decimalbrüche zu dividiren.

Auflöſung.

1. Haben Diviſor und Dividende gleichviel Decimalſtellen in ihren Zählern, ſo dividirt man, wie gewöhnlich, und der Quotient beſteht aus lauter Ganzen.
2. Sind in der Dividende mehr Decimalſtellen als im Diviſor, ſo ziehe man die kleinere Anzahl von der gröſſeren ab. So viel Stellen in der Dividende übrig bleiben, ſo viel Decimalſtellen bekömmt der Quotient.
3. Wären aber mehrere im Diviſor als in der Dividende, ſo zieht man abermal die kleinere Anzahl von der gröſſeren ab, und ſo viel Stellen hier übrig bleiben, ſo viel Nullen hängt man an den Quotienten.
4. Sollte die Diviſion gar nicht aufgehen, ſo wird der Reſt, welcher einen gewöhnlichen Bruch gäbe, in einen Decimalbruch verwandelt. Z. E.

I. $3,2 : 6,4 = 2$ II. $4,2 : 1,280 = 0,40$

$$\begin{array}{r} 1\,28 \\ \hline 0 \end{array}$$

III. 1,23 : 504,3 = 410 IV. 2,1 : 5,7 = 2,714...

```
      492              42
      ---              --
      123              15000
      123              147
      ---              -----
        0                30
                         21
                         --
                         90
                         84
                         --
                          6
```

Beweiß.

Dieſen liefert entweder die gewöhnliche Probe der Diviſion, da $2 \times 3,2 = 6,4$ und $0,40 \times 3,2 = 1,280$ auch $410 \times 1,23 = 504,30$ indem $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$ und endlich $2,714 \times 2,1 + 6 = 5,7000$ weil $\frac{7}{10} = \frac{7000}{10000}$. Oder auf folgende Art: $\frac{6,4}{3,2} = 3 + \frac{2}{10} : 6 \times \frac{4}{10} = \frac{32}{10} : \frac{64}{10} = \frac{640}{320} = 2$. Eben ſo beweißt man den 2ten, 3ten und 4ten Fall; nur muß beym 2ten und 4ten §. 257. angewendet werden.

Bey der Multiplikation und Diviſion mit entgegen geſezten Gröſſen, finden auch hier die §. 90. und §. 104. gegebene Regeln ſtatt.

§. 260.

Brüche, deren Nenner in einer geometriſchen Progreſſion wachſen, in welcher das erſte Glied = 1 und der Exponent 60 iſt, nennt man Sexageſimal-

brüche. Z. E. $\frac{2}{1}$ - $\frac{3}{60}$ - $\frac{4}{3600}$ - $\frac{7}{216000}$. Hier werden oft die Ganze Grade, zuweilen Stunden, die 60tel Minuten, die 3600tel Sekunden, die 216000tel Tertien ꝛc. ꝛc. genannt. Dergleichen Brüche ſind in der Aſtronomie und Chronologie unentbehrlich, ja ſelbſt die praktiſche Geometrie der gemeinen Marchleute kann ohne ſie nicht deutlich eingeſehen werden.

§. 261. Willkührlicher Satz.

Man bezeichne die Grade mit o, die Minuten mit ' die Sekunden mit " die Tertien mit '''. Wo alſo ' ſteht, iſt der Nenner 60, bey " 3600 ꝛc. (§. 260) Daher kann man auch hier, wie bey den Decimalbrüchen, die Nenner weglaſſen. Z. E. $\frac{8}{1}$. $\frac{32}{60}$. $\frac{27}{3600}$. $\frac{13}{216000}$ iſt = 8°. 32'. 27". 13'''.

§. 262.

Addition und Subtraktion der Sexageſimalbrüche richtet ſich nach den Geſetzen dieſer Rechnungsarten in benannten Zahlen (§. 111 und 112) Z. E.

$$\begin{array}{rrrr} 8^{\circ}. & 24'. & 59''. & 34'''. \\ & 52'. & 43''. & 58'''. \\ 12^{\circ}. & 0'. & 54''. & 0'''. \\ \hline 21^{\circ}. & 18'. & 37''. & 32'''. \end{array}$$

Man ſubtrahire von

$$\begin{array}{rrrrr} 52^{\circ}. & 14'. & 34''. & 12'''. & 0''''. \\ -8^{\circ}. & 32'. & 0''. & 42'''. & 3''''. \\ \hline 43^{\circ}. & 42'. & 33''. & 29'''. & 57''''. \end{array}$$

Hier wird vorzüglich der (§. 119. Nro. 1.) bemerkte Vortheil wichtig.

§. 263.

Sexageſimalbrüche mit Sexageſimalbrüchen zu multipliciren.

Aufloͤſung.

1. Multiplicirt alle Glieder des Multiplikanden durch das niedrigſte Glied des Multiplikators, und beobachtet §. 113. Nro. 2.
2. Eben ſo durch das naͤchſt hoͤhere, und ſo fort durch alle Glieder.
3. Addirt immer die Zeichen der einzelnen Faktoren, und gebt dem daraus entſprungenen Produkt ihre Summe zum Zeichen.
4. Endlich addirt dieſe einzelne Produkte, ſo giebt die Summe das ganze Produkt. Z. E. 4°. 12′. 50″×2°. 14′. 3″ iſt = 9°. 24′. 52″. 18‴. 30⁗.

		4°.	12′.	50″.
		2°.	14′.	3″.
		12″.	38‴.	30⁗.
	58′.	59″.	40‴.	
8°.	25′.	40″.		
9°.	24.	52″.	18‴.	30⁗.

Beweiß.

$50'' \times 3'' = \frac{50}{3600} \times \frac{3}{3600} = \frac{150}{12960000} = 150'''' = 2'''. 30''''$. (§. 260. und 261.) Ferner $12' \times 3'' = \frac{12}{60} \times \frac{3}{3600} = \frac{36}{216000} = 36'''$. Es blieben aber vorhin 2‴ uͤbrig, daher gibts 38‴. Endlich $4^\circ \times 3'' =$

$\frac{4}{1} \times \frac{3}{3600} = \frac{12}{3600} = 12''$. Eben ſo zeigt man die Richtigkeit der Produkte aus 14′ in den Multiplikand, und endlich aus 2° in denſelbigen, die Addition aber iſt aus §. 262. klar.

§. 264.

Sexageſimalbrüche mit Sexageſimalbrüchen zu dividiren.

Auflöſung.

1. Man dividire, wie §. 114. und beobachte §. 262 und 263.
2. Nur ziehe man immer das Zeichen des erſten Glieds des Diviſors vom Zeichen des erſten Glieds der Dividende ab, und mache den Reſt zum Zeichen des Quotienten. Z. E.

9°. 24′. 52″. 18‴. 30⁗	2°. 14′. 3″.
8°. 56′. 12″	4°. 12′. 50″.
28′. 40″. 18‴	
26′. 48″. 36‴	
1°. 51″. 42‴. 30⁗	oder
111″. 42‴. 30⁗	
111″. 42‴. 30⁗	
0	

Beweiß.

Wer den §. 262 und 263. gefaßt hat, dem kann nichts als Nro. 2. etwas undeutlich ſeyn. Aber auch diß wird klar, da Dividiren der Rückweg vom Mul-

tiplicireu iſt. In dieſem wurden die Zeichen der Faktoren addirt, um die Zeichen der Produkte zu finden. Hier müſſen daher die Zeichen des Diviſors von den Zeichen der Dividende abgezogen werden, um die Zeichen des Quotienten zu erhalten. Man kann den Beweiß auch auf eine dem §. 263. ähnliche Art führen, allein er wird weitläuftiger.

Zuſatz.

Sollten 2′. 5″. in 3°. 4′. 6″. dividirt werden, ſo findet entweder §. 264. Nro. 2. nicht geradezu ſtatt, oder es bekäm, da die Zeichen des Diviſors gröſſer als die Zeichen der Dividende ſind, der Quotient negative Zeichen. Da aber $2'. 5'' \times 60 = 2°. 5'$ und $3°. 4'. 6''. \times 60 = 184°. 6'.$ ſo darf man nur, ſowol den Diviſor als die Dividende, mit 60 multipliciren, ſo beſteht auch der erſte Theil des Diviſors aus Graden, man erhält dennoch den nämlichen Quotienten (§. 105. Zuſ. 2. und §. 205), und nun kann alles nach §. 264) behandelt werden. Dann nun wäre $2'. 5'' : 3°. 4'. 6'' = \frac{(3°. 4'. 6'') \times 60}{(2'. \ 5'') \times 60} = \frac{184°. 6'}{2°. \ 5'} = 88°. 22'.$ wenn man nämlich den beym Dividiren übrig bleibenden Bruch in Sekunden verwandelt (§. 127.) Und ſo laſſen ſich die negative Zeichen vermeiden. Will ſie jemand kennen lernen, dem giebt Käſtner in ſeinen Anfangsgründen der Arithm. p. 83. u. f. Unterricht.

§. 265. Anmerkung 1.

Das Verwandeln der kleinern Sorten in die nächſtgröſſere macht das Multipliciren und Dividiren der Sexageſimalbrüche ſehr beſchwerlich. Diß erleichtern die Sexageſimaltafeln (Canon hexacontadon ſeu ſexagenarum). In dieſen ſind die Produkte jeder zween Sexageſimalzahlen von 1 bis 60 auf eine ähnliche Art, wie im Einmaleins die Produkte der natürlichen Zahlen, ausgedruckt. Man findet ſie in verſchiedenen Schriften: z. E. in Strauchens Tabulis ſinuum, wie auch in Joh. Bernh. Wiedeburgs Einleitung zur höhern Mathematik, wo ſie beſonders in 4to vor den übrigen aſtronomiſchen Tafeln abgedruckt ſind. Von ihrer Einrichtung, Verfertigung und Gebrauch, mündlich.

§. 266. Anmerkung 2.

Eben ſo, wie izt die 4 Rechnungsarten der Decimal- und Sexageſimalbrüche abgehandelt worden, könnte man auch dieſelbe mit 12theiligen, 144theiligen, 1728theiligen Brüchen erklären und beweiſen. Auf den 12theiligen beruht alles, was Malers Geometrie vom Riemmaaß vorträgt, und aus den übrigen läßt ſich die Rechnung mit gemeinem Maaß in der Planimetrie und Stereometrie erklären, wovon mündlich das Mehrere.

IX. Abſchnitt.

Von den Logarithmen.

§. 267.

Was ſind Logarithmen? Was iſt ein Logarithmenſyſtem und deſſen Baſis? Was nützen ſie uns? Wie ſind Nepper- und Briggiſche Logarithmen unterſchie-

den? Wie werden ſie berechnet? Wie findet man Logarithmen zu Zahlen und Zahlen zu Logarithmen, welche nicht in den gewöhnlichen Sammlungen ſtehen? Dieſe Fragen müſſen im gegenwärtigen Abſchnitt beantwortet werden.

§. 268.

Wenn man unter eine geometriſche Progreſſion, die von 1 anfängt, eine arithmetiſche, deren erſtes Glied 0 iſt, ſo ſetzet, daß unter jedes Glied der erſtern das ebenſovielſte der leztern zu ſtehen kommt, ſo heißt jedes Glied der arithmetiſchen Progreſſion, der Logarithme des über ihm ſtehenden Glieds der geometriſchen Progreſſion. Z. E.

∺	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
÷	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

Oder wenn die erſte Progreſſion allgemein ausgedrückt und das 2te Glied $a = 2$ angenommen wird, ſo iſt das 1ſte $= a^0 = 1$ (§. 105. Zuſ. 1.)

a^0.	a^1.	a^2.	a^3.	a^4.	a^5.	a^6.	a^7.	(§. 91.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	und
1.	2^1.	2^2.	2^3.	2^4.	2^5.	2^6.	2^7.	§. 242)

§. 269.

Daher iſt

1. Die erſte Progreſſion eine Reihe Dignitäten, welche in ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgen.
2. Die Logarithmen ſind wirkliche Exponenten dieſer Dignitäten.

3) Was von den Exponenten bewieſen wurde, gilt auch von den Logarithmen.

4) Die 1ſte Reihe iſt eine Anzahl gleicher Verhältniſſe (§. 201. Zuſ. 4.) Nun zeigen die Logarithmen wirklich, wie viel dergleichen Verhältniſſe zwiſchen dem erſten und einem jeden beliebigen Glied der geometriſchen Progreſſion liegen, daher ihr Name ἀϱιϑμὸς λόγων, Verhältnißzahlen. Z. E. zwiſchen a^0 und a^3 liegen drey gleiche Verhältniſſe $a^0 : a^1 = a^1 : a^2 = a^2 : a^3$; diß ſahe man aber auch ohne Weitläuftigkeit am Exponenten 3.

5) In beyden Progreſſionen iſt Exponent und Differenz ſowohl als die erſten Glieder willkürlich, ſie müſſen eben nicht, wie hier, gerade 2 und 1, 1 und 0 ſeyn. Man drücke alles allgemein aus:

$$\div\!\div \quad a. \quad am. \quad am^2. \quad am^3. \quad am^4$$

$$\div \quad \alpha. \quad \alpha+\delta. \quad \alpha+2\delta. \quad \alpha+3\delta. \quad \alpha+4\delta.$$

Und noch immer wird ſich Nro. 4. anwenden laſſen, noch immer wird die Zahl der δ oder Differenzen anzeigen, das wie vielſte Glied der erſten Reihe, ein angenommenes Glied iſt. Da aber alle geometriſche Progreſſionen ſich in andre, deren erſtes Glied = 1 iſt, und alle arithmetiſche in ſolche, deren erſtes Glied = 0, verwandeln laſſen, (§. 239. 7. und §. 242. 11.) und der hier gewählte Fall der leichteſte zur Erklärung der Logarithmen iſt, ſo ſoll

6) Die arithmetiſche Reihe immer von 0, die geometriſche immer von 1 anfangen.

§. 270.

Man nehme folgende Reihen an:

I.	1.	2.	4.	8.	16.	32	ꝛc. ꝛc.
	0.	1.	2.	3.	4.	5	
II.	1.	3.	9.	27.	81.	243.	
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	
III.	1.	10.	100.	1000.	10000.	100000	
	0.	1.	2.	3.	4.	5	

So zeigt der Augenſchein, daß die nämliche Zahl 2 Logarithme von 4. 9. und 100 ſeyn kann. Daß alſo in der I. II. und IIIten Reihe ſehr verſchiedene Zahlen einerley Logarithmen haben können. Jede dieſer Reihen nebſt den dazugehörigen Logarithmen heißt ein Logarithmen-Syſtem, und diejenige Zahl, deren Logarithmen man = 1 ſezt, wird Baſis oder Fundament des Syſtems genannt. Sie wär alſo in I = 2 in II = 3 in III = 10. Ohngeachtet alſo an ſich unzählige Logarithmen-Syſteme möglich ſind, ſo ſind doch, ſobald die Baſis in einem Syſtem beſtimmt iſt, im nämlichen Syſtem auch die Logarithmen aller übrigen Zahlen unveränderlich beſtimmt.

§. 271. Willkürlicher Saz.

Soll der Logarithme einer Gröſſe nicht wirklich geſchrieben, ſondern nur durch ein Zeichen ausgedrückt werden, ſo bedient man ſich hiezu eines kleinen lateiniſchen l. Z. E. l a oder l 12.

§. 272.

Die Summe der Logarithmen 2 oder mehrerer Faktoren iſt = dem Logarithmen des Produkts.

Beweiß.

$a^2 \times a^3 = a^5$ (§. 91. Zuſ. 3.) und $2 = la^2$ auch $3 = la^3$, ingleichem $5 = la^5$ (268.) Es iſt aber auch $2 + 3 = 5$. Eben ſo $a^1 \times a^2 \times a^3 = a^6$ und $1 = la^1$, $2 = la^2$, $3 = la^3$, $6 = la^6$ aber auch $1 + 2 + 3 = 6$.

§. 273. Zuſatz.

Statt die Faktoren zu multipliziren, darf man daher nur ihre Logarithmen addiren, und die Summe im nämlichen Syſtem aufſuchen, ſo findt man in der ihr zugehörenden Zahl das Produkt.

§. 274.

Die Differenz der Logarithmen 2er Gröſſen iſt = dem Logarithmen des Quotienten dieſer Gröſſen.

Beweiß.

$a^3 : a^5 = a^2$ (§. 105. Zuſ. 1.) und $5 = la^5$, $2 = la^2$ (§. 268.) aber auch $5 - 3 = 2$.

Zuſatz.

Statt die Zahlen ſelbſt zu dividiren, darf man nur den Logarithmen des Diviſors vom Logarithmen des Dividenden abziehn, und den Reſt im nämlichen Syſtem aufſuchen, ſo iſt die zu ihm gehörige Gröſſe der Quo-

tient. In dieſem Verſtande behauptet man alſo, daß durch die Logarithmen die Multiplikation in Addition, und die Diviſion in Subtraktion verwandelt werde. Welch ein Vortheil bey groſſen Zahlen!

§. 275.

Das Produkt des Logarithmen, einer Gröſſe in den Exponenten einer beliebigen Dignität, iſt = dem Logarithmen der zur nämlichen Dignität erhobenen Gröſſe.

Beweiß.

Es ſey die Gröſſe = a, ſo iſt $\underbrace{l(a \times a)}_{\substack{\| \\ la^2}} = la + la$. Allein da 2 Exponent von a^2 und

$$la^2 = 2la = 2 \times la.$$

Zuſatz.

Folglich iſt auch $la^3 = 3la$ und allgemein $la^n = nla$.

§. 276.

Der Quotient des Exponenten einer jeden Dignität, in den Logar. der nämlichen Dignität, iſt = dem Logar. der Wurzel von der nämlichen Dignität.

Beweiß.

$la^m = mla$ (§. 275.) und : m.

$$\frac{la^m}{m} = la$$

$$\|$$

$$l\sqrt[m]{a^m}$$

$$\frac{la^m}{m} = l\sqrt[m]{a^m}$$

Zuſatz.

Anſtatt alſo eine in Zahlen gegebene Grösſe mühſam zu einer verlangten Dignität nach (§. 161. und §. 165) zu erheben, darf man nur ihre Logarithmen mit dem Exponenten der verlangten Dignität multipliciren und das Produkt im nämlichen Logarithmenſyſtem aufſuchen. Die dazu gehörige Zahl iſt die verlangte Dignität (§. 275.) und anſtatt des mühſamen Wurzelausziehens (§. 168 und §. 169.) wird man den Logarithmen der Zahl mit dem Exponenten der Dignität dividiren, ſo findt ſich der Logar. der Wurzel, und wenn man ihn im nämlichen Syſtem aufſucht, bey ihm. in der zugehörigen Zahl, die Wurzel ſelbſt (§. 276.) Und in dieſem Verſtande ſagt man, daß durch Logar. das Erheben zu Dignitäten in eine Multiplikation mit 2, 3 ꝛc. ꝛc. das Ausziehen der Wurzeln aber in eine Diviſion mit 2, 3 ꝛc. ꝛc. verwandelt werde. Man ſieht auch hier den beträchtlichen Vortheil in groſſen Zahlen.

§. 277.

Der Logarithme eines Bruchs gleicht dem Logarithmen der Differenz des Zählers und Nenners.

Beweiß.

Denn $\frac{a}{b} = b : a$ folglich $l\frac{a}{b} = la - lb$ (§. 274.)

Zuſatz.

Daher ſind in jedem Logarithmenſyſtem, deſſen Reihen ſteigend ſind, die Logarithmen eigentlicher

Brüche negativ, uneigentlicher Brüche poſitiv. Bey Syſtemen von fallenden Reihen iſts umgekehrt.

§. 278.

Soll eine Regel de tri logarithmiſch berechnet werden, ſo addirt man die Logarithmen der beyden lezten gegebenen Glieder, und zieht von ihrer Summe den Logarithmen des erſten Glieds ab, ſo hat man den Logarithmen des 4ten Glieds (§. 220. §. 273 u. 274.) welches ſich nun im Syſtem leicht aufſuchen läßt. Z. E. $a : b = c : \frac{bc}{a}$ nun logarithmiſch

$$la - lb = lc - l\frac{bc}{a} = (lb + lc) - la.$$

Anmerkung.

Der Beweiß von §. 273 und 274 kann auch mit Darieſen und andern aus der Natur der Multiplikation, Diviſion und arithmetiſchen Proportion geführt werden.

§. 279.

Im Ausdruck der Logarithmen addirter und ſubtrahirter Gröſſen muß man vorſichtig ſeyn. Z. E. von $am + b$ oder $am - b$ iſt der Logarithme nicht $la + lm + lb$ oder $la + lm - lb$ (§. 273 und 274) ſondern $l(am + b) = l(N(la + lm) + b)$ und $l(am - b) = l(N(la + lm) - b)$. N zeigt nämlich die ganze Zahl $(la + lm) - b$ an, und erſt von dieſer muß der neue Logarithme genommen werden.

§. 280.

Von allen möglichen Logarithmenſyſtemen will ich nur 2, das urſprünglich Nepperiſch und das Briggiſche näher erklären. Jenes iſt folgendermaſſen eingerichtet:

10, 000000.	9999999.	9999998.	9999997.
0.	9.	2.	3.

1) Hier iſt demnach die Hauptreihe eine fallende Progreſſion.
2) Die Logarithm. aller Zahlen, welche über 10000000 gehen, ſind negativ.
3) Jngleichem die Logarithmen uneigentlicher Brüche (§. 277)
4) Die Logarithmen eigentlicher Brüche hingegen poſitiv. (§. cit.)
5) Seine Baſis iſt 9999999 (§. 270.)
Allein es wird in der Elementar-Mathematik beynahe gar nicht mehr gebraucht.

§. 281.

Jn dem heutzutag eingeführten bequemern Briggiſchen Syſtem ſind folgende Reihen:

1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.	ꝛc.	ꝛc.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	ꝛc.	ꝛc.

1) Hier iſt die Baſis 10. (§. 270.)
2) Beyde Reihen ſind ſteigend.
3) Der Exponent der Hauptreihe iſt 10, die Differenz der 2ten 1.
4) Die Logarithmen aller Zahlen unter 1, folglich eigentlicher Brüche, ſind negativ. (§. 277.)

5) Die Logarithmen uneigentlicher Brüche poſitiv. (§. cit.)

6) Alle Logarithmen der Hauptzahlen 1. 10. 100. ꝛc. ꝛc. ſind vollkommen beſtimmt.

7) Alle Logarithmen der zwiſchen 1 und 10 fallenden Zahlen ſind gewiß eigentliche Brüche.

8) Alle Logarithmen der zwiſchen 10 und 100, 100 und 1000 ꝛc. ꝛc. fallenden Zahlen, ſind uneigentliche Brüche.

9) Dieſe Brüche ſind, wie wir ſehen werden, lauter Irrationalzahlen (§. 149.) Sie müſſen daher durch Annäherung oder ſolche Brüche ausgedrückt werden, welche vom wahren Werth der wirklichen Logarithmen ſo wenig abweichen, daß man den Unterſchied, ohne Gefahr zu irren, weglaſſen kann.

10) Hierzu ſchicken ſich die Decimalbrüche am beſten (§. 252. Zuſ. 2. und §. 257.) Man hängt daher an jedes Glied, in beyden Progreſſionen, wenigſtens 8 Nullen an, und nun wird, wenn auch beym wirklichen Berechnen der Logarithmen in der Beſtimmung dieſer Brüche etwas übrig bleibt, der durchs Weglaſſen dieſes Reſts entſtehende Fehler nicht einmal ein hundert Millionſtel betragen, und die Reihen haben folgende Geſtalt:

1.00000000.	10.00000000.	100.00000000.	1000.00000000
0.00000000.	1.00000000.	2.00000000.	3.00000000

Damit man aber auch leicht unterſcheiden kann, wo die Ganzen aufhören und die Brüche anfan-

gen, ſo ſezt man allzeit hinter die Ganzen einen Punkt (§. 252. Zuſ. 1.) oder Comma.

11) Folglich iſt die erſte Zahl aller zwiſchen 1 und 10 liegenden Logarithmen eine 0 (Nro. 7.) zwiſchen 10 und 100 = 1, zwiſchen 100 und 1000 = 2. (Nro. 8.) Dieſe erſte Ziffer eines Logarithmen heißt daher Kennziffer, Charakteriſtik (figura characteriſtica) weil man aus ihr erkennen kann, ob die zum Logarithmen gehörige Zahl zwiſchen 1 und 10, 10 und 100 ꝛc. ꝛc. geſucht werden muß. Der hinter der Kennziffer ſtehende Decimalbruch wird auch mantiſſa genannt.

12) Die Charakteriſtik iſt immer um 1 kleiner als die Anzahl der Zahlzeichen, zu welchen der Logar. gehört. Nennt man nun dieſe Anzahl Zahlzeichen = n, ſo iſt die Charakteriſtik immer = n — 1.

13) Wird die Charakteriſtik des l 1 (Nro. 10.) mit einer Einheit vermehrt, ſo hat man l 10. Setzt man 2 Einheiten zu ihr l 100, um 3 Einheiten vergrößert, giebts den l 1000 ꝛc. ꝛc. Wird hingegen die Charakteriſtik des l 1000 um 1. 2. 3 Einheiten vermindert, ſo erhalten wir die l 100, l 10, l 1. Folglich heißt, die Charakteriſtik des gegebenen Logarithmen einer gegebenen Zahl mit einigen Einheiten vermehren, ſo viel, als die zum Logarithmen gehörige Zahl eben ſo oft mit 10 multipliciren, als man Einheiten zuſetzte: Sie um einige Einheiten vermindern, eben ſo viel, als die zum Logarithmen gehörige Zahl ſo oft mit 10 dividiren.

§. 282.

Alle Logarithmen der Hauptzahlen 1. 10. 100 ꝛc. ꝛc. ſind vollkommen beſtimmt (§. 281. Nro. 6.) Wie finden ſich aber die Logarithmen der zwiſchen ſie fallenden Zahlen, z. E. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. 12. ꝛc. ꝛc.? Folgende Regeln zeigen die Möglichkeit ſie zu berechnen.

1) Man ſuche eine groſſe Menge mittlere geometriſche Proportionalen zwiſchen denen 2 Gliedern der Hauptreihe, zwiſchen welche die Zahl fällt, deren Logar. geſucht wird und zwar ſo, daß man ſich der geſuchten Zahl immer mehr nähere. (§. 219.)

2) Aber auch eine gleiche Menge mittlere arithmetiſche Proportionalen, zwiſchen denen zu den erſtern gehörigen Logarithmen. (§. 213.)

3) Beyde Regeln wende man ſo lang an, bis nach Nro. 1. die verlangte Zahl, z. E. 7 mit 8 Nullen, als mittlere geometriſche Proportionale erſcheint (§. 253.) und dann iſt die zu ihr gehörige mittlere arithmetiſche Proportionale der geſuchte l 7 (§. 268.) dem wenigſtens nicht einmal ein 100 Millionſtel fehlt. (§. 281. Nro. 10.)

Beweiß.

Es ſeye die Hauptreihe

a^0. a^m. a^{m+1}. a^{m+2}. . . . und die Logar.

0. m. m+1. m+2. . . .

Die Zahl, zu welcher man den Logarithmen ſucht $= x$; die mittlere geometriſche Proportionale $= p$, die mittlere arithmetiſche Proportionale $= \pi$, ſo iſt z. E. zwiſchen a^m und a^{m+1} nach Nro. 1.

$p = \sqrt{a^m \times a^{m+1}}$ (§. 219.) oder

$p = \sqrt{a^{2m+1}} = a^{\frac{2m+1}{2}}$ §. 91. Z. 3. u. §. 167 Daher

$p = a^{\frac{2m+1}{2}}$ und $\pi = \frac{2m+1}{2}$ nach Nro. 2. folglich

$a^m : a^{\frac{2m+1}{2}} = a^{\frac{2m+1}{2}} : a^{m+1}$ daher iſt

$a^{\frac{2m+1}{2}} = \sqrt{a^m \times a^{m+1}}$ = der geſuchten mittlern Zahl aber auch da $l\,a^m = m$ und $l\,a^{m+1} = m+1$

$l\sqrt{a^m \times a^{m+1}} = \frac{2m+1}{2}$ (§. 213 und §. 268)

Nun iſt die gefundene p entweder $> x$ oder $< x$. Man nenne ihre Differenz $\frac{n}{r}$, ſo iſt p entweder $x + \frac{n}{r}$ oder $x - \frac{n}{r}$. Iſts erſtere, ſo ſucht man aufs neue zwiſchen $x + \frac{n}{r}$ und a^m die beyde mittlere Proportionalen p und π; iſts leztere, ſo werden ſie zwiſchen $x - \frac{n}{r}$ und a^{m+1} ꝛc. ꝛc. geſucht, bis die Grenzen, zwiſchen welche x fällt, ſo enge werden, daß man die lezte gefundene p und π als faſt um nichts von x und $l x$ verſchieden, folglich, ohne Gefahr zu irren, vor x und $l x$ ſelbſt annehmen kann, indem nothwendig $\frac{n}{r}$ immer kleiner wird, folglich p dem x und π dem $l x$ ſo nahe gebracht werden kann, als es zu irgend einem Gebrauch nöthig iſt. Die wirkliche Berechnung des 17

ſiehe in meinen Erläuterungen der Wolfiſchen Trigonometrie, Carlsruhe 1778.

§. 283.

So mühſam mußten wirklich die erſten Berechner der Logarithmen zu unſerm Vortheil arbeiten, da ſie die Kunſtgriffe, wodurch uns heutzutag die Algeber ihre Berechnung erleichtert, nicht kannten. Dieſe können, unſrer Abſicht gemäß, hier nicht vorgetragen werden. Man findet ſie in Lamberts, Käſtners und Eulers Werken über die Analyſis, nebſt vielen andern Lehren von den Logarithmen, welche in der höhern Mathematik unendlichen Nutzen haben. Aber auch die erſten Berechner durften nur für die Logarithmen der Primzahlen dieſe Rieſenarbeit verrichten. Sind dieſe einmal gefunden, ſo laſſen ſich die übrige für die aus jenen entſpringende Fakta oder Produkte leichter berechnen. Denn da

$$10 : 5 = 2 \text{ ſo iſt}$$

$$l10 - l5 = l2$$

und weil $2 \times 2 = 4$ ſo iſt

$$l2 + l2 = 2l2 = l4 \text{ da ferner}$$

$$9 = 3^2 \text{ ſo iſt}$$

$$\frac{l9}{2} = l\sqrt{9} = l3. \text{ (§. 276. 3.)}$$

und da $3 \times 2 = 6$ ſo wird

$$l3 + l2 = l6$$

endlich weil $4 \times 2 = 8$ ſo iſt auch

$$l4 + l2 = l8.$$

Anmerkung.

Man durfte alſo, um die Logarithmen vor die Zahlen zwiſchen 1 und 10 zu finden, nur die $l5$, $l7$, $l9$ nach der erſten mühſamen Art ſuchen. Aus dieſen erſten 10 findet man eben ſo leicht alle andre zwiſchen zehen und zwanzig, die $l11$, $l13$, $l17$ und $l19$ ausgenommen. Zwiſchen 20 und 30 ſind nur 2 Primzahlen 23 und 29. Kurz zwiſchen 1 und 1000 liegen in allem 168 Primzahlen. Wie aus 1229 Primzahlen unter 10000, 627549 Logarithmen für Zahlen unter einer Million, aus 2 einigen Logarithmen zu berechnen, zeigt Joh. Carl Schulzens Sammlung Logar. Tafeln erſter Theil, S. 259.

§. 284.

Logarithmiſche Tafeln gewöhnlicher Zahlen (Canon logarithmorum numerorum naturalium) nennt man die Sammlung einer groſſen Menge Logarithmen vor die in natürlicher Ordnung fortlaufende Zahlen. Ihre Hauptvorzüge ſind: Richtigkeit der Berechnung, des Abdrucks und Menge der Logarithmen. Die gewöhnliche kleinere enthalten die Logarithmen vor alle ganze Zahlen von 1 bis 10000. Die gröſten dermalen bekannten von 1 bis 102100. Von ihrer Einrichtung, Gebrauch, mancherley Ausgaben, Vergleichung, Vorzügen und Berechnern theils mündlich, theils im Xten Abſchnitt. Hier bemerke man noch, daß

1) In allen Tafeln ſich von den Decimalziffern nur ſo viele, als zum Gebrauch nöthig ſind, nie alle befinden. (§. 257.)
2) In den kleinſten Tafeln ſind von jedem Logarithmen nur die 7 erſten Decimalziffern vorhanden.

3) Die lezte von der vorhandnen wurde immer um 1 vermehrt, ſo oft die erſte weggelaſſene > 5 war.

§. 285.

Den Logarithmen zu einer Zahl finden, welche in den gewöhnlichen Tafeln nicht gefunden wird.

Auflöſung.

1) Iſt die gegebene Zahl ein Bruch, deſſen Zähler und Nenner < 10000, ſo verfährt man nach (§. 277.)

2) Beſteht ſie aus Ganzen und iſt > 10000, ſo giebts 2 Fälle. Sie iſt entweder eine Primzahl oder nicht. Im lezten Fall iſt die Summe der Logarithmen ihrer Faktoren dem Logar. der gegebenen Zahl gleich (§. 273.) und dieſe Auflöſung iſt die leichteſte und gewiſſeſte. Es ſeye die Zahl N = abc, ſo wär

$$\begin{array}{l} la \\ lb \\ lc \\ \hline la+lb+lc = labc = lN. \end{array}$$

Allein im erſten Fall fällt diß Verfahren weg, und ihn aufzulöſen iſt folgender Satz nöthig.

§. 286.

Die Differenzen 2er groſſen Zahlen und die Differenzen ihrer Logarithmen ſind beynahe gleich, wenigſtens nur in ſehr kleinen Theilen verſchieden.

Beweiß.

3548 — 3547 = 1 und 3548 — 3546 = 2 folglich die 2te Differenz doppelt ſo groß als die erſte. Es iſt aber auch l 3548 — l 3547 nach den Tafeln = 1224 und l 3548 — l 3546 = 2449. Da nun 1224 × 2 = 2448, ſo iſt auch die 2te logarithmiſche Differenz beynahe doppelt ſo groß als die erſte, denn ihr fehlt nur ein 10 Millionſtel. (§. 284. 2.)

Zuſatz.

Man kann alſo die Differenzen der Zahlen mit den Differenzen ihrer Logarithmen vergleichen, ohne einen, einen merklichen Einfluß habenden Irrthum zu begehen, und die Logarithmen aller Zahlen, welche nicht über 10 Millionen ſteigen, auch durch Hülfe der kleinern Tafeln finden, wodurch ſich bereits unzählige wichtige Berechnungen ausführen laſſen.

§. 287.

Geſezt, die Zahl 196668 wär eine Primzahl, ſo findet ſich ihr Logarithme nach dem vorhergehenden folgendermaſſen:

1) Man ſchneide die 4 erſten Ziffern von der linken gegen die rechte Hand ab, und ſuche zu ihnen den Logarithmen in den kleinen Tafeln. Z. E. 1966|68, ſo bleiben 1966, und l 1966 = 3.2935835.

2) Da nun in 1966, n = 4 folglich n — 1 = 3, in der geſuchten Zahl aber n — 1 = 5, ſo wird

der Nro. 1. gefundene Logarithme, wenn ſeine Kennziffer hier um 2 Einheiten vermehrt wird 1196600 = 5.2935835 (§. 281. 12. 13.) Daher verändre man die Kennziffer des Nro. 1. gefundnen Logarithmen ſo, daß ſie um 1 kleiner wird als die Zahl der Ziffern, zu welchen man den Logarithmen ſucht.

3) Man ziehe aber auch den Nro. 1. gefundnen Logarithmen unverändert von dem nächſtgröſſern auf ihn in den Tafeln folgenden ab. Hier iſt

der nächſtgröſſere = 11967 = 3.2938044
der gefundene = 11966 = 3.2935835

---

die logarithmiſche Differenz = 2209
die Zahlen dazu waren 196700
und 196600 Daher

---

die Differenz der Zahlen = 100
In Nro. 1. hingegen waren die Zahlen
196668 und
196600 Daher

---

die erſte Zahlen-Differenz = 68 folglich,

4) Verhält ſich nach (§. 286.) die 2te Nro. 3. gefundne Zahlen-Differenz zur 2ten Nro. 3. gefundnen logarithmiſchen Differenz, wie die erſte Nro. 1. gefundne Zahlen-Differenz zur Differenz der 11966 und 1196668. Daher ſpreche man, wenn in Nro. 1. zwo Ziffern zur Rechten übrig geblieben: 100 : zur Nro. 3. gefundnen logarithmiſchen Differenz, wie die Nro. 1. zur Rech-

ten übrig gebliebene Zahlzeichen, zur 4ten geometriſchen Proportionale.

100 : 2909 = 68 : 1502 (§. 220.)

Blieb eine Ziffer übrig, ſo wär der erſte Satz 10, blieben 3, ſo wär er 1000 ꝛc. ꝛc.

5) Nun addirt man zu dem Nro. 1. gefundnen, aber auch in Abſicht auf die Charakteriſtik nach Nro. 2. veränderten Logarithmen die Nro. 4. gefundne Zahl, ſo iſt die Summe Logarithme der geſuchten Zahl.

d. i. (Nro. 1 und 2.) 5.2935835
Nro. 4.) 1502

1196668 = 5.2937337

Zuſatz.

Mit Vorſatz wählt ich eine Zahl, welche ſich in brauchbare Faktoren zerfällen läßt, um nun auch durch die Erfahrung nach (§. 285.) zeigen zu können, daß wirklich der wahre 1196668 gefunden worden. Denn da 196668 = 5463 × 36, ſo iſt

15463 = 3.7374312
136 = 1.5563025 Daher

1196668 = 5.2937337 wie vorhin.

§. 288.

Die Zahl zu einem Logarithmen zu finden, der nicht in den Tafeln ſteht.

Auflöſung und Beweiß.

1) Iſt die Charakteriſtik des gegebenen Logarithmen <3 und man findt ihn nicht genau, d. i. nicht nach allen ſeinen Ziffern in den Tafeln, ſo verwandle man ſeine Charakteriſtik in 3 und ſuch' ihn, unter dieſer veränderten Kennziffer, in den nämlichen Tafeln. Die neben ihm ſtehende Zahl iſt = der geſuchten mit 10tel, 100tel, 1000tel, je nachdem die Kennziffer um 1, 2, 3 Einheiten vermehrt wurde. (§. 281. 13.)

2) Iſt aber die Charakteriſtik >3, ſo ſucht man ihn vergeblich geradezu in den kleinen Tafeln, den einigen Fall von der Zahl 10000 ſelbſt ausgenommen. Hier beobachte man folgendes:

a. Man vermindre die Charakteriſtik des gegebenen Logarithmen um ſo viel Einheiten, bis ſie = 3, und bemerke die Anzahl der weggenommenen Einheiten.

b. Schlage den Logarithmen unter dieſer verminderten Charakteriſtik in den kleinen Tafeln auf, bis man alle ſeine Zahlen richtig findet, und bemerke die ihm zugehörige Zahl.

c. So viel Einheiten nach Nro. a weggenommen worden, eben ſo viel Nullen hänge man an die Nro. b gefundne Zahl. Dieſe iſt der verlangten zum gegebenen Logarithmen gehörigen Zahl gleich. (§. 281. Nro. 13.)

d. Sollte aber der Nro. a an der Charakteriſtik verminderte Logar. nicht vollſtändig in den Tafeln gefunden werden, ſo iſts ein Zeichen, daß die zu

ihm gehörige Zahl noch einen Bruch bey ſich habe. Dieſen Fall behandle man alſo:

a) Man verfahre nach Nro. a, ſuche den nächſtkleinern von dieſem Logar. in den Tafeln, die zu ihm gehörige Zahl, aber auch die Differenz des nächſtkleinern und nächſtgröſſern Logarithmen.

b) Man ſuche die Differenz des nächſtkleinern und des gegebenen Nro. a veränderten Logarithmen.

c) Die Differenz Nro. *a* giebt den Nenner, die Nro. *b* gefundene den Zähler des Bruchs, den man zu der Nro. *a* gefundnen Zahl ſezt.

d) Nun vermehre man ſowohl die Nro. *a* gefundne Zahl als den Zähler des Nro. *c* gefundnen Bruchs mit ſo viel Nullen, als Nro. a Einheiten weggenommen wurden. Entſtünde hieraus ein uneigentlicher Bruch, ſo ſucht man die Ganzen, ſezt ſie zur ganzen Zahl und den Reſt als Bruch hinzu. Z. E. Es ſeye der gegebene Logar. = 4. 2428643 ſo iſt er nach Nro. a) 3. 2428643 und die zum nächſtkleinern in den gewöhnlichen Tafeln befindliche Zahl = 1749

folglich 11750 = 3. 2430380
11749 = 3. 2427898 Daher die

erſte logarithmiſche Differenz = 2482 Nro. *a*.

Ferner Nro. *b*. 3. 2428643
3. 2427898 und die

2te logar. Differenz = 745 Alſo

Nro. *c*. $1749\frac{745}{2482}$

Endlich Nro. *d.* $17490\frac{2450}{2482} = 17493\frac{2}{1241} =$ der zum Logarithmen 4. 2428643 gehörigen Zahl. Von dieſem lezten Fall läßt ſich der Beweiß leicht mündlich aus §. 277 und 281. Nro. 13. geben.

§. 289.

Negative Logarithmen ſind möglich! (§. 277.) nicht aber Logarithmen für negative Gröſſen, z. E. für — a oder — 12. Denn poſitve Logarithmen gehören für alle poſitive Zahlen, welche > 1 und negative Logarithmen zu allen Zahlen, welche eigentliche Brüche, folglich < 1 ſind, und doch > 0 (§. 277 und 281.) Nun iſt aber — 12 weder 1 noch 0, folglich haben negative Gröſſen gar keine Logarithmen.

§. 290.

Der Hauptnutzen der Logarithmen zeigt ſich zwar in der Trigonometrie, aber auch nicht nur mittelbar, ſondern unmittelbar in allen Theilen der Mathematik. Viele arithmetiſche ſehr beſchwerliche Aufgaben können durch ſie erleichtert werden, denn nun laſſen ſich die (§. 243 und 244.) gegebene Formeln folgendermaſſen ausdrücken:

1) $u = am^{n-1}$

$lu = la + (n-1)\,lm$

2) $a = \frac{u}{m^{n-1}}$

$la = lu - (n-1)\,lm$

3) $m = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = lm = \frac{(lu - la)}{(n-1)}$

4) Und nun läßt ſich auch aus
$u = am^{n-1}$, n finden, dann

$$lu = la + (n-1)\,lm \ (\text{Nro. } 1.)$$

$$lu - la = (n-1)\,lm$$

$$\frac{lu - la}{lm} = n - 1$$

$$\frac{lu - la}{lm} + 1 = n$$

Ferner iſt nach (§. 244.)

1) $S = \frac{am^n - a}{m - 1}$ daher

$$lS = (lN(la + n\,lm) - a) - l(m-1) \ (§.279.)$$

2) $\frac{Sm - S}{m^n - 1} = a$

$$\frac{S(m-1}{m^n - 1} = a$$

$$(lS + l(m-1) - lN(nlm) - 1) = la \ (§.279.)$$

3) Da $m = \frac{S - a}{S - u}$ ſo iſt

$$lm = l(S - a) - l(S - u$$

4) $S = \frac{am^n - a}{m - 1}$

$$S(m-1) + a = am^n$$

$$\frac{S(m-1) + a}{a} = m^n$$

$$lN\,(lS + l(m-1) + a) - la = nlm$$

$$\frac{lN\,(lS + l(m-1) + a) - la}{lm} = n$$

Desgleichen (§. 246.) war $S = \frac{an}{n-m}$ folglich

$$lS = (la + ln) - l(n-m)$$

Und (§. 247.) $S = \frac{an}{n+m}$ daher nun

$$lS = (la + ln) - l(n+m)$$

Anmerkung.

In allen dieſen Formeln wird alſo hiedurch das in groſſen Zahlen äuſſerſt beſchwerliche Multipliciren und Dividiren glücklich vermieden, und man wird auf keine, nach Käſtners Ausdruck, unüberwindliche Rechnungen geführt. Welch groſſen Einfluß dieſe Erleichterung auf die wichtigſten Aufgaben der praktiſchen Rechenkunſt habe, läßt ſich aus (§. 248.) ſehr leicht beurtheilen. Mehr Anwendungen der Logarithmen in der praktiſchen Rechenkunſt, ſind aus dem bisher erklärten für ſich verſtändlich, und ſollen zum Ueberfluß mündlich gegeben werden.

X. Abſchnitt.

Kurze Geſchichte der Arithmetik, nebſt den Hauptſchriftſtellern und dem Rechnen der Blinden.

§. 291.

Sobald ſich die Anzahl der Menſchen mehrte, wurde das Mein und Dein, mit dieſem Tauſch und Handel,

hiedurch Zählen und Rechnen unvermeidlich. Das Lezte wird daher beynahe ſo alt, als die nur etwas mit Menſchen bevölkerte Erde ſeyn. Aber auch ſeine Aufgaben wurden, ſo wie die Bevölkerung wuchs, durch den vergröſſerten Handel und Wandel zuſammengeſezter, zu ſchwer, als daß man ſie leicht im Kopf hätte auflöſen können, und diß veranlaßte die Erfindung der Zahlzeichen. Daher hält man, nach Herodot libr. II. und Strabo Geogr. libr. XVII. die Phönizier, als die erſten und wichtigſten Handelsleute, auch für die erſten, welche die Arithmetik ausführlich trieben, ja nach Cedrens Zeugniß ſoll Phönix Agenors Sohn die erſte Rechenkunſt in phöniziſcher Sprache geſchrieben haben. Alle Völker, ſo weit die forſchende Geſchichte dringt, ſtieſſen auf das nämliche Syſtem im Numeriren, auf die dekadiſche Progreſſion, die alten Chineſer und ein unbekanntes Volk, von dem Ariſtotel ſpricht, ausgenommen. Die heutigen Oſtindianer (Niebuhr Reiſebeſchr. 2ter Band) und die Otaheiten bedienen ſich deſſelben (Geſchichte der Seereiſen 2c. 2c. im Südmeer, von Cook 2ter Theil p. 225) Vielleicht führte ſie die Zahl der Finger an beyden Händen darauf. Aber nicht alle hatten einerley Zahlzeichen.

§. 292.

Die älteſten Zahlzeichen hatten die Phönizier (§. 291.) ſie brauchten die Buchſtaben des Alphabets, folglich wahrſcheinlich die hebräiſche. Griechenland ahmt' es mit ſeinem Alphabet nach, erſezte aber die Stelle des mangelnden ן mit ϛ, und druckten 10, 20, 30 2c. 2c. durch ι, κ, λ 2c. 2c. aus. Auch Rom bediente ſich ſeiner Buchſtaben und alle Grammatiken geben ihre Bedeutung an. Allein dieſe Zahlzeichen waren weit unbequemer, als unſere wirklich übliche ſogenannte arabiſche Zahlen, welche den Indianern,

nicht Arabern oder Griechen urſprünglich zugehören. Denn

1) Man findet arithmetiſch arabiſche Handſchriften mit der Aufſchrift: Die Kunſt, nach indianiſcher Methode zu rechnen, der indianiſche Calcul ꝛc. ꝛc. und eine dergleichen in Leyden befindliche hat Zahlzeichen, welche den unſrigen ſehr ähnlich ſind. Siehe Specim. Calc. flux. Vorrede p. 9.

2) Nach Alſephadi's Commentar über das arabiſche Gedicht: Tograi Lamiat'o l Ajam rühmen ſich die Indianer vorzüglich: Des Buchs Golaila ve Damma, Ihrer Art zu rechnen und des Schachſpiels. Wallis. Arithm. C. 9. Und Aben Ragel ein Araber aus dem 13ten Jahrhundert, behauptet, in der Vorrede eines aſtronomiſchen in Leyden befindlichen Werks ausdrücklich: Daß die indianiſche Weltweiſen dieſe Zeichen erfunden haben. Spec. Calc. flux. p. 8.

3) Vom Planudes hat man eine Handſchrift aus dem 13ten Jahrhundert unter dem Tittel: Λογιϛικὴ Ινδικὴ ᾽η ψηφοφορία κατὰ Ινδοὺς. Das von ihm beſchriebene Numeriren iſt vollkommen das unſrige, ja er ſagt nach der Erklärung der 9 Zahlzeichen: „Und dieſe 9 Charaktere ſind die „indianiſche. Sie haben überdiß noch ein Zehn„tes, welches ſie Τζίφρα nennen, und durch o „ausdrücken, diß gilt bey ihnen nichts.“

4) Nach Walliſens Algebr. C. 3. fängt die, auch im 13ten Jahrhundert, in Verſen, von Joh. de ſacro Boſco herausgegebene Arithmetik alſo an:

Hæc, Algorithmus, ars præſens, dicitur, in qua
Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris.

5) Voſſius mag alſo (in ſeinen Anmerkungen zum Pompon. Mela p. 64.) geirrt haben, wenn er vorgiebt: Daß die Araber dieſe Zeichen von den Griechen, die Indianer aber von den Arabern erhalten hätten, ohngeachtet ſie auch Huet den Griechen zuſchreibt. Würde diß geiſtreiche Volk eine ſo herrliche Erfindung ungenützt gelaſſen, nicht eingeführt haben?

6) Nun behauptet zwar Boethius im 6ten Jahrhundert in ſeiner Geometrie: Daß die Pythagoräer gewiſſe Apices oder Charaktere als Zahlzeichen erfunden hätten, ja es kommen in dem Meadiſchen und Altdorfiſchen Exemplar dergleichen vor, die ſehr viel Aehnlichkeit mit den unſrigen haben. S Transact. Philoſ. Nro. 439. A. 1735. und Weidler de Charact. Num. vulgar. & eorum ætate, diſſert. mathem. critica. Wittemb. 1727. 4to. Alſo kannte ſie Griechenland bald nach den Zeiten des Pythagoras. Freylich wird hierauf geantwortet: Dieſe Charaktere wurden von einer ſpätern Hand damals erſt hineingeſchrieben, als die arabiſche Zahlen ſchon allmählich bekannt wurden, ſie ſind nicht vom Boethius. Allein diß findet wenigſtens beym Altdorfiſchen Exemplar nicht ſtatt. „Es im Manuſcript „keine Spur, daß die Figuren von einer „ſpäthern Hand hineingeſetzt worden.“ So ſchreibt mir ein Mann, der Manuſcripte gewiß zu beurtheilen weiß, und das obige auf mein Bitten gütigſt nachgeſehen, Herr Doktor Doederlein von Altdorf, den erſten December 1779, durch deſſen Güte ich auch die Tab. I. fig. 5. mitgetheilte Abſchrift von dieſen Charakteren erhalten habe.

7) Vielleicht läßt ſich alles folgendermaſſen vereinigen: Nro. 1, 2, 3 und 4. überzeugen uns, daß

die Indianer im Beſitz dieſer Zeichen ſind und waren. Die Art, ſie zu ſchreiben, iſt morgenländiſch nicht griechiſch, und der eigenſinnig bey ſeinen Gewohnheiten bleibende Charakter der Indianer, der ſo äuſſerſt abgeneigt iſt, etwas von Fremden anzunehmen, iſt Bürge dafür, daß Indien ſie nicht von Griechenland erhalten. Sie konnten aber aus Indien frühe zu den Arabern und ihren Nachbarn, mit welchen die Griechen in groſſem Verkehr ſtunden, kommen. Von dieſen kamen die indianiſchen Zahlen nach Griechenland, aber gerade, da die Wiſſenſchaften allmählig ſanken, daher blieben ſie allgemein ungenützt. Boethius, der im Anfang des 6ten Jahrhunderts ſchrieb, hatte Griechenland ſeine Wiſſenſchaften zu danken, auch dieſe Zeichen von demſelben gelernt, und bediente ſich ihrer, ohne ihren eigentlichen Urſprung zu kennen. Und ſo können unſre heutige Zahlzeichen indianiſchen Urſprungs und dannoch dem Boethius bekannt geweſen ſeyn. Die Zeichen der heutigen Indianer ſiehe Tab. I. fig. 6.

§. 293.

Gerbert, ein Mönch in Fleury, der im Jahr 999 unter dem Namen Sylveſter II. Pabſt wurde, und vorhin viele Jahre in Spanien bey den Saracenen ſeine mathematiſche Einſichten bereichert hatte, brachte dieſe Zahlzeichen zwiſchen den Jahren 960 und 970 zum zweytenmal in den Occident, wie aus ſeinen 1636 in Paris neu aufgelegten Briefen, vorzüglich aus dem 160ten erhellet. Aber erſt Sacro Boſco (ſonſt Joh. von Hallifax) machte ſie im 13ten Jahrhundert, in ſeiner Arithmetica Arabum allgemein bekannt, da ſie vorhin faſt niemand als Mathematiker von Profeſſion kannten. Von der Dyadik, Tetraktik ꝛc. ꝛc. ſiehe (§. 250 und 251.)

§. 294.

Von der Arithmetik überhaupt merke der Anfänger folgende Schriften:

1) Nicomachi Arithmetices libr. duo. Paris 1538, welche ſchon einige 100 Jahr vor Chriſti Geburt geſchrieben worden.

2) Des Pſellus im 9ten Jahrhundert aufgeſetzt, von Wilhelm Xylander ins Latein überſetzte und 1556 in Baſel in 8vo gedruckte Arithmetik.

3) Jordani, de Arithmetica libr. duodecim aus dem 12ten Jahrhundert, welche Jacob Faber 1480 mit Erklärungen herausgegeben.

4) Jodoci Willichii Arithm. libr. tres. 8vo Argentor. 1540. hat ſehr deutliche Begriffe.

5) Georg. Heniſchii Arithm. perfecta & demonſtr. Aug. Vindel. 1609. 4to. trägt alle Beweiſe ſyllogiſtiſch vor.

6) Aus Walliſens Werken hat man einen Auszug von Eduard Wells unter dem Tittel: Elementa Arithmeticæ 1698. 8vo, iſt vorzüglich für die, welche ſeine ſämtliche Schriften nicht beſitzen.

7) Ludwig Wenzen demonſtrativiſche Einleitung in die Rechenkunſt.

8) Wolfii Elementa Matheſ. T. I. Genev. 1740. 4to.

9) Clausbergs demonſtrativiſche Rechenkunſt.

10) Jakob Friderich Malers kurzer und deutlicher Unterricht zum Rechnen. 3te Auflage 1777. 8vo.

11) Nic. Schmids Rechenkunſt gr. 8vo Leipz. 1774.

12) Karſtens Lehrbegriff der ſämtlichen Mathematik erſter und zweyter Theil, ſcharf in Beweiſen und ſehr praktiſch.

13) Segner Curſus Mathematicus &c. Siehe Geometrie.

14) Käſtners Anfangsgründe, wo die gröſte Schärfe im Beweiſen herrſcht und erlernt werden kann.

§. 295.

Weit jünger iſt die Erfindung des Buchſtaben-Calculs. Man druckte im Anfang nur die unbekannten Gröſſen durch ℞ und noch im Anfang des 17ten Jahrhunderts in den Niederlanden durch ⊙ aus, ungeachtet ſchon 1559 Joh. Buteon in ſeiner Algebre, die gröſſeren Buchſtaben des lateiniſchen Alphabets dazu brauchte. Aber Viet (welcher 1540. zu Fontenai in Poitou gebohren, nachmals Requetenmeiſter zu Paris wurde und dort 1603 im 63ten Jahr ſtarb) gieng weiter und bezeichnete auch die bekannte Gröſſen allgemein, doch immer noch mit den groſſen Buchſtaben. Seit ſeinen Zeiten nennt man dieſen Calcul oft Algebra ſpecioſa, univerſalis, litteralis, auch Calculus litteralis. Endlich aber führten Harriott in Praxi artis analyticæ Londin. 1631. und Des Cartes, ſtatt der groſſen, die bequemern kleinen Buchſtaben ein. Dieſer letzte berühmte Mann, war zu Haye in Touraine 1596 gebohren und ſtarb 1650 in Schweden. Siehe Saverien Hiſtoire des Philoſoph. Modern. T. III. p. 191.

§. 296.

Das gewöhnliche Multipliciren und Dividiren zu erleichtern, erfand Joh. Nepper Baron von Merchiſton ein Schotte ſeine Rechenſtäbchen, die er 1617 unter dem Tittel Rhabdologia und Mſr. Rauſſain in den Memoires de l'Acad. des ſciençes de Paris 1738 verbeſſert herausgab. Eben ſo wurde die von mir

§. 82 und 101 berührte Methode ohne Einmaleins zu multipliciren und zu dividiren, auch im 17ten Jahrhundert von Ludolphen Profeſſor der Mathem. in Erfurt erfunden und von Huyghens gebilligt, und ſie iſt wirklich für die Ausübung faſt noch brauchbarer als die Nepperiſchen Stäbe. (§. 232. c.) Die regelmäſſige Anwendung unſrer Seelenkräfte bey den 4 Rechnungsarten zeigt vortrefflich Wolf Elem. T. 1. Arith. C. II. §. 125.

§. 297.

In der Materie von den Dignitäten, ſo weit ich ſie behandelt habe, merke man: Daß die Araber, für ſie, ganz andere von den unſrigen abweichende Benennungen und Zeichen hatten, Wolf. Elem. T. I. Arithm. §. 252. und 254; daß Diophant, Viet und Oughtred ſie wiederum anders nannten, l. cit. daß die alten italieniſchen Mathematiker die Namen Zenſus, Zenſizenſus ꝛc. ꝛc. deswegen angenommen, weil ſie die geſuchte Gröſſe la Coſa, ihr Quadrat Cenſo oder il Zenſo (welches Produkt heiſſet) und die 3te Dignität Cubo hieſſen; daß Cartes in ſeiner Geometrie auf Kepplers Anrathen (Harmon. Mundi libr. 1. fol. 35 und 36) den viel bequemern Gebrauch der beſtimmten, Leibnitz und Newton aber die unbeſtimmten Exponenten eingeführt; daß Viet den erſten Grund zum Binomiſchen Lehrſatz gelegt (ſiehe Franciſci Viete Galli opera mathem. in unum volumen congeſta p. 305. fol. 1646. von Franz Schooten) welcher freylich erſt von Newton diejenige Geſtalt erhalten, welche Euler und Käſtner durch die höhere Arithmetik ſo ſehr vervollkommnet haben.

§. 298.

Mein 5ter Abſchnitt führte in den Vorhof der Algebra, wir wollen auch hier nur den Vorhof ihrer Geſchichte betretten.

x) Griechen und Araber erfanden ſie, die letztern erhielten ſie nicht von den erſtern (S. Wallis. Algebra) König Geber iſt weder ihr Erfinder noch Pathe, denn ihr Name ſtammt vielmehr (wie Lucas de Burgo in ſeiner Summa Arithm. & Geometr. zeigt) von Aljabar v' Almucabala ab, welches im Arabiſchen Oppoſitio & Reſtitutio heiſſet, oder von den zwey Stammwörtern: Gebera, oppoſuit und cabala reſtituit, welches mit der Sache ſelbſt und den Benennungen der älteſten italieniſchen Algebraiker trefflich übereinſtimmt, welche, z. E. Cardan dieſe Wiſſenſchaft die Kunſt Almucabala nennen. Mohammed ben Muſa und Thebit ben Corah ſind die älteſte bekannte arabiſche algebraiſche Schriftſteller. Von des erſten Werken findet man noch Handſchriften in manchen Bibliotheken (Bibl. Biblioth. mſſ. de P. de Montfaucon.) Nach dem Cardan erfand er die Auflöſung der Gleichungen vom 2ten Grad, ſo wie Diophant unter den Griechen die unbeſtimmten Gleichungen, worinn er es ſehr weit brachte, daher dieſe ganze Lehre noch öfters Ars Diophantea genennt wird. Er lebte ſchwer-
x lich ſpäther als 365 Jahr nach Chriſti Geburt und iſt wenigſtens der älteſte griechiſche algebraiſche Schriftſteller. Seine 13 Bücher Arithmetiſche Fragen wurden von der gelehrten Hypathia gegen das Ende des 4ten und Anfang des 5ten Jahrhunderts commentirt (Suidas voce Hypathia) wovon wir aber nur noch die 6 erſten, mit den Anmerkungen des Maximus Planudes (§. 292. 3.) haben. Er kannte ſchon die Gleichungen vom 2ten Grad, bezeichnete die unbekannte Gröſſen mit ς, das Quadrat δυναμις

oder $\delta\mu$, die 3te Dignität κυβος u. zeichnete ſie κ^{v}, die 4te mit $\delta\delta^{v}$, die 5te mit $\delta\kappa^{v}$. Welche Aehnlichkeit mit unſern neuen Benennungen und Zeichen!

2) In Europa machte ſie Leonhard von Piſa, der ſtarke Reiſen durch Arabien und den Orient gethan hatte, im Anfang des 15ten Jahrhunderts ſo bekannt, daß in der Mitte deſſelben, Regiomontan, in ſeinem Buch von den Triangeln, bey einer Gleichung vom 2ten Grad ohne Umſchweife ſagen konnte: Fiat ſecundum cognita artis præcepta. Lucas Paccioli de Burgo Sti Sepulcri iſt alſo gewiß nicht der erſte, der ſie uns mittheilte, aber wohl der erſte, der 1494 eine Algebre (l'Arte Maggiore) drucken ließ, ſo wie Italien überhaupt die Mutter der europäiſchen Algebra iſt, wie Mſr. Gua in der Geſchichte derſelben zeiget (Memoires de l'Academie des ſcienҫes 1751.)

3) Unter den Teutſchen machten ſich in ältern Zeiten Michael Stifel Paſtor zu Holzdorf 1544 durch ſeine Arithmetica integra 4to, Chriſtoph Rudolph durch ſeine 1553 neu aufgelegte Coß, und in Portugall Peter Nunnez oder Nonius, der 1567 eine Algebre in Caſtillianiſcher Sprache geſchrieben, vorzüglich um dieſe Wiſſenſchaft verdient.

4) Anfänger, welche die erſte Gründe weiter treiben wollen, werden ſich folgender neuerer Schriften mit groſſem Nutzen bedienen.

a) Anton Zeplichal Algebra in Tabellen. Fol. Breßlau.

b) J. Fr. Malers Algebra Carlsruhe 1761. Neueſte Ausgabe 1768. 8vo.

c) Clairaut's aus dem Franzöſiſchen überſetzte Algebre. Berlin 1778. 8vo. von G. H. Tempelhof vermehrt.

d) Leonhard Euler vollſtändige Anleitung zur Algebra, 2 Theile gr. 8vo Lund 1771.

Der Stärkere ſehe Newtons Arithmetica univerſalis Lugd. Batav. 4to 1732. nebſt Segners, Karſtens und Käſtners Schriften, die ihm ganz ſicher den Weg zu den Bernoullis und Eulers groſſen Werken bahnen.

§. 299.

Um die Lehre von den Verhältnüſſen und Proportionen machte ſich, unter den Alten, Euklid der Geometra im 7, 8 und 9ten ſeiner Elemente, welche Andreas Tacquet in ſeine Theoriam & Praxin Arithmetices Amſtel. 1704. 8vo vollſtändig einrückte, unendlich verdient. Unter den Neuern gehören vorzüglich hieher: K. Fr. de Rees ein Holländer, deſſen praktiſche Rechenkunſt 1739 zu Göttingen und 1766 in Bremen verbeſſert, überſetzt wurde, und Nic. Schmid (§. 294. 11.) der die Reeſiſche Regel ſehr deutlich vorträgt; Karſten (§. 235.) Clausberg (§. 294.) Haaſens Unterricht zu Arbitragen und Wechſelrechnungen und ſein vollſtändiger Münzmeiſter und Münzwardein.

§. 300.

Das Praktiſche in der Lehre von den Progreſſionen hat vielleicht am vollſtändigſten bearbeitet: Frid. Wilh. Marpurg in ſeinen Anfangsgründen des Progreſſional-Calculs gr. 8vo Berlin und Stralſund 1774. Die Theorie giebt für Anfänger am deutlichſt und gründlichſten Euler in ſeiner Algebra (§. 298. 4. d.)

§. 301.

Zur Decimalrechnung legte die erſten Gründe, der Mönch Barlaam 1330, deſſen Logiſtica Joh. Cham-

bery in Paris 1600 in 4to mit seinen Erklärungen herausgegeben. Vorzüglich trugen die Decimalbrüche vor: Joh. Hartmann Bayer Med. Dokter in seinem, Frankfurt am Mayn 1619. in 4to herausgegebenen Werk, noch beſſer aber Samuel Cunn in A new and compleat Treatiſe of the doctrine of fractions vulgar and decimal. London 1714. 8vo und Samuel Reyher Prof. der Mathem. zu Kiel machte 1688 in 4to ſeine Bacillos ſexagenales zur Erleichterung des Sexageſimal-Calculs bekannt, worinn er die Neppeꝛiſche Rhabdologie glücklich nachahmete. Unter den neuern haben: Schmid (§. 294. 11.) und Häſeler die Decimalbrüche am deutlichſten, Karſten und Käſtner am gründlichſten bearbeitet.

§. 302.

Zur Geſchichte der Logarithmen merke man

1) Stifeln als den erſten Erfinder in ſeiner Arithm. integra (§. 298. 3.) welche Jobſt Byrge Landgräflich-heſſiſcher Aſtronom zwar nützte, aber ſeine, die Logarithmen betreffende Erfindungen eiferſüchtig für ſich behielte (Keppler in tab. Rudolph. p. 11.

2) Ohngeachtet alſo die erſte Logarithmen-Erfinder Deutſche waren, ſo muß man doch geſtehen, daß Nepper (§. 296.) einen ganz andern Weg gegangen, gewiß der erſte Berechner der Logarithmen geweſen, wenn er auch, obſchon es ſehr unwahrſcheinlich iſt, etwas davon aus Teutſchland ſollte gehört haben. Brigg verbeſſerte, Vlacq ergänzte, Gardiner vermehrte ſie.

3 a) Die erſte Nepperiſche Tafeln kamen 1614 zu Edimburg 4to unter dem Tittel: Canon mirificus Logarithmorum heraus, Nepper ſtarb 1618

und 1619 erſchien von ſeinem Sohn eine vermehrte Ausgabe.

b) Benjamin Urſin gab Deutſchland 1625 in Cölln dieſelbige,

c) Welche Jakob Bartſch Kepplers Schwieger-Sohn in Sagan 1630 mit vielen Verbeſſerungen edirte, deſſen Ausgabe, Joh. Caſpar Eiſenſchmid Med. Doktor in Strasburg 1700. neu auflegen ließ, unter dem Tittel: Jo. Keppleri & Jac. Bartſchii Tabulæ manuales logarithmicæ.

4) Heinrich Brigg, Profeſſor in Oxford, beſuchte Neppern kurz vor ſeinem Tod, ſahe bey ihm ſeinen Appendicem de logarithmorum præſtantiori uſu und fand da bereits die Einrichtung unſers heutigen ſogenannten Briggiſchen Syſtems. Nach dieſer berechnete er die Logarithmos Numeror. vulgar. auf 14 Figuren von 1 — 10000 und von 90000 — 101000 in ſeiner Arithmetica logarithmica Londin. 1624. fol. worinn die Theorie und Gebrauch dieſer Tafeln ſchön entwickelt ſind, ohngeachtet die Nepperiſche Logarithmen, noch immer in der höhern Geometrie, bey den Hyperboliſchen Logarithmen gebraucht werden.

5) Die von Briggen gelaſſene groſſe Lücke füllte Adrian Vlacq aus, welcher Heinr. Briggs vermehrten Canonem Logar. numer. natur. 1628 fol. Goudæ herausgab und darinn die Logarithmen von 1 — 100000 lieferte.

6) Hierauf folgten die Sherwiniſchen Tafeln in London 1705. 8vo und dann die Gardineriſchen: Sherwin's mathematical tables contrivd aſter a moſt comprehenſiv method &c. &c. by William Gardiner. London 1742. med. 8vo, welche von 1 — 101000 gehen.

7) Und endlich gab Pater Pezenas die vollſtändigſte und größte Sammlung, welche man dermalen hat, von 1 bis 102100 heraus. Der Tittel iſt: Tables de Logarithmes, contenant les logarithmes des nombres, depuis 1 jusqu'à 102100 &c. &c. publiees ci devant en Angleterre par Mſr. Gardiner. A Avignon. Chez J. Aubert. 1770. fol.

8) Ihre Natur und Berechnung lehren ſehr gut für Anfänger: Häſeler; für Stärkere: Spohrs Anfangsgründe der Algebra Frankfurt 1776. Käſtner, Karſten, Keil de natura & Arithmetica logarithmorum, Benjamin Martins in Logarithmologia, or the whole doctrine of Logarithms common and Logiſtical in theory and practice &c. London. gr. 8vo 1740. Hallei in Transact. philoſoph. 1695, wie auch die Nro. 7. bemerkte Tafeln.

§. 303.

Die berühmteſte dermalen vorhandene Logarithmentafeln wären alſo folgende:

a) Gröſſere: Neppers, Urſins, Bartſchens, Briggens, Blacquens, Sherwins, Gardiners, Pezenas, wozu noch kommen: Joh. Carl Schulzens neue und erweiterte Sammlung logarithmiſcher, trigonometriſcher, mechaniſcher und anderer zur Mathematik unentbehrlicher Tafeln, nebſt Anweiſung zu deren Gebrauch, 2 Theil in 8vo Berlin 1778, welche unter den gröſſern beynahe die bequemſten ſind.

b) Kleinere oder Auszüge aus den Blacquiſchen. Die vom Holländer Gooden herausgegebene, welche wegen der Genauigkeit allen den Rang ſtrittig machen. Die Haager Ausgabe von 1665.

Ozanams die nach der Haager berichtigt wurden. Die Lyoner Ausgabe von Joſeph Thioly 1670. Strauchens von Sturm in Amſterdam 1700 edirte. Wolfens in Halle 1711, 1728, 1744 und 1772 herausgekommene. Tables des Logarithmes pour les ſinus &c. &c. & pour tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 10800 Paris 1760. Chez Guerin & de la Tour von Deparcieux. Und endlich Tafeln der Sinuſſe ꝛc. ꝛc. nebſt den Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 — 20000. Wien 1777. 4to bey Trattnern, welche eigentlich die Rivardiſche und unter den kleinern die vollſtändigſte ſind. Faſt bey allen finden ſich die in der Trigonometrie nöthige Tafeln, wovon an ſeinem Orte.

§. 304.

Einige Erfindungen, welche das Rechnen ganz maſchinenmäſſig, wenigſtens ſehr leicht und richtig machen ſollen, muß man doch auch kennen, ohngeachtet ſie blos Perſonen, welche ſehr viele praktiſche ermüdende Rechnungen auszuführen haben, aber gewiß nicht den erſten Anfängern zu empfehlen ſind. Hieher gehören, theils gewiſſe Tabellen, wodurch Multipliciren und Dividiren, ohne Logarithmen, vermieden wird, vorzüglich aber die ſogenannte Rechenmaſchinen.

1 a) Jo. Georgii Herwart ab Hohenburg Tabulæ arithmeticæ προσθαφαιρέσεως univerſales, Monachii 1610. fol. Sie verwandlen Multipliciren in bloſſes Addiren, Dividiren in bloſſes Subtrahiren.

b) Lamberts Tafel der Primzahlen und der Faktoren, von den Zahlen die unter 10200 und durch 2, 3, 5 nicht theilbar ſind. Siehe ſeine Beyträge zur Mathem. IIter Theil, 2ter Abſchnitt.

c) A. Felkel Tafeln aller einfachen Faktoren, der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 10 Millionen. 1ſter Theil, enthaltend die Faktoren von 1 bis 144000. gr. Fol. 2 Blätter Text, 3 Blätter Tafeln und Beylage. Wien 1776.

d) Die Wolfens Sinustafeln beygefügte Tafeln der Quadrat- und Cubikzahlen von 1—1000. Joh. Paul Büchners Tabulæ radicum quadratorum & cubicorum von 1 — 12000 längl. 8vo Nürnberg 1705. ingleichem Ludolfs Tetragonometria tabularis, Jenæ 1712. 4to, welche alle Quadrate der Zahlen von 1 — 100000 nebſt einer ſchönen Anweiſung zum Gebrauch enthält.

2 a) Samuel Morlands Beſchreibung zweyer Inſtrumente, wodurch ſich Addition, Subtraktion und Multiplikation, durch Hülfe einiger Räder, verrichten läßt. London 1673. 12mo.

b) Joh. Poleni Rechenmaſchine, wovon in ſeinen Miſcellaneis Venet. 1709. 4to die Beſchreibung.

c) Michael Scheffelts Pes mechanicus artificialis. Ulm 1699. 4to. Wie auch deſſelben Unterricht vom Proportionalcirkel. Ulm 1755. 4to.

d) Die von Leibnitzen ſchon in ſeiner Jugend erfundene Rechenmaſchine. Miſcellan. Berol. p. 394.

e) Beſchreibung und Gebrauch der logarithmiſchen Rechenſtäbe ꝛc. ꝛc. von J. H. Lambert. Augsburg 1772. 8vo. NB. Brander verfertigt ſie wirklich und ſie koſten 6 fl.

f) Das chineſiſche Rechenbrett.

g) Die von Herrn Pfarrer Hahn in Kornweſtheim nahe bey Ludwigsburg ſeit einigen Jahren verfertigte groſſe Rechenmaſchine.

Mehrere Nachrichten von dergleichen und ähnlichen mechaniſchen Rechnungsarten, nebſt mancherley Rechenmaſchinen, ſiehe in Leupolds Theatro Arithmetico-Geometrico.

§. 305.

Hätte nicht Saunderſon in Engelland und erſt neuerlich Herr Hofkammerrath Nieſen, durch wirkliche Beyſpiele, die Möglichkeit erwieſen, Blindgebohrne oder dieſen doch voll ähnliche Perſonen die ganze Mathematik zu lehren, ſo würde man diß Unternehmen für albern erklärt haben. Der erſte wurde 1682 in York gebohren, im erſten Jahr ſeines Lebens durch die Pocken blind, lernte aber doch von ſeinem Vater latein, griechiſch, die Arithmetik und im 18ten Jahr durch Hülfe guter Freunde Meßkunſt und Algebra, begab ſich im 25ſten nach Cambridge, wo er Profeſſor der Mathematik wurde und dieſe Stelle mit groſſem Ruhm bis an ſeinen Tod 1739 bekleidete, wie unter andern die, von ihm in engliſcher Sprache aufgeſetzte, 1741 in 2 Quartbänden herausgekommene Elemente der Algebra beweiſen. Diß Beyſpiel machte dem Hochfürſtlich-Speyeriſchen Hofkammerrath Herrn Nieſen Muth, ein ähnliches mit Herrn Weiſenburg dem Sohn eines Kurfürſtlich-Pfälziſchen Kammerdieners 1773 zu verſuchen. Und es glückte ihm, durch ſeine ſinnreiche Erfindungen, ſeinem blinden Schüler, nicht nur die reine Mathematik, ſondern auch den mechaniſch und optiſchen Theil der angewandten, nach Wolfens Anfangsgründen, ſo gut beyzubringen, daß dieſer bereits die reine Mathematik mit vielem Vortheil andere gelehret, und unter andern in Speyer, einem 9jährigen blinden Knaben, die 4 Rechnungsarten in 3 Monaten beybrachte. Seine Methode, welche vor der zum Grund gelegten Saunderſoniſchen noch

beträchtliche Vorzüge hat, hat er in ſeiner: Rechenkunſt für Sehende und Blinde, Mannheim 1773, wie auch: Algebra für Sehende und Blinde, Mannheim 1777, ſehr ſchön und deutlich beſchrieben, und nicht nur auf Arithmetik, ſondern auch auf die Geometrie angewendet. Ich will das Weſentliche hievon kurz berühren, und die geometriſche Methode eben ſo an ſeinem Ort vortragen.

1) Er läßt 12 kleine hölzerne Vierecke T. I. fig. 1. deren Seite AB = 18 franzöſiſche Linien, $\frac{1}{4}$ Zoll dick, verfertigen. In jedes werden fig. 2. neun Löcher gebohrt, worein kleine hölzerne Zäpfchen fig. 3. paſſen, von welchen der blinde Rechner eine Anzahl in einer Büchſe vor ſich hat.

2) Dieſe kleine Vierecke werden fig. 4. auf einer hölzernen Tafel A B C D, wo BC = 58 Linien, AC = 78 Linien, BE = 3 Linien, ſo befeſtigt, daß alle durch einen Einſchnitt, deſſen Breite GF = 2 Linien, von einander abgeſondert werden, und die Löcher fig. 2. alsdann auch durch die untere Tafel ABCD durchgebohrt, aber auch in den Einſchnitten ſelbſt, nach der Figur, dergleichen Löcher angebracht.

3) Dieſe Einſchnitte, welche in Saundersons Tafeln fehlen, erſpahren zweyerley Zäpfchen, dienen zu vortheilhafter Bezeichnung des Endes einer Zahl, der Nullen, Brüche, algebraiſcher Zeichen und Rechnungsarten ꝛc. ꝛc.

4) Mit 4 dergleichen Tafeln, wie fig. 4. die entweder neben oder unter einander geſetzt werden, laſſen ſich ſchon Millionen ausdrücken, und die Tafeln können noch ganz bequem in der Taſche nachgetragen werden. Bey Hauſe bedient ſich

der Rechner einer gröſſern Tafel, wo BC, 14, AC aber 19 kleine Vierecke hat, und die 23 Zoll 3 Linien in der Breite und 31 Zoll 4 Linien in der Länge beträgt. Ja man könnte, ſowohl die kleinen als die gröſſern Tafeln, noch beträchtlich verkleinern, wenn man ſie von ſehr feſtem Holz und die Zäpfchen von Drath verfertigen lieſſe.

5) Es drücken demnach fig. 4. verglichen mit fig. 1. und 2. die Zäpfchen der oberſten Reihe die Zahl 205, die in der zwooten Reihe 687, und die in der dritten Reihe, die Summe dieſer beyden Zahlen 892 aus. Woraus ſich leicht begreiffen läßt: Wie durch Hülfe dieſer Tafeln, alle Zahlen geſchrieben, und die 4 Rechnungsarten ausgeführt werden können.

6) Ein Modell von Pappendeckel macht dieſe ganze Vorſtellung ſehr deutlich. Uebrigens iſt leicht zu begreiffen, daß Saunderſons Lehrer durch die Nepperiſche Rechenſtäbchen auf dieſe Methode konnten geleitet werden.

§. 306.

Wer die in dieſem zehnten Abſchnitt bemerkte Schriften mit Ernſt ſtudiert, der wird die groſſe Werke der alten und neuern ohne Anſtoß zu ſeinem Vortheil kennen lernen und verſtehen. Und diß iſt zu meiner Abſicht genug, denn von allen arithmetiſchen Schriften eines Eulers (Siehe eines der vollſtändigſten Verzeichniſſe derſelben in Adumbratione Eruditorum Baſilienſium. Baſil. 1780. p. 61—69.) Aniama, von Döhren, Vierenklee, Butſchany, Krebs, Gerlicz, Tempelhof, Adam, Brander, Tönne, Lambert, Macko, Lichtenberg, Polack, Guden, Kühn, Heſſe,

Schwarzer; Scherfer, Kruſe, Buck, Spengler, Sprenger, Oesfeld, Wiedeburg, Pflugbeil, Funk, Küſter, Woerdemann, Trentel, Zumkley, Buſch, Baſedow, Henze, Unterberger, Vicum, Roſenthal, Fr. Chr. L. Karſten, Metzburg, Gruber, Martini, Müller, Dorn, Horvath, Hindenburg, Dürr, Fuß, Heynatz, Hellwig, Hofmann, Langner, Vollimhaus, Kritter, Reinhold, Lous, Bugge, Le Moine, Ronyer, Bertrand, Huth, Heinſius, Boch, Schirmer, Klipſtein, Helfenzrieder, Jocher, Oeder, Mehler, Buße ꝛc. ꝛc. welche ſeit 20 Jahren herausgekommen, weitläuftig zu ſprechen, iſt hier der Ort nicht.

Geometrie.

Abkürzungs-Zeichen,

welche in der Geometrie vorkommen.

Zeichen eines Winkels überhaupt	∠
— — — rechten Winkels	∟
— — der Parallel-Linien	⌗
— — eines Triangels überhaupt	△
— — — rechtwinklichten Triangels	◺
— — — Quadrats	□
— — — Rektangels	▭
— — — Rhombus	▱
— — — Rhomboiden	▱
— — der Peripherie	P oder p
— — — halben Peripherie	$\frac{P}{2}$ oder $\frac{p}{2}$
— — des Quadranten	$\frac{P}{4}$ oder $\frac{p}{4}$
— — eines Bogens	∞
— — des Diameters	D oder d
— — — Radius	R oder r oder r
— — der Cirkelfläche	C oder c
— — — halben Cirkelfläche	$\frac{C}{2}$ oder $\frac{c}{2}$
— — — Fläche des Quadranten	$\frac{C}{4}$ oder $\frac{c}{4}$

Geometrie.

Erſter Abſchnitt.

Begriffe, Grund- und Heiſche-Sätze.

§. 1.

Alle, auf irgend eine Art, ſichtbare Gegenſtände ſind ausgedehnt. Das Aeuſſerſte dieſer Ausdehnung, oder wo ſie aufhört, nennen wir ihre Schranken oder Grenzen (limites). Eben dieſe Ausdehnung geſchieht nach einer dreyfach verſchiedenen Richtung, welche der Sprachgebrauch, Länge, Breite und Dicke, zuweilen Höhe oder Tiefe (Longitudo, Latitudo, Profunditas) zu nennen pflegt. Ein Körper, im geometriſchen Verſtand, iſt alſo alles, was nach Länge, Breite und Dicke zugleich ausgedehnt iſt.

§. 2.

Die Schranken eines Körpers (Solidum) heiſſen Flächen (Superficies).

Zuſatz.

Sie haben daher nur eine zwofache Ausdehnung, keine Dicke.

§. 3.

Linien (linea) ſind die Schranken einer Fläche,

Zuſatz.

Dieſe haben folglich nur eine einfache Ausdehnung, ſind blos lang, nicht breit, nicht dick.

§. 4.

Punkte ſind Schranken der Linien.

Zuſatz.

Folglich ohne alle Ausdehnung und haben gar keine Theile. Von der Wirklichkeit dieſer Begriffe, mündlich.

§. 5.

Eine Linie überhaupt entſteht, wenn ſich ein Punkt von ſeinem Ort bewegt, und ununterbrochene Spuhren ſeines Gangs hinterläßt. Sie iſt Gerade (recta) wenn ſich das Punkt immer nach einerley Richtung bewegt; Krumm (curva) wenn es ſeine Richtung alle Augenblick verändert; Vermiſchte Linien (mixta) ſind aus geraden und krummen, Gebrochene Linien, aus geraden, die aber nicht nach einerley Richtung liegen, zuſammengeſetzt.

Zuſatz 1.

Linien entſtehen aus der Bewegung eines Punkts, ſind aber nicht eine Sammlung von Punkten, oder ſie beſtehen nicht, aus einer Reihe von Punkten.

Zuſatz 2.

Krumme Linien beſtehen aus unendlich vielen unendlich kleinen geraden Linien.

§. 6.

Hieraus flieſſen folgende Heiſche- und Grundſätze.

1) Von jedem Punkt kann, nach jedem andern Punkt, eine gerade Linie gezogen werden, wenn nicht ſchon eine gezogen iſt.

2) Jede begränzte gerade Linie kann, an ſich, nach Belieben verlängert werden.

3) Zwey beliebige Punkte, in einer geraden Linie, beſtimmen ihre Lage (poſitio) und die beyden Endpunkte ihre Gröſſe (Magnitudo).

4) Zwiſchen zwey Punkten iſt nur eine gerade Linie möglich.

5) Alle gerade Linien ſind einander ähnlich, folglich auch ihre Theile den ganzen Linien.

6) Bey krummen Linien ſind die Theile den Ganzen unähnlich.

§. 7. Tab. I. fig. 1.

Eine Fläche entſteht, wenn ſich eine Linie in die Quere bewegt, und ununterbrochene Spuhren ihres Ganges hinterläßt. Z. E. F. 2. AB nach CD oder AB nach A E. Ein Körper entſteht, wenn ſich eine Fläche in die Quere bewegt und der Raum, durch den ſie ſich bewegt hat als ſtätig gedacht wird. Z. E. F. 3. ABCD nach EFGH.

§. 8.

Die Fläche iſt Eben (plana) wenn eine auf ſie gelegte gerade Linie, nach allen Lagen, ſo darauf paſſet, daß alle Punkte der Linie auf dieſelbige fallen. Sie iſt Uneben, wo diß nicht ſtatt findet, und zwar Erhaben (convexa) wenn die gerade Linie nicht auf die Schranken; Hohl (concava) wenn ſie zwar auf die Schranken, nicht aber auf die Mitte paſſet. Vermiſchte Flächen ſind aus Ebenen und Unebenen zuſammengeſetzt.

§. 9. Tab. I.

Gerade Parallel-Linien ſind gerade Linien, welche in einerley ebenen Fläche liegen, und auf beyden Seiten, nach Belieben, verlängert werden können, ohne jemals zuſammen zu ſtoſſen. Z. E. F. 4. AB ⌗ CD. Sind ſie nicht parallel, ſo werden ſie ſich (F. 5.) wie EF und GH, wenn ſie verlängert werden, auf einer Seite z. E. in J durchſchneiden, auf der andern aber immer mehr entfernen, und nun heiſſen ſie im erſten Fall Zuſammenlaufende (convergentes) im andern, Auseinanderfahrende (divergentes) Linien.

§. 10. Tab. I.

Eine Senkrechte oder Perpendikular-Linie (normalis, perpendicularis) ſteht auf einer andern ſo, daß ſie auf keine Seite mehr hängt als auf die

andere, z. E. F. 6. AB auf CD. Schiefe Linien ſind das Gegentheil davon.

Zuſatz.

Schief iſt nicht nothwendig krumm (§. 5.) z. E. Ein gerader Fuß.

§. 11. Tab. I.

Ein Ebener Winkel (Angulus planus) iſt die Neigung zwoer Linien, welche in einerley ebenen Fläche liegen, in einem Punkt zuſammenſtoſſen und wenn ſie verlängert würden, ſich durchkreuzen F. 8. Das Punkt der Berührung B heißt der Scheitel (Vertex) des Winkels, die Linie AB und BC ſeine Schenkel (Crura). Von ihrer Benennung ABC, CBA, B oder x ꝛc. ꝛc. mündlich.

§. 12. Tab. I.

Nebenwinkel (Contigui) ſind diejenige, welche den Scheitel und einen Schenkel AB gemeinſchaftlich haben, z. E. F. 9. u und v. Benachbarte Winkel (Deinceps poſiti) wenn der eine, durch die Verlängerung eines Schenkels des andern durch den Scheitel entſteht, z. E. F. 7. x und y. Scheitelwinkel (Verticales) entſtehen, wenn beyde Schenkel durch den Scheitel verlängert werden, z. E. F. 10. m und n.

Zuſatz.

Alle benachbarte Winkel ſind Nebenwinkel, aber nicht umgekehrt.

§. 13. Tab. I.

In Rechten Winkeln (rectus) ſtehen die Schenkel ſenkrecht (F. 11) in Schiefen Winkeln (obliquus) ſchief auf einander, z. E. ABC iſt ∟, DBC oder EBC ſind ſchiefe Winkel. DBC iſt ſpitzig (Acutus) wenn er kleiner, und ſtumpf z. E. EBC wenn er gröſſer als ein ∟ iſt.

§. 14. Tab. I.

Eine Linie iſt horizontal, wenn auf ihr, ein Faden, daran etwas ſchweres hängt, ſenkrecht ſteht, z. E. AB auf CD (F. 6.) Vertikal-Linien ſind alle auf horizontalen gefällte ſenkrechte Linien. Eine Horizontal-Fläche iſt eine Ebene, auf welche gelegte Horizontal-Linien nach jeder Richtung paſſen. Vertikal-Flächen machen mit Horizontal-Flächen rechte Winkel. Ein Beyſpiel von der erſtern giebt die Oberfläche eines ſtillſtehenden Waſſers, von den letztern, die Wände eines gut gebauten Zimmers.

§. 15. Tab. I.

Weite oder Entfernung im weitläuftigen Verſtand (diſtantia ſenſu latiori) iſt die gerade Linie von einem Gegenſtand zum andern; Im ſtrengen Verſtand (ſenſu ſtrictiori) Eine gerade Horizontale, welche ſenkrecht, von einem Gegenſtand, auf eine Linie oder Fläche gezogen wird, z. E. F. 4. EF iſt die Weite der Parallelen AB und CD.

Zuſatz.

Parallelen haben alſo aller Orten einerley Weite im ſtrengſten Verſtand, oder es iſt EF = GH, und es ſind auch krumme Parallelen möglich, z. E. die Wagengleiſe, wenn ſich der Wagen wendet.

§. 16.

Höhe im allgemeinen Verſtand (altitudo ſenſu latiori) iſt eine, von dem auſſer einer Horizontallinie oder Fläche liegenden, am weitſten von ihr entfernten Punkt, auf dieſelbige gezogene ſenkrechte Linie, z. E. Eines Thurns oder Bergs.

Zuſatz.

Höhen und Weiten ſind hauptſächlich durch die horizontale und ſenkrechte Lage unterſchieden.

§. 17. Tab. I. F. 4.

Wenn zwo ⫲ AB und CD, von einer dritten geraden Linie JK durchſchnitten werden, ſo entſtehen 8 Winkel. o, x, r und s. Die welche auſſerhalb der ⫲ liegen, nennt man äuſſere Winkel im weitläuftigen Verſtand; u, y, m und n, die ſich zwiſchen den ⫲ befinden, Innere Winkel im weitläuftigen Verſtand; y und n oder m und u, welche auf der nämlichen Seite der durchſchneidenden Linie JK liegen, Innere Winkel im ſtrengſten Verſtand; Wechſelswinkel heiſſen die zween innere Winkel, von wel-

chen einer zur Rechten, der andere zur Linken der durchſchneidenden Linie JK liegt und doch nicht benachbarte Winkel ſind, z. E. n und u; y und m. Derjenige äuſſere Winkel iſt dem Innern Entgegengeſetzt, welcher mit ihm auf der nämlichen Seite der durchſchneidenden Linie JK liegt und weder ſein Nachbar, noch Scheitelwinkel iſt, z. E. x und n. ꝛc. ꝛc.

§. 18.

Figur heiſſet ein jeder in eine oder mehrere Linien eingeſchloſſener Raum. Daher hat man überhaupt: Geradlinicht, Krummlinicht, Vermiſchtlinichte Figuren (§. 5). Ihre Erklärungen flieſſen aus dem angeführten §.

Zuſatz.

Zwo gerade Linien können keine Figur bilden, wohl aber eine einige krumme oder vermiſchte Linie.

§. 19. Tab. I.

Eine Kreisfläche (circulus) entſteht (§. 12) wenn ſich, auf einer ebenen Fläche, eine gerade Linie AC, um ein feſtes Punkt C herum bewegt, bis ſie wieder in ihre erſte Lage kommt. Diß feſte Punkt C wird Mittelpunkt (centrum), die krumme Linie, welche die Fläche einſchlieſſet, Umfang (Peripheria). Ein beliebiges Stück des Umfangs, z. E. AB, Ein Bogen (arcus): Jeder Bogen AK welcher gerade der 4te Theil des Umfangs iſt, Quadrant genennet. Jede gerade vom Umfang, bis wieder an den Umfang

aber nicht durch den Mittelpunkt gezogene Linie EF heißt Sehne (chorda), die durch den Mittelpunkt gehende Sehne DG, Durchmeſſer (diameter): Eine vom Mittelpunkt bis an den Umfang gezogene gerade Linie AC, Halbmeſſer (Radius, Semidiameter); Das Stück eines Halbmeſſers HJ welcher durch die Mitte einer Sehne gezogen wurde, das zwiſchen der Sehne und dem Umfang liegt, Pfeil (Sagitta). Eine Fläche DBAKG welche vom Durchmeſſer und einem Theil des Umfangs eingeſchloſſen wird, wird eine halbe Kreisfläche (Semicirculus) Die (F. 13) von einer Sehne AB und einem Bogen ACB eingeſchloſſene Fläche, Abſchnitt (Segmentum) und zwar, ein kleinerer oder gröſſerer Abſchnitt (Segmentum minus, majus) je nachdem es kleiner oder gröſſer als eine halbe Kreisfläche iſt; Ein in zween Halbmeſſer BF und EF und einen Bogen BE eingeſchloſſenes Stück der Kreisfläche aber, Ausſchnitt (Sector) genennet.

§. 20. Tab. I.

Es kommen aber auch in Cirkeln mancherley Winkel vor, welche die, in, oder an denſelbigen gezogene Linien machen. Die hauptſächlichſten ſind folgende: (F. 14 und 15) Ein Winkel x ſtehet auf einem Bogen (inſiſtit arcui) wenn ſeine Schenkel AC und BC durch die Endpunkte des Bogens A und B gehen. Liegt der Scheitel C in der Peripherie des Cirkels, ſo iſts ein Winkel in der Peripherie (Angulus ad Peripheriam) liegt er aber, wie bey y im Centrum, ſo iſts ein Winkel am Centrum (Angulus ad centrum)

und ein Winkel auſſer dem Centrum, hat ſeinen Scheitel auſſer dem Centrum, entweder in, oder auſſerhalb des Cirkels, ſteht aber dennoch mit ſeinen Schenkeln auf einem Bogen, z. E. u und m.

Eine Tangente (Tangens) F. 15. iſt eine gerade Linie AB, welche den Cirkel ſo berührt, daß ſie, wenn ſie verlängert wird, ganz auſſer den Cirkel fällt. Hingegen heißt CD Secante (Secans) wenn die gerade Linie die Peripherie in zwey Punkten E und D durchkreuzet. Der Winkel des Abſchnitts (Angulus Segmenti) AFG hat zu ſeinem Scheitel den Berührungspunkt F, ſeine Schenkel aber ſind, die Sehne GF und die Tangente AF. Hingegen der Winkel im Abſchnitt, GHF liegt mit ſeinem Scheitel in des Abſchnitts Bogen und ſeine Schenkel gehen durch die Endpunkte der Sehne. Man ſagt, daß ihn der Abſchnitt GHF enthalte, er ſelbſt aber ſteht auf dem gröſſern Segment GEDF, und wenn zween Abſchnitte gleiche Winkel enthalten, ſo ſind ſie einander ähnlich. Endlich heißt der Winkel o welchen der Bogen GHF mit der Tangente AF im Berührungspunkt macht, der Berührungs-Winkel (Angulus contactus).

§. 21.

Aus dieſen §. 19 und 20. gegebenen Begriffen, flieſſen folgende Heiſche- und Grundſätze:

1) Aus jedem Punkt, kann, mit jedem Radius, an ſich ein Cirkel beſchrieben werden.
2) Was aus gleichem, auf einerley Art, erzeugt oder beſchrieben wird, iſt gleich.

3) Alle Radii in einem oder gleichen Cirkeln ſind einander gleich (§. 20.)

4) Folglich auch alle Diameter.

5) Der Diameter iſt doppelt ſo groß als der Radius, folglich $D = 2 R$ oder $R = \frac{D}{2}$

6) Cirkel von gleichen Diametern oder Radiis ſind gleich.

7) Was aus ähnlichen Dingen, auf ähnliche Art, erzeugt wird, iſt ähnlich.

8) Folglich ſind alle Cirkel einander ähnlich.

§. 22. Tab. I.

Figuren, welche drey Seiten haben, heiſſen Dreyecke (triangulum) Vierecke (quadrangulum) wenn ſie vier, Vielecke im eigentlichen Verſtand, (Polygonum) wenn ſie mehr als vier Seiten haben. Die Letztern erhalten im Lateiniſchen, Griechiſchen und Deutſchen ihre beſtimmtere Namen, von der Zahl ihrer Winkel, daher Fünf, Sechs ꝛc. ꝛc. Eck. Wenn im Triangel alle drey Seiten gleich ſind, ſo iſts Gleichſeitig (æquilaterum, isopleuron) F. 16. Sind nur zwo gleich, Gleichſchenklicht (æquicrurum, isosceles) F. 17. Iſt keine der andern gleich, Ungleichſeitig (ſcalenum) F. 18. Im Rechtwinklichten Triangel (rectangulum) F. 19. iſt ein rechter; Im ſtumpfwinklichten Triangel (obtusangulum) F. 20. ein ſtumpfer; Im ſpitzwinklichten Triangel (acutangulum) F. 21. Drey ſpitzige Winkel. Im erſten nämlich △ heiſſen

die Seiten, welche Schenkel des ∟ ſind, Catheti und die dem ∟ gegenüberſtehende Seite, Hypotenuſe.

§. 23. Tab. I.

Parallelogramme nennt man alle Vierecke in welchen die gegenüberſtehende Seiten gleich ſind. Das Quadrat F. 22. hat vier gleiche Seiten und lauter rechte Winkel; das Rechteck (Rectangulum, oblongum) Vier ungleiche Seiten und lauter rechte Winkel F. 23. Die Raute (Rhombus) hat vier gleiche Seiten und ſchiefe Winkel F. 24. Die länglichte Raute (Rhomboides) vier Seiten, von welchen nur die ſich gegenüberſtehende gleich ſind und lauter ſchiefe Winkel; F. 25. Ungleichſeitige Vierecke (Trapezia) F. 26 und 27. haben lauter ungleiche Seiten und Winkel. Sind noch zwo Seiten parallel, ſo iſts ein Parallel-Trapez, F. 27. wo nicht, ein Gemeines Trapez.

§. 24. Tab. I.

Ordentliche Vielecke (regularia) F. 28. haben lauter gleiche Seiten und Winkel; Unordentliche Vielecke (irregularia) heiſſen alle, in welchen entweder die Seiten, oder Winkel, oder beyde ungleich ſind. F. 29. Diagonalen ſind gerade Linien, welche aus oder von einem Winkel, in oder an einen Winkel in einer Figur ſo gezogen werden, daß ſie weder Seitenlinien, noch ſchon gezogene Diagonalen durchſchneiden z. E. AB und AC F. 29. Grundlinie (Baſis) einer Figur, nennt man diejenige, worauf

man ſich die Figur als ruhend vorſtellt, z. E. BC F. 29. Inſonderheit heißt im gleichſchenklichten Triangel diejenige Grundlinie, auf welcher die beyden gleichen Seiten ruhen, F. 17. z. E. AB. Höhe der Figur (Altitudo) iſt die Perpendikulare, die vom Punkt, welches am weiteſten von der Grundlinie entfernt iſt, auf dieſelbe gefällt wird. Z. E. DE auf AB F. 18.

Zuſatz.

An ſich iſt demnach die Wahl der Grundlinie willkürlich, doch wählt man, vorzüglich im Dreyeck, wenn nicht beſondre Umſtände das Gegentheil erfodern, gemeiniglich die größte dazu. Sollte aber z. E. im ſtumpfwinklichten Triangel ACD F. 20. CD Grundlinie seyn, ſo muß ſie verlängert werden, wenn die Höhe AB darauf gezogen werden ſoll, und CD bleibt dennoch Grundlinie.

§. 25. Tab. I.

Wenn in zwo Figuren F. 30. Ein ∠ x in der erſten, einem andern ∠ y in der andern gleichet, ſo heiſſen diejenige Winkel gleichnamigt (Anguli homologi) welche, von den erſten an gerechnet, in einerley Ordnung auf einander folgen. Z. E. Von u, m, n, r, s, ſind die gleichnamigten t, v, p, q, t. Gleichnamigte Seiten hingegen (latera homologa) ſind diejenige, welche in beyden Figuren, gleichnamigte Winkel nach einerley Lage einſchlieſſen. Z. E AB und GH, AF und GM ꝛc. ꝛc.

Zuſatz.

Sobald in zwo Figuren die gleichnamigte Winkel gleich ſind, und die gleichnamigte Seiten einerley Verhältnuß haben, ſo ſind die Figuren ähnlich. (§. 21. Nro. 7.) Daher ſind alle regulare Vielecke, welche gleichviel Seiten haben, einander ähnlich.

§. 26. Tab. I.

Eine Figur iſt in einen Cirkel beſchrieben, F. 31. wenn alle ihre Winkel, Peripheriewinkel ſind (§. 20.) Sie iſt um einen Cirkel beſchrieben, F. 32. wenn alle ihre Seiten, Tangenten (§. 20.) des Cirkels ſind. Im erſten Fall heißt der Cirkel ein um die Figur beſchriebener, im andern, ein in die Figur beſchriebener Cirkel.

§. 27.

Zwo Linien, Winkel, oder auch Figuren decken einander (congruunt) wenn die Schranken von einer, und alles was zwiſchen ihnen liegt, ganz, auf die Schranken der andern, und alles was zwiſchen ihnen liegt, paſſen. Hieraus werden folgende Grundſätze verſtändlich:

1) Zwo Linien, Winkel, oder Figuren, die ſich Wechſelsweiſe decken, ſind einander $\cong$ und umgekehrt.

2) Alle rechte Winkel ſind $\cong$.

§. 28.

Meſſen heißt eine Gröſſe zur Einheit annehmen und ſehen, wie oft ſie in einer andern Gröſſe enthalten ſeye. Dieſe zur Einheit angenommene Gröſſe wird Maasſtab genennt. Die Ruthe iſt ein Maasſtab von einer zwar beſtimmten, aber, im Ganzen, ſehr willkührlichen Länge. Sie wird in beſtimmte gleiche Theile eingetheilt und jeder derſelben heißt ein Schu; Gleiche beſtimmte Theile des Schues ſind Zolle; Gleiche beſtimmte Theile des Zolls Linien; Scrupel, Prim, Secund rc. rc. Scrupel. Ihre Zeichen ſind folgende: Ruthe (Decempeda) o; Schu (pes) ′; Zoll (Digitus) ″; Linie (linea) ‴; Prim-Scrupel (Scrupulus primus) I v; Secund-Scrupel v; rc. rc. Decimal-Maas heißt dasjenige, deſſen gröſſere Theile immer in 10 kleinere getheilt werden, oder deſſen Theile nach der dekadiſchen Progreſſion fortſchreiten; Gemeines Maas, wo diß Geſetz nicht beobachtet wird. Von dieſem ſind die wichtigſte Arten: Das Sechzehnſchuige, wo die Ruthe in 16′, das zwölfſchuige, wo die Ruthe in 12′, das Sechsſchuige gewöhnlich franzöſiſche Maas (Toiſe) wo die Ruthe in 6′ eingetheilt wird, womit, der Eintheilung nach, das deutſche Klaffter oder Lachter, gewöhnlich übereinkommt. In dieſen drey Arten von gemeinen Maas, hat immer der Schu 12″, der Zoll 12‴ rc. rc. auſſer im franzöſiſchen, wo die Linie in 10⁗ getheilt wird.

§. 29.

Allein die Gröſſe der Schue ſelbſt, iſt, vermuthlich wegen ihres Urſprungs, noch weit mehr, faſt an jedem Ort der Welt, von einander verſchieden, als die Eintheilung der Ruthen. Wer ſie ziemlich vollſtändig verglichen zu ſehen wünſcht, dem thut Malers Arithm. p. 172—175. Joh. Tob. Mayers gründlicher Unterricht zur praktiſchen Geometr. I. T. IItes Kap. und Eiſenſchmidt de Ponderibus & Menſuris Veterum Roman. &c. &c. Sect. III. vorzüglich in Rückſicht auf die Maaſe der Alten, ein Genüge. Für uns iſt, hier, eine genauere Kenntnus dreyer Hauptſchue, des königlich franzöſiſch, Londner und Rheinländiſchen, nebſt ihrer Vergleichung mit unſerm innländiſchen, wichtig. Die beyden erſtern, weil nach ihnen die wichtigſte Abmeſſungen, von den Akademien der Wiſſenſchaften vorgenommen werden, die letztern, wegen unſerm Vaterland und ſeinen Nachbarn. Es enthält alſo, wenn man den königlich-franzöſiſchen Schu in 1440 Theile theilt

Der königlich-franzöſiſche	—	1440 Theile.
Der Londner	— — —	$1351\frac{7}{12}$
Der Rheinländiſche	— —	$1391\frac{3}{10}$
Der hieſ. Unterländ. Landmeßſchu		$1241\frac{9}{23}$ ſolcher Theile.

Die Folge wird zeigen, wie vortheilhaft es iſt, wenn man dieſe Zahlen in Decimalbrüche verwandelt.

§. 30.

Der Geometer mag in der Welt hinkommen, wo er will, ſo theile er das, an dem Ort wo er meſſen ſoll eingeführte, unſern Ruthen ähnliche Maas, in 10 Theile ꝛc. ꝛc. um Decimalſchue ꝛc. ꝛc. §. 28. zu erhalten. Und nun läßt ſich diß Decimalmaas, wie die gewöhnliche Zahlen berechnen (Ar. §. 34) auch die vorkommende Brüche, wenn man groſſe Genauigkeit fordert, nach (Ar. Abſchn. VIII.) als Decimalbrüche behandlen.

§. 31. Anmerkung.

Wie dieſe Eintheilung geſchehen kann, wird unten, unabhängig von dieſem, gezeigt. Hier iſts genug, daß ſich die Möglichkeit vorausſetzen läßt. Mündlich, kurze hiſtoriſche Kenntnüſſe, von den Meßſtangen, Schnüren und Ketten, Alle hieher gehörige Berechnungen, ſiehe M. G. 2tes Kap. Es gründen ſich alſo beym Decimal-Maas

a) Gröſſere Sorten in Kleinere }
b) Kleinere - - - Gröſſere } zu verwandeln auf §. 28 und Ar. §. 121. Nro. 3 und 4.
c) Verſchiedene - Eine }
d) Addition }
e) Subtraktion } Verändern kein Maas,
f) Multiplikation }
g) Diviſion } Mit unbenannten Zahlen gleichfalls nicht.

Hingegen wird das gemeine Maas nach (Ar. §. 110 bis §. 115) behandelt, wovon im Vortrag das Ausübende.

§. 32.

Aus §. 28 bis hieher fließt die angebogene Tafel:

I. Verhältniß der vier uns wichtigſten Ruthen.

Decimalruthe	16ſchuige R.	12ſchuige R.	6ſchuige R.
1°	1°	1°	1°
$10'$	$16'$	$12'$	$6'$
$100''$	$192''$	$144''$	$72''$
$1000'''$	$2304'''$	$1728'''$	$864'''$
$10000''''$	$27648''''$	$20736''''$	$8640''''$

II. Verhältniß der uns wichtigſten Schue.

Franz. Schu.	Londner.	Rheinländ.	Durl. Unterl.
1440 –	$1351\frac{7}{12}$	$1391\frac{3}{10}$	$1241\frac{9}{23}$
Oder alle nach Ar. §. 257. in Decimalth. ausgedr.			
14400	13515	13913	12414

Nun erhellt aus I:

1) Daß die Ruthe im gemeinen Maas einerley Gröſſe behalte, wenn ſie ſchon nach dem Decimalmaas eingetheilt wird. Folglich iſt 1° ſechzehnſchuig Maas = 1° Decimalmaas, von eben dieſem ſechzehnſchuigen Maas.

2) Daß hingegen im gemeinen Maas die Gröſſe der Ruthen doppelt verſchieden iſt: Durch die Zahl ihrer Schue und die Gröſſe des Schues ſelbſt.

3) Wie durch Hülfe dieſer Tafel, verbunden mit (Ar. §. 220) Decimalmas, leicht in gemeines Maas, und umgekehrt zu verwandlen. M. G. 2tes Kap. §. 26. und 27.

4) Daß bey dieſer Gelegenheit die Logarithmen ſehr vortheilhaft anzuwenden. (Ar. §. 278.) Z. E. Wie viel geben 6 4 8° 9′ 4″ 3‴ Decimalmaas von der 16ſchuigen Ruthe, im 16ſchuigen gemeinen Maas?

1000‴ : 2304‴ = 9′ 4″ 3‴ Daher
l 9′ 4″ 3‴ = 2.9745117
l 2304 = 3.3624825

6.3369942
l 1000 = 3.0000000

3.3369942

Wozu die Zahl 2172‴ oder unter der Charakteriſtik 4; 2172‴ $\frac{6}{10}$. Folglich geben 648° 9′ 4″ 3‴ Decimalmaas, 648°, 15′, 1″ $\frac{3}{5}$ gemeines ſechzehnſchuiges Maas.

5) Eben ſo leicht läßt ſich, ſobald man ihr Verhältniß kennt, ein Schu in den andern verwandeln. Geſetzt man wollte wiſſen, wie viel 6 franzöſiſche Schue in Rheinländiſchen betrügen?

l 14400 = 4.1583625
l 6 = 0.7781513

4.9365138
l 13913 = 4.1434208

0.7930930

Wozu die Zahl = 6.2100. Daher werden zu 6 franzöſiſchen Schuen oder einer Toiſe, ſechs Rheinländiſche Schue + $\frac{21}{100}$, folglich zu 2 Toiſen = 12 Schue oder eine Rheinländiſche Ruthe + $\frac{42}{100}$ von einem Schu erfordert. Wer wird nun Sturmen in ſeinem Warhaften Vauban p. m. 85. glauben, wenn er verſichert: Man könne ſich, ſtatt der Toiſe, frey 6 deutſcher Schue bedienen. Es wird auf 180 Toiſen einen Fehler von 90 × 0,42 = 37,80 oder 3°, 1$\frac{4}{5}$ betragen.

Anmerkung.

Die erſte Einführung des ſo bequemen Decimalmaaſes hat man dem Stevin, einem geſchickten holländiſchen Ingenieur, zu danken, wie aus ſeiner praktiſchen Geomemetrie erhellet. Unbegreifflich iſts, daß die meiſten Franzoſen, welche ſonſt ſo ſehr auf Erleichterung ſehen, noch immer bey Ihrer Eintheilung bleiben. China bedient ſich der 10theiligen Maaſe, nicht nur in der Geometrie, ſondern auch im Geld u. Gewicht. V. P. Noel in Obſervat. Mathem. Phyſicis in India & China factis C. 7. p. 104. ſeq. Alle teutſche Mathematiker machen ſich dieſen Vortheil zu nutz, und bey uns wird er, ſeit der gröſſeren Ausbreitung geometriſcher Kenntnüſſe, ziemlich allgemein. Giebts einen Natürlichen Maasſtab für jede Gegend der Erde, wie müßt' er beſchaffen ſeyn, wär' es rathſam, vortheilhaft, ja möglich ihn einzuführen? Fragen, welche hiſtoriſch im mündlichen Vortrag, vollſtändig in der angewandten Mathematik, beantwortet werden. Man ſehe: Méſure des trois premiers dégrés du Meridien, par Mſr. de la Condamine, wie auch allgemeines Magazin T. I. V.

§. 33.

Um die Cirkel-Peripherien zu meſſen, theilt man jede Peripherie in 360 gleiche Theile und nennt ſie Grade; den 60ten Theil eines Grads Minute; den 60ten Theil einer Minute Secunde; eine 60tels Secunde Tertie ꝛc. ꝛc. Ihre Zeichen kommen mit den Zeichen der Ruthen, Schue, Zolle ꝛc. ꝛc. (§. 28.) uͤberein. Folglich waͤren 28°. 32′. 24″. 47‴ = 28 Grade, 32 Min. 24 Sec. 47 Tertien. Man ſondert naͤmlich hier, die Grade, Minuten ꝛc. ꝛc. durch Punkte von einander ab, um ſie nicht in manchen Faͤllen, mit Ruthen, Schuen ꝛc. ꝛc. zu verwechſeln.

Zuſatz.

1) Groſſe Cirkel haben groͤſſere Grade, Minuten ꝛc. ꝛc. als kleinere, aber nicht mehrere.

2) Der halbe Cirkel oder $\frac{p}{2}$ iſt immer = 180° und der Quadrant oder $\frac{p}{4}$ = 90°.

§. 34. Tab. I.

Ein jeder Winkel x (F. 8.) wird durch die Groͤſſe eines Bogens DE, welcher aus ſeinem Scheitel, zwiſchen ſeinen Schenkeln, beſchrieben wird, gemeſſen. So viel dieſer Grade, von dem ganzen Cirkel, wovon er ein Stuͤck iſt, hat, ſo viel Grade eignet man dem Winkel zu.

Zuſatz.

1) An ſich iſts einerley, ob dieſer Bogen, mit einem groſſen oder kleinen Radius, beſchrieben wird. (§. 33. Z. 1.)

2) Ein ∟ iſt = 90° (§. 33. Z. 2. und §. 13.) Ein ſtumpfer Winkel > 90° Ein ſpitziger Winkel aber < 90°. (§§. cit.)

Zweyter Abſchnitt.

Vorläufige Aufgaben und einige allgemeine Gründe der Geometrie.

§. 35.

Die Zeichnung der geraden Linien im Kleinen und Groſſen macht M. G. §. 57. bekannt. Wir bemerken überhaupt:

1) Zwey Punkte der zu ziehenden Linie müſſen immer gegeben ſeyn, und wenn ihre Gröſſe beſtimmt ſeyn ſoll, das Anfang= und Endpunkt (§. 6. Nro. 3.)

2) Alle Stäbe müſſen vollkommen ſenkrecht ſtehen.

3) Ein anders iſt, die Linie blos zum Meſſen, ein anders, um darnach zu arbeiten, ein anders, wenn ſie immer bleiben ſoll, zu ziehen. Kurze Begriffe von den Stäben und dem Senkbley. M. G. §. 40 ꝛc. ꝛc.

§. 36.

Ein verjüngter Maaſsſtab iſt ein Maaſsſtab im Kleinen, welcher nach dem nämlichen Verhältnuß, wie ein andrer Maaſsſtab im Groſſen eingetheilt worden. Er heißt vollkommen, wenn man, wenigſtens, auch Zolle genau darauf meſſen kann; Unvollkommen, wenn ſich nur Ruthen und Schue genau, die Zolle aber, entweder gar nicht, oder doch nicht genau dadurch beſtimmen laſſen. Seine, des Letztern nemlich, Verfertigung, ſiehe M. G. §. 33. wie auch der Ruthen ꝛc. ꝛc. §. 39.

Anmerkung.

Die Kenntnuß des vollkommenen verjüngten Maaſsſtabs ſetzt die Aehnlichkeit der Triangel voraus, kann alſo hier noch nicht erklärt, wohl aber ſo viel durch den Unvollkommnen ausgerichtet werden, als zum Verſtand und Beweiß der inzwiſchen vorkommenden Sätze nöthig iſt.

§. 37.

Eine gerade Linie ſowohl a) Im Kleinen b) Als im Groſſen zu meſſen, lehrt' uns ſchon (M. G. §. 69.) Der ganze Beweiß gründet ſich auf §. 27.

Anmerkung.

Wie wird eine ſehr lange Linie genau gemeſſen, und welche Vorſicht iſt in Ruckſicht auf die gerade Lage der Meßſtangen und ihr genaues Zuſammenſtoſſen nöthig?

§. 38.

Zeichnung der Cirkel im Kleinen und Groſſen. (M. G. §. 66.)

a. Wenn der Radius als Linie auf einer Ebene,
b. — — — in Ruthen, Schuen ꝛc. gegeben iſt.

Die Zeichnung ſehr groſſer Cirkel kann erſt beſſer unten erklärt werden. Hiſtoriſche Kenntnüſſe von den Cirkel-Inſtrumenten, wovon vollſtändiger im Anhang von den Inſtrumenten.

§. 39.

Wie ein Winkel von gegebenen Graden auf eine gegebene Linie zu tragen und ein ſchon gegebener Winkel zu meſſen ſeye, ſehen wir (M. G. §. 65. 71 u. 72.) Der Grund davon liegt §. 34.

Anmerkung.

Hiſtoriſche Kenntnuß des Tranſporteurs, Aſtrolabs, Quadrantens und Meßtiſchgens.

§. 40. Tab. I. F. 7.

Zween benachbarte Winkel x und y haben zuſammen 180° oder $x + y = 180°$.

Beweiß.

$$x = \propto EF$$
$$y = \propto GF. \text{ §. 34.}$$

$$x + y = \underbrace{\propto EF + \propto GF}_{=\,180° \text{ (§. 19 u. 21.)}} \text{ (Ar. §. 63)}$$

$$x + y = 180°$$

Zuſatz.

1) Daher iſts gleichviel, welcher von beyden gemeſſen wird, der nicht gemeſſene kann immer daraus gefunden werden, weil $x = 180° - y$ und $y = 180° - x$. (Ar. §. 63.) Man kann folglich auch mit einem bloſſen Quadranten ſtumpfe Winkel meſſen.

2) Wenn einer von den benachbarten Winkeln $= \frac{p}{4}$ ſo iſts auch der andere, und wenn beyde einander gleich ſind, ſo iſt jeder $= \frac{p}{4}$.

3) Auch mehrere Winkel o, x, y welche auf einer geraden Linie AB in einem Punkt zuſammenſtoſſen, ſind $= \frac{p}{2}$, folglich die Summe aller, um einen Punkt, oder gemeinſchaftlichen Scheitel herumliegenden Winkel $o, x, y, u, m, n = p$, indem $o + x + y = \frac{p}{2} = u + m + n = \frac{p}{2}$. Tab. II. F. 33.

§. 41. Tab. I. F. 10.

Alle Scheitelwinkel m und n ſind einander gleich.

Beweiß.

$$m + x = 180° \text{ (§. 40.)}$$

$$\| $$

$$n + x \text{ Daher (Ar. §. 62.)}$$

$$m + x = n + x$$

$$x = x \text{ (Ar. §. 61. 3.) folglich}$$

$$m = n \text{ (Ar. §. 63.)}$$

Zuſatz.

Wenn man daher gehindert würde, einen Winkel m zu meſſen, ſo ziehe man ſeinen Scheitelwinkel n nach §. 12. und meſſe dieſen.

Dritter Abſchnitt.

Von den Triangeln, geraden und Parallel-Linien.

§. 42. T. II. F. 34.

Wenn in zwey △ △ ABC und DEF zwo Seiten und der eingeſchloſſene Winkel, einzeln genommen, in einem, zwoen Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel, einzeln genommen, im andern gleich ſind, ſo ſind die ganzen △ △ gleich. Z. E. Wenn AB = DE, AC = DF, ∠A = ∠D, ſo iſt △ ABC = △ DEF.

Beweiß.

Denn beyde △ △, werden ſich, unter dieſen Bedingungen, wechſelsweiſe bedecken (§. 27.) Der ∠A muß auf den ∠D, folglich AB in DE, AC in DF, aber auch, weil AB = DE und AC = DF, B in E und C in F, folglich auch BC auf EF fallen.

Zuſatz.

1) Daher läßt ſich, aus zwo Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel ein beſtimmtes △ zeichnen. M. G. §. 109. II.

2) Wenn zwo Seiten und ein, einer von ihnen, gegenüberſtehender Winkel, gleichen, z. E. $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle C = \angle F$, ſo läßt ſich nicht auf die Gleichheit der beyden △ △ ſchlieſſen, indem dieſe Data ein △ noch nicht beſtimmen. Es ſeye Tab. II. F. 35. im △ ABC gegeben AB, AC und der $\angle C$. Man beſchreibe mit AB aus A den Bogen BD und ziehe AD, ſo iſt $AD = AB$ (§. 21. Nro. 3.) und nun wär' in beyden △ △ ABC und ADC, $AC = AC$, $AB = AD$, $\angle C = \angle C$, und doch die △ △ gewaltig verſchieden. Würde aber vorhin noch beſtimmt, ob der $\angle x$ ſtumpf oder ſpitzig ſeyn ſoll, ſo wär die Zweydeutigkeit gehoben. Dann im erſten Fall iſts alsdann gewiß das △ ABC, im andern gewiß △ ADC.

3) Folglich ſind Tab. II. F. 36. zwey ◺ ◺ in welchen ein Cathetus einem Cathetus und die Hypotenuſe der Hypotenuſe gleichet, wirklich gleich (Z. 2.) Allein diß läßt ſich, wie der Hauptſatz, noch ſchärfer zeigen. Sie werden ſich unter dieſen Bedingungen wechſelsweiſe decken. Es ſeye $AB = DE$ und $BC = DF$, A als ∟ = ∟ E. So deckt der ∟ A den ∟ E (§. 27. Nro. 2.) Folglich fällt AC in EF, AB auf DE, B auf D. Nun beſchreibe man aus D mit $DF = BC$ den Bogen GH, ſo fällt BC gewiß in den α GH, und zwar entweder in F oder drüber oder darunter. Allein in den beyden letzten Fällen würde AC nicht in EF fallen, wie doch bewieſen wurde;

daher muß auch C auf F fallen, folglich der ganze △ ABC den ganzen △ DEF decken und demſelben gleich ſeyn.

§. 43. Tab. II. F. 34.

Wenn in 2 △ △ ABC und DEF eine Seite und die beyde anliegende ∠ ∠ in einem, einer Seite und den beyden anliegenden ∠ ∠ im andern, einzeln genommen, gleichen, ſo ſind die ganze △ △ gleich, z. E. Es ſeye AC = DF, ∠ A = ∠ D und ∠ C = ∠ F, ſo iſt auch AB = DE, BC = EF und ∠ B = ∠ E.

Beweiß.

Denn auch unter dieſen Bedingungen müſſen ſich beyde △ △ wechſelsweiſe bedecken (§. 27.) AC fällt ganz auf DF alſo A auf D und C auf F. Ferner der ∠ A auf den ∠ D folglich AB in DE, der ∠ C auf den ∠ F, daher BC in EF. Es muß aber auch der Punkt B auf den Punkt E fallen, weil ſich ſonſt die ∠ A und D, C und F unmöglich decken könnten, daher fällt nun auch der ∠ B auf den ∠ E und die ganzen △ △ ſind gleich.

Zuſatz.

Es läßt ſich alſo auch aus einer Linie und den beyden anliegenden ∠ ∠ ein beſtimmtes △ zeichnen. M. G. §. 109. III.

§. 44. Tab. II. F. 34.

Wenn 3 Seiten in einem △ allen dreyen in einem andern △ einzeln genommen, gleichen, ſo ſind die

Ganze △ △ gleich. Es ſeye z. E. AB = DE, AC = DF und BC = EF, ſo iſt △ ABC = △ DEF, daher ∠ A = ∠ D, ∠ C = ∠ F und ∠ B = ∠ E.

Beweiß.

Auch hier iſt der Hauptſchluß der nämliche, wie §. 42. und 43. denn AC fällt gewiß ganz auf DF (§. 27. 1.) alſo A auf D und C auf F. Nun beſchreibe man mit EF = BC aus F den α mn und mit DE = AB aus D den α op und lege den ganzen △ ABC ſo auf den △ DEF, daß, wie bewieſen wurde, AC auf DF fällt, ſo muß AB in α op und BC in α mn und zwar beyde in E, wo ſich mn und op kreuzen, folglich auch AB ganz auf DE und BC ganz auf EF, auch B in E fallen. Denn geſchähe diß nicht, ſo müßt' entweder AB und DE, oder BC und EF, oder beyde zugleich, ungleich ſeyn, welches gegen die beſtimmte Vorausſetzung.

Zuſatz 1.

Es läßt ſich alſo aus 3 Seiten ein beſtimmtes △ zeichnen. M. G. §. 109. I.

Zuſatz 2.

Aus 3 gegebenen Seiten läßt ſich nur einerley △ zeichnen. Bloß ihre Lage kann verſchieden ausfallen.

Zuſatz 3.

In dieſen 3 Hauptfällen §. 42, 43 und 44 ſtehen immer gleiche Seiten gleichen ∠ ∠ und umgekehrt gegenüber.

§. 45.

Hieraus flieſſen folgende Aufgaben mit ihren Beweißgründen:

1) Einen ∠ zu zeichnen, der einem andern gegebenen ∠ gleich iſt. M. G. §. 64. Der Beweiß liegt §. 44.

2) Einen ∠ in 2 gleiche Theile zu theilen. M. G. §. 88. Der Beweiß gründt ſich auf §. 44.

3) Eine gerade Linie in 2 gleiche Theile zu theilen. M. G. §. 84. Der Beweiß ruhet auf §. 44 und 42.

4) Die Zeichnung einer Perpendikulare aus einem gegebenen Punkt in einer gegebenen Linie. M. G. §. 58. Wird bewieſen aus §. 44.

5) Die Zeichnung einer Perpendikulare, wenn das Punkt, aus dem ſie gezogen wird, auſſer der Linie liegt. M. G. §. 59. Wird bewieſen aus (§. 44 und 42.)

Anmerkung.

Mechaniſche praktiſche Methode für Nro. 3, 4, 5. Kenntnuß des Winkelmaſes, Winkelhakens, Winkelkreuz und ihre Prüfung.

§. 46. T. II. F. 37.

Aus einem Punkt A in einer Linie BC kann nur eine einige Perpendikulare AD in der nämlichen Ebene gezogen werden.

Beweiß.

Geſetzt man ziehe noch eine andere Linie AF, ſo müßte, wenn AF ſowohl als AD perpendikular wären, ∠ o + x = ∠ o ſeyn, welches gegen (A. §. 61.) Eine ähnliche Ungereimtheit entſtünde, wenn man AG für eine zweyte mögliche Perpendikulare halten wollte.

§. 47. Tab. I. F. 17.

In jedem gleichſchenklichten △ theilt die Linie CD, welche den ∠ ACB in 2 gleiche Theile x = y theilt 1) das ganze △ in 2 gleiche Theile. 2) Folglich auch die Grundlinie AB. 3) Steht auf der Grundlinie ſenkrecht. 4) Die ∠ o und ∠ u an der Grundlinie ſind gleich.

Beweiß.

Man theile den ∠ ACB durch CD in 2 gleiche Theile (§. 45. 2.) Nun iſt

1) x = y, AC = BC (p. hyp. und §. 22.) CD = CD (A. §. 61. 3.) Daher △ ACD = △ BCD (§. 42.)

2) Alſo auch AD = BD und

3) m = n = 90° (§. 10, 13, 40. Z. 2.) und CD ſenkrecht auf AB.

4) Aber auch ∠ o = ∠ u.

§. 48. Zuſatz. Tab. I. F. 16.

Folglich ſind im gleichſeitigen △ ABC alle ∠ o, x und y gleich. Denn da

AB = BC ſo iſt o = x aber auch weil
AB = AC - - y = x daher (A. §. 62.)

o = y

§. 49.

Die Zeichnung gleichſeitiger und gleichſchenklichter △ lehrt uns M. G. §. 107 und 108. Der Beweiß ruhet auf (§. 22. und §. 21. Nro. 3.)

§. 50. Tab. II. F. 38.

In jedem △ iſt der äuſſere ∠ u + m, welcher aus der Verlängerung irgend einer Seite AC entſteht, immer gröſſer als einer der innern ihm gegenüberſtehenden y oder n + r.

Beweiß.

Man theile BC in E in 2 gleiche Theile BE = EC, ziehe AE, verlängre ſie bis EF = AE und ziehe CF. Nun iſt BE = EC und AE = EF (p conſtr.) o = x (§. 41.) Daher △ CEF = △ ABE (§. 42.) folglich

$$\begin{array}{c} u = y \\ \wedge \\ u+m \end{array}$$ Da aber (A. §. 61.)

ſo iſt auch $u+m > y$ (A. §. 66.)

Man mache die nemliche Vorbereitung mit AC, und verlängre BC, ſo iſt $p = u+m$ (§. 41.) und man findt auf die vorige Art, daß p folglich auch $u+m > n+r$.

§. 51. Tab. II. F. 39.

Von einem Punkt D auſſer einer geraden Linie AB kann nur eine ſenkrechte Linie DC auf dieſelbe gezogen werden.

Beweiß.

Geſetzt es ſeye eine andre DE möglich, ſo iſt $x = \frac{p}{4}$ (p. hyp. & §. 34. Z. 2.) eben ſo $y = \frac{p}{4}$ folglich wär $x = y$ Da nun $x > y$ (§. 50.) ſo kann auch DE unmöglich ſenkrecht auf AB ſtehen.

§. 52. Tab. II. F. 40.

In jedem △ ſteht die gröſſere Seite dem gröſſern, die kleinere Seite dem kleinern ∠ gegenüber und umgekehrt. Z. E. Wenn $AB > AC$ ſo iſt auch $\angle C > \angle B$ und umgekehrt.

Beweiß.

1) Man mache $AD = AC$, ſo iſt $x = y$ (§. 47.) aber auch $y > B$ (§. 50.) folglich $x > B$. Da nun $x + o > x$ (A. §. 61.) ſo iſt um ſo mehr $x+o = \angle C > \angle B$.

2) Es ſey $C > B$ wär nun AB nicht $> AC$ ſo iſt entweder $AB = AC$ oder $AB < AC$. Es iſt aber das Erſtere unmöglich. ſonſt wär $C = B$ (§. 47.) und eben ſo das andere, weil $C < B$ wäre (N. 1.) und beydes gegen die Vorausſetzung. Folglich iſt auch, wenn $C > B$, $AB > AC$.

§. 53. Tab. II. F. 40.

In jedem △ ADC iſt die Summe zwoer Seiten > die dritte Seite. Z. E. $AD + DC > AC$.

Beweiß.

Man verlängre AD ſo daß $BD = DC$ und ziehe BC. Nun iſt $AB = AD + DC$ und im gleichſchenklichten △ BDC wird $o = B$. Es iſt aber B $< y$ (§. 50.) alſo gewiß noch viel mehr $B < o + x$ Daher $AC < AD + BD = AB$ (§. 52.) folglich auch $AD + DC > AC$.

Zuſatz.

Folglich müſſen in der Aufgabe §. 44. Z. 1. zwo Seiten zuſammen immer > ſeyn als die dritte, wenn ein △ möglich ſeyn ſoll.

§. 54. Tab. II. F. 39.

In jedem ◺ iſt nur ein ∟ möglich, die beyden übrigen ſind ſpitzig.

Beweiß.

Im ◺ CDE iſt $y = 90°$ folglich auch o (§. 40. Zuſ. 2.) Nun iſt aber $o > n$ und gleichfalls $o > m$

(§. 50.) folglich iſt ſowohl m als n $<$ 90° d. i. ſie ſind ſpitzige ∠.

Zuſatz.

1) Der ∟ iſt daher im ◺ der grôßte.

2) Und die Hypotenuſe (§. 22.) die grôßte Seite (§. 52.)

§. 55. Tab. I. F. 20.

In jedem ſtumpfwinklichten △ iſt nur ein ſtumpfer ∠ môglich, die beyden ůbrigen ſind gewiß ſpitzig.

Beweiß.

Man verlångre den einen Schenkel des ſtumpfen ∠ y z. E. CD ſo iſt $m+y=\frac{p}{2}$ und $y>\frac{p}{4}$ (§. 13.) folglich $m<\frac{p}{4}$. Da aber $m>n$ und $m>o$ (§. 50.) ſo iſt um ſo mehr $n<\frac{p}{4}$ und $o<\frac{p}{4}$ folglich ſpitzig.

Zuſatz.

1) Der ſtumpfe Winkel iſt daher in dergleichen △ △ nothwendig der grôßte, und

2) Die ihm gegenůberſtehende Seite AD die grôßte unter allen ůbrigen Seiten des ſtumpfwinklichten △ (§. 52.)

§. 56. Tab. II. F. 38.

In jedem △ iſt die Summe zweyer beliebiger ∠ ∠ gewiß kleiner als $\frac{p}{2}$. Oder $y+s<\frac{p}{2}$.

Beweiß.

Man mache die nemliche Vorbereitung wie §. 50. ſo iſt, wie dorten gezeigt wurde

$\triangle ABE = \triangle CEF$ Da nun

$u < u + m$ (A. §. 61.) und
$\parallel$
y

ſo iſt $y < u + m$ folglich da
$s = s$

ſo iſt $y + s < \underline{s + u + m}$ (A. §. 64.) allein
$\parallel$
$\frac{p}{2}$ (§. 40. Z. 3.)

$y + s < \frac{p}{2}$

Zuſatz 1. Tab. I. F. 5.

Folglich werden zwo Linien EF und GH, welche auf einer dritten AB 2 ∠∠ x und y machen, deren Summe $>$ oder wenigſtens $=$ 180° niemals convergiren, denn ſonſt würde ein △ entſtehen, in welchem die Summe zweyer ∠∠ entweder $>$ oder $=$ 180°. Welches gerade gegen das eben bewieſene.

Zuſatz 2.

Daher muß (§. 43. Z. 1.) in der Aufgabe, die Summe der gegebenen ∠ immer $<$ 180° ſeyn, wenn ein △ möglich ſeyn ſoll.

Zuſatz 3. Tab. I. F. 5.

Wenn aber 2 Linien JE und JH ſo auf einer dritten AB ſtehen, daß die Summe der von ihnen gemachten ∠∠ $o + u < 180°$ iſt, ſo müſſen ſie in J convergiren.

§. 57. Tab. I. F. 4.

Wenn 2 gerade Parallelen von einer dritten geraden Linie durchſchnitten werden, ſo ſind

1) Die beyden innren ∠∠ im ſtrengſten Verſtand $n + y = 180°$.
2) Die Wechſels ∠∠ u und n gleich,
3) Der äuſſere ∠ $x =$ dem innren entgegengeſetzten n.

Beweiß.

1) $n + y$ iſt entweder kleiner, oder gröſſer oder $=$ 180°. Nicht kleiner, ſonſt würden AB und CD gegen B und D convergiren (§. 56. Z. 3.) und diß iſt p. hyp. unmöglich. Nicht gröſſer, ſonſt müßten AB und CD gegen B und D divergiren (§. cit.) gegen A und C aber convergiren, indem alsdann $u + m < 180°$ würde, weil $y + u = 180°$ und $n + m = 180°$ folglich

$$\begin{array}{l} y + n + m + u = 360° \text{ und wenn} \\ y + n \qquad\qquad > 180° \\ \hline m + u < 180°. \end{array}$$

aber auch diß iſt p. hyp. unmöglich, folglich muß $n + y = 180°$ ſeyn.

2) $n + y = 180^\circ$. (1)
$u + y = \|$ §. 40.

$n + y = u + y$ (A. §. 62.) Nun iſt
$y = y$

$n = u$ (A. §. 63.)

3) Da $n = u$ (2)
$x = \|$ §. 41. ſo iſt (A. §. 62)

$n = x$

§. 58. Tab. I. F. 4.

Wenn 2 gerade Linien AB und CD von einer 3ten KJ durchſchnitten werden, und

1) Die Summe der innren ∠∠ im ſtrengſten Verſtand $= 180^\circ$.

2) Oder die Wechſels ∠∠ gleich ſind,

3) Oder der äuſſere ∠ dem innren entgegen geſetzten gleich iſt,

ſo ſind die Linien AB und CD $\#$

Beweiß.

1) Wenn $n + y = 180^\circ$ ſo kann AB und CD weder con- noch divergiren (§. 57. 1.) folglich iſt AB $\#$ CD.

2) Wenn $n = u$ ſo iſt, da
$u + y = 180^\circ$ (§. 40.)
$\|$
n (p. hyp.) auch

$n + y = 180^\circ$ folglich nach N. 1. AB $\#$ CD.

$$\begin{array}{l} 3)\ x + y = 180^\circ\ (\S.\ 41.) \\ \quad \| \\ \quad n\ \ (p.\ hyp.) \\ \hline n + y = 180^\circ \end{array}$$ folglich nach N. 1. AB $\#$ C. D.

Zuſatz 1. Tab. II. F. 41.

Folglich ſind auch 2 Linien AD und CF, welche beyde mit einer 3ten BE $\#$ laufen unter ſich ſelbſt $\#$. Denn man ziehe die gerade Linie GH, ſo iſt

$$\begin{array}{l} x = y\ \ (\S.\ 57.) \\ u = \|\ \ \text{Daher}\ (\text{A.}\ \S.\ 62.) \\ \hline x = u \end{array}$$

folglich (§. 58. Nro. 3.) AD $\#$ CF.

Zuſatz 2. Tab. II. F. 42.

Leicht läßt ſich daher, mit gröſſerer Genauigkeit als die gewöhnliche Methoden verſtatten, mit einer gegebenen Linie AB durch ein gegebenes Punkt C eine Parallele EF ziehen. Man ziebt aus C auf AB unter einem beliebigen $\angle$ eine gerade Linie CD, zeichnet in C den $\angle x = \angle o$ (§. 45. 1.) und verlängert (wenns nöthig iſt) CF ſo iſt FE $\#$ AB (§. 58. Nro. 2.)

Anmerkung.

Mechaniſche Zeichnung der Parallelen M. G. §. 61. gründet ſich auf (§. 58. 3.) Von der praktiſchen Verbeſſerung dieſer Methode mündlich, ingleichem wie Parallelen in einer beſtimmten Entfernung zu ziehen, wie auch von den verwerflichen Arten der Parallel-Liniale.

§. 59. Tab. II. F. 43.

Wenn in einem $\triangle$ ABC eine Seite AC verlängert wird, ſo iſt der äuſſere $\angle$ o = den beyden innren entgegen geſetzten x + u.

Beweiß.

Man ziehe mit EF ‡‡ AC ſo iſt (§. 57. 2.)

$$\begin{array}{l} o = x + \underset{\substack{\Vert \\ u}}{y} \text{ und (§. cit.)} \\ \hline o = x + u. \end{array}$$

Zuſatz. Tab. II. F. 44.

Wenn ein $\angle$ x mit ſeiner Spitze B zwiſchen 2 Parallelen liegt, ſo iſt er den $\angle\angle$ u + y gleich, welche ſeine Schenkel AB und BC mit den Parallelen mamachen. Denn man verlängre AB bis in D, ſo iſt

$$\begin{array}{l} x = \underset{\substack{\Vert \\ y\ (\text{§. 57. 2.})}}{o} + u \\ \hline x = y + u \end{array}$$

Ein Satz, den man in der Aſtronomie nöthig haben wird.

§. 60. Tab. II. F. 43.

In jedem $\triangle$ iſt die Summe aller $\angle\angle$ = 180° oder $\frac{p}{2}$.

Beweiß.

Man ziehe EF $\ddagger\ddagger$ AC ſo iſt

$$\begin{array}{l} o + m = 180° \text{ (§. 40.)} \\ \| \\ u+x \text{ (§. 59.)} \\ \hline u+x+m = 180° = \frac{p}{2} \text{ oder } 2 \llcorner\llcorner \end{array}$$

Zuſatz. Tab. II. F. 39.

1) In jedem ⊿ CDE iſt die Summe der beyden ſpitzigen ∠ = 90°; wenn die Catheti EC und DC = wären, wär jeder = 45° folglich n = m, und wenn einer von den ſpitzigen n gegeben iſt, ſo iſt auch der andre m bekannt, er iſt immer = 90° — dem gegebenen ſpitzigen ∠.

2) Wenn in einem ſchiefwinklichten △ (Tab. II. F. 43) ein ∠ x > 90° ſo iſt die Summe der beyden übrigen u + m < 90° folglich jeglicher für ſich < 90°. Wär aber einer < 90°, ſo iſt die Summe der übrigen > 90°, folglich entweder einer oder beyde > 90°.

3) Die Summe zweener ∠∠ u+m (Tab. II. F. 43) iſt immer = 180° — x oder dem 3ten ∠, und ein ∠ x iſt allezeit = 180° — (u+m) oder der Summe der beyden übrigen ∠∠.

4) Wenn 2 ∠∠ einzeln oder zuſammen genommen in einem △, 2 ∠∠ einzeln oder zuſammen genommen in einem andern △ gleichen, ſo iſt auch der 3te dem 3ten gleich.

5) Wenn der △ ABC (Tab. I. F. 16.) gleichſchenklicht iſt, ſo iſt o = x (§. 47.) Folglich

$o = x = \frac{180^\circ - y}{2}$ und $y = 180^\circ - 2x$ oder $180^\circ - 2 \angle o$.

6) Im gleichſeitigen △ iſt jeder ∠ = 60° (§. 48. und hierauf beruht die Zeichnung einer Perpendikulare am Ende einer Linie M. G. §. 60. Der Beweiß und die Mechaniſche Methode mit dem Winkelmaas, mündlich.

§. 60.[a] Tab. I. F. 17.

Wenn in einem △ die ∠ o und u an der Grundlinie gleich ſind, ſo iſts ein gleichſchenklicht △, d. i. AC = BC.

Beweiß.

Man theile, wie §. 47. den ∠ ACB in zween gleiche Theile durch CD, ſo iſt o = u (p. hyp.) x = y (p. conſtr.) und m = n (§. 60. Z. 4.) CD = CD folglich △ ACD = △ BCD (§. 43.) und AC = BC.

Zuſatz.

Sind in einem △ alle 3 ∠∠ gleich, ſo iſts ein gleichſeitig △ (Tab. I. F. 16.) ingleichem, wenn zween ∠∠ jeder = 60°. (§. 60. Zuſ. 3.)

§. 61. Tab. II. F. 45.

Zwo gerade Parallelen AB und CD zwiſchen zwo andern geraden Parallelen BC und AD ſind einander gleich und wenn AB ╪ CD ſo iſt auch BC ╪ AD.

Beweiß.

1) Man ziehe die gerade Linie AC ſo iſt

x = y (§. 57. 2.)
m = o
AC = AC folglich (§. 43.)

△ABC = △ACD Daher

AB = CD

2) Da p. hyp. m = o (§. 57. 2.)
x = y
AC = AC ſo iſt (§. 43.)

△ABC = △ACD Daher

BC $\#$ AD

§. 62. Tab. II. F. 46.

Wenn zwo gerade Linien AD und BC auf einer 3ten geraden Linie EF beyde ſenkrecht ſtehen, ſo iſt AD $\#$ BC.

Beweiß.

Denn o + x = 180° (§. 58. Nro. 1.)

§. 63.

Auf dieſen beyden §. 61 und 62 beruhet der Beweiß, von der Aufgabe: Eine gerade Linie durch einen dichten Körper fortzuziehen, welches der gewöhnliche Feldmeſſer, durch Abſtände meſſen, nennet. M. G. §. 62. Ingleichem das Horizontal- und Bergmeſſen (ib. §. 70.) Von beyden im Vortrag.

§. 64.

Wenn in zwo Figuren die gleichnamigten Winkel gleich ſind und die gleichnamigten Seiten einerley Verhältnuß haben, ſo ſind ſie einander ähnlich, und umgekehrt.

Beweiß.

1) Denn im erſten Fall werden ſie aus ähnlichem auf ähnliche Art erzeugt, und müſſen folglich ähnlich ausfallen. (§. 21. Nro. 7. u. §. 25.) Und

2) Im 2ten Fall muß ja alles das übereinſtimmen, wodurch ſie, mit Ausſchluß der Gröſſe, unterſchieden werden könnten, welches nur durch die gleichnamigte Winkel und Seiten möglich wäre, wenn erſtere ungleich wären und letztere nicht einerley Verhältnuß hätten. Daher müſſen in ähnlichen Figuren die gleiche ∠ ∠ gleich ſeyn und die gleichnamigte Seiten einerley Verhältnuß haben.

Zuſatz.

Folglich ſind alle regulare Vielecke, welche gleichviel Seiten haben, einander ähnlich.

§. 65. Tab. II. F. 34.

Wenn in zween △ △, 2 ∠ ∠ einzeln genommen in einem, zween ∠ ∠, einzeln genommen, im andern gleichen, ſo ſind die beyden △ △ ähnlich und je zwo und zwo Seiten in einem, verhalten ſich auf die nemliche Art, wie die zwo gleichnamigte Seiten im an=

dern. Wenn z. E. ∠ A = ∠ D und ∠ C = ∠ F ſo iſt

I. AB : AC = DE : DF II. AB : BC = DE : EF
III. BC : AC = EF : DF.

Beweiß.

Denn da ſich aus einer Seite und den beyden anliegenden Winkeln ein △ beſchreiben läßt (§. 43. Z. 1.) und in beyden △ △ dieſe Stücke ähnlich ſind (p. hyp. und §. 6. Nro. 5.) ſo würden dieſe beyde △ △ aus ähnlichen Stücken, auf eine ähnliche Art beſchrieben, ſind demnach ähnlich und ihre gleichnamigte Seiten müſſen einerley Verhältnuß haben (§. 64.)

§. 66. Tab. II. F. 34.

Wenn in zween △ △ je zwo und zwo Seiten in einem das nemliche Verhältnuß wie im andren haben, ſo ſind die △ △ ähnlich, folglich auch die gleichnamigten ∠ ∠ gleich. Z. E. Wenn AB : AC = DE : DF, AB : BC = DE : EF und BC : AC = EF : DF ſo iſt △ ABC ∽ △ DEF folglich ∠ A = ∠ D, ∠ B = ∠ E und ∠ C = ∠ F.

Beweiß.

Alle 3 Seiten ſind vollbeſtimmende Data eines △ (§. 44. Zuſ. 1.) Dieſe ſind hier in beyden △ △ ähnlich (p. hyp.) daher wurden beyde △ △ auf eine ähnliche Art aus ähnlichen Datis beſchrieben, ſie müſſen folglich ∽ ſeyn und ihre gleichnamigte ∠ ∠ einander gleichen. (§. 64.)

§. 67. Tab. II. F. 34.

Wenn in 2 △ △ ein ∠ in einem dem andern ∠ im andern gleichet, und die einſchlieſende Seiten in beyden einerley Verhältnuß haben, ſo ſind die △ △ ähnlich, alſo die übrige gleichnamigte ∠ ∠ gleich und die übrige gleichnamigte Seiten haben einerley Verhältnuß. Wenn z. E. ∠B = ∠E und AB : BC = DE : EF ſo iſt △ ABC ∽ △ DEF und ∠A = ∠D, ∠C = ∠F auch AB : AC = DE : DF desgleichen BC : AC = EF : DF.

Beweiß.

Aus zwo Seiten und dem eingeſchloſſenen ∠ läßt ſich ein △ beſchreiben (42. Z. 1.) Dieſe ſind hier in beyden △ △ (p. hyp.) ähnlich, ſie wurden alſo auf eine ähnliche Art, aus ähnlichen Stücken erzeugt, müſſen ſich ähnlich ſeyn, folglich die gleichnamigte ∠ ∠ gleich ſeyn, und ihre gleichnamigte Seiten einerley Verhältnuß haben. (§. 64.)

§. 68. Tab. II. F. 47.

Wenn in einem △ mit einer Seite eine Parallele gezogen wird, ſo iſt der abgeſchnittene △ dem ganzen ähnlich. Z. E. Wenn BD ‡‡ AE ſo iſt △ BCD ∽ △ ACE folglich I. BC : BD = AC : AE

II. BC : CD = AC : CE

III. BC : CD = AB : DE

Beweiß.

Dann wenn $BD \# AE$, ſo iſt $\angle o = \angle x$ u. $\angle y = \angle u$ (§. 57. Nro. 3.) Daher $\triangle BCD \backsim \triangle ACE$ (§. 65.) folglich

$$\text{I.}\quad BC : BD = AC : AE$$

$$\text{II.}\quad BC : CD = AC : CE \text{ und da}$$

$$AC : CE = BC : CD \text{ ſo iſt (A. § 217. N.6)}$$

$$BC : CD = \underbrace{AC - BC}_{= AB} : \underbrace{CE - CD}_{= DE} \text{ allein ... folglich}$$

$$\text{III.}\quad BC : CD = AB : DE.$$

Anmerkung.

1) Durch Anwendung des (§. 217. Ar.) können dieſe Proportionen noch häufig verändert, noch viele neue Sätze daraus hergeleitet werden.

2) Mit Vorbedacht iſt hier die Aehnlichkeit der △△, nach Wolfens Idee, blos aus dem Grundſatz der Aehnlichkeit erwieſen. Sie enthält die Gründe der ſchönſten Theorien und Ausübungen in der ganzen Mathematik. Auf ihr beruht unter andern die Verfertigung und Gebrauch des ſo bequemen Storchſchnabels, wovon mündlich. Zum Nachleſen: Beſchreibung und Gebrauch des Storchſchnabels von M. C. F. Hellwag 1776. in 4to. 14. S. nebſt einer K. T. Anwendung dieſer Lehre auf beſondre Storchſchnäbel vorzüglich zum Verjüngen ſiehe: Beſchreibung eines ſehr einfachen Storchſchnabels ꝛc. ꝛc. Münſter und Hamm 1780.

§. 69. Tab. II. F. 48.

Zu 3 gegebenen Linien die 4te geometriſche Proportionallinie zu finden. Man ſoll z. E. zu den drey bekannten Linien AB, CD, EF, eine 4te GH finden, wo alsdann AB : CD = EF : GH wäre.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man zeichne einen beliebigen ∠ x.

2) Trage in deſſen obern Schenkel die Linie AB aus A in B.

3) In den untern CD, aus A in D.

4) Wieder in den obern EF, aus B in E.

5) Ziehe aus B in D eine gerade Linie BD und mit ihr durch E die Parallele EF (§. 58. Z. 2 u. 3.)

6) So iſt DF die verlangte 4te geometriſche Proportionale. Weil der △ ABD ∽ △ AEF (§. 68.)

Zuſatz. Tab. II. F. 48.

Eben ſo kann man zu zwo Linien AB und CD die dritte geometriſche Proportionale EF finden, wenn man nach der vierten Regel CD aus B nach E trägt und übrigens wie vorhin verfährt. Alsdann iſt nach den vorigen Gründen:

AB : AD = BE : DF Da aber p. conſtr.
‖ ‖ ‖ ‖
AB CD CD EF ſo iſt

AB : CD = CD : EF

Anmerkung.

Man drücke 3 Zahlen durch die 3 erſte Linien aus, ſo läßt ſich auf dieſe Art die Regel de tri in Linien verrichten. Auf dieſer Aufgabe beruht vieles vom Proportionalcirkel und ſeinem Gebrauch, den unter andern Michael Scheffelt in ſeinem Unterricht vom Proportionalcirkel, Ulm 1755. ſehr vollſtändig beſchreibt und anwenden lehret.

§. 70.

Eine gerade Linie in beliebige gleiche Theile zu theilen. Z. E. AB in 5 gleiche Theile. T. II. F. 49.

Aufloſung.

1) Man ziehe aus A oder B unter einem ſelbſt beliebigen ∠ die unbeſtimmte Linie AC.

2) Auf dieſe trägt man mit dem Zirkel ſo viel gleiche Theile als AB bekommen ſoll, hier demnach 5 ꝛc. AG, GF . . DC.

3) Verbindet den letzten Punkt C mit B durch BC und

4) Ziehet mit BC Parallelen durch D, E, F, G, ſo

5) Erhält man die Theilungspunkte L, K, J, H.

Beweiß.

Man ſoll zeigen: daß AH : AB = 1 : 5, AJ : AB = 2 : 5 ꝛc. Nun iſt

$\triangle$ AGH ∽ $\triangle$ ABC (§. 68.) Daher

AG : AH = AC : AB und (A. §. 217.)

AG : AC = AH : AB weil aber p. conſtr.

$$\begin{array}{ccc} AG & : & AC \\ \| & & \| \\ 1 & & 5 \end{array}$$

1 : 5 = AH : AB

Eben ſo zeigt man, daß AJ : AB = 2 : 5 ꝛc. ꝛc.

Zuſatz. F. 50.

Sollte AB nach der nemlichen Proportion getheilt werden, nach welcher CF getheilt iſt, ſo beobachtet man mit CF die erſte Regel, trägt AB aus C nach G, verbindet G und F und wendet die 4te und 5te Regel an, ſo iſt CG = AB nach eben der Proportion getheilt, wie AB. Denn aus dem obigen Beweiß fließt: daß z. E. CD : CF = CJ : CG ꝛc.

Anmerkung.

Dieſe Aufgabe iſt ſehr bequem, wenn ganze Zeichnungen, nach einem beſtimmten Verhältnuß, vergröſſert oder verkleinert werden ſollen.

Gegenwärtige Methode rückt ich mit Fleiß ein, weil ſie die leichteſt und richtigſte iſt. Andre mit dem gleichſeitigen $\triangle$ ſind weitläuftiger und M. G. §. 86. wozu der Grund §. 65. liegt, iſt ungleich beſchwerlicher. Von der praktiſchen Vorſicht beym Linientheilen, wo viele Theile ſind, nebſt der Behandlung des Zirkels, womit man die Theile aufträgt, im Vortrag.

§. 71. Tab. I. F. 18.

Wenn in einem ◺ ABC aus dem ∟ D eine ſenkrechte Linie auf die Hypotenuſe AB gefällt wird, ſo entſtehen 2 ◺ welche unter ſich und jeder dem ganzen ◺ ABD ähnlich ſind.

Beweiß.

u = x + y (p. conſtr. & hyp.)
o = o (Ar. §. 61. Z.)

I. ◺ ADE ∽ ◺ ABD (§. 65.)
m = x + y (p. conſtr. & hyp.)
n = n (Ar. §. 61. Z.)

II. ◺ BDE ∽ ◺ ABD (§. 65.) Aber auch
◺ ADE ∽ ◺ ABD (I.) folglich (Ar. §. 67.

III. ◺ ADE ∽ ◺ BDE.

§. 72.

Wenn in einem jeden △ ABC ein ∠ ABC in 2 gleiche Theile y und u getheilt wird (§. 45. 2.) ſo verhalten ſich die Seiten deſſelben, wie die Abſchnitte der Grundlinie: d. i. Es iſt

AB : BC = AE : EC. (§. 65. T. III.)

Beweiß.

Man verlängere AB in D bis BD = BC und ziehe DC, ſo iſt ∠ o = x (§. 47. 4.) und y + u = o + x (§. 59.) folglich y + u = 2 x, auch, weil

$y = u$ (p. conſtr.) $y = x$. Daher BE ∦ CD.
(§. 58. 3.) und folglich

△ ABE ∽ △ ADC (§. 68.) alſo

AB : AE = BD : EC (und A. §. 217.)

AB : BD = AE : EC allein
‖
BC (p. conſtr.)

AB : BC = AE : EC.

§. 73. T. II. F. 51.

Einen vollkommnen verjüngten Maasſtab (§. 36.) zu zeichnen.

Aufloͤſung.

1) Die Methode hat uns ſchon M. G. §. 33. deutlich gelehrt. Wer ihr folgt, bekommt einen verjüngten Maasſtab nach Decimalmaas.

2) Würden aber gleich anfangs auf AB 12, 16 oder 6 gleiche Theile getragen, und auf AL 12, ſo bekäm man einen Maasſtab für 12 ſchuiges, 16 ſchuiges, 6 ſchuiges Maas.

3) Würde eine Linie AE in 10 gleiche Theile getheilt, einer von dieſen Zehntel als Ruthe angenommen und nach Nro. 1. behandelt, ſo wär die Linie AE in 1000 gleiche Theile getheilt worden.

Beweiß.

I. BQ : AB = 1 : 10 (p. conſtr.) aber auch 1′ : 1° = 1 : 10 (§. 28.) folglich iſt, wenn AB

für 1° angenommen wird, BQ = 1′ ꝛc. ꝛc. Nun iſt KJ = BQ (p. conſtr.) folglich muß noch gezeigt werden, daß MN : KJ = 1 : 10 oder daß MN = 1″. Es iſt aber

△BKJ ∽ △BMN (§. 68. p. conſtr.)

MN : BM = KJ : BJ und (A. §. 217.)

MN : KJ = BM : BJ da aber p. conſtr.
1 : 10 = ‖ ſo iſt auch (A. §. 203.)

MN : KJ = 1 : 10

folglich OP = 4″, RS = 9″ ꝛc. ꝛc.

2) Iſt AB z. E. in 12 Theile getheilt, ſo iſt BQ : AB = 1 : 12 folglich BQ = 1′ vom 12 ſchuigen Maas ꝛc. ꝛc. und wenn AL = BJ in 12 Theile getheilt würde, ſo wär

MN : KJ = 1 : 12

folglich MN = 1″ vom gemeinen Schu der in 12 Zolle getheilt wird.

3) Wär endlich AE in 10 Theile getheilt, ſo iſt BQ ein 10tel vom 10tel AB, das iſt: BQ iſt von AE ein 100tel und da MN = $\frac{1}{10}$ von BQ ſo iſts von der ganzen Linie AE ein 1000tel.

Anmerkung.

Der gemeine Handwerksmann macht ſich noch andre vollkommene verjüngte Maasſtäbe, welche nur einen Schu enthalten. Von dieſen als einer minder beträchtlichen Sache mündlich.

Die älteſte Nachrichten von dieſem Inſtrument, finden ſich in Tychos von Brahe Epiſtolis Aſtronom. L. I. p. 60. wo er geſtehet: Daß er dieſe Art, gerade Linien zu theilen, zu Leipzig, wo er ohngefehr 1553 ſtudirte, von dem dortigen geſchickten Profeſſor der Mathematik Johann Hommel gelernt habe. Von ſehr artig übereinſtimmenden Maasſtäben ſiehe: Kurze Beſchreibung eines Syſtems von Maasſtäben, von G. F. Brander. Augsburg 1772.

§. 74.

Wie gerade Linien, wo keine Hindernuſſe im Weg ſtehen, im Kleinen und Groſſen zu meſſen, zeigt (§. 37.) Hier iſt der Ort, vom Meſſen ſolcher Weiten zu ſprechen, wo ſich wegen mancherley Hindernüſſe die dort gelehrte Methode nicht anbringen läßt.

a) Der erſte und leichteſte Fall, wenn man nicht gerade von einem Endpunkt der Linie zum andern, wohl aber aus einem angenommenen dritten Punkt zu beyden kommen kann, läßt ſich

1) Blos mit Stäben und der Ruthe, 2) aber auch mit dem Meßtiſchgen, 3) und dem Aſtrolab auflöſen. M. G. §. 77 und 78. Die Beweiſſe gründen ſich auf (§. 42 und §. 67.) Läßt ſich aber auch nach (§. 63.) durch Abſtände meſſen.

b) Im 2ten Fall, kann man, auch aus dem 3ten angenommenen Punkt, nur zu einem Endpunkt der zu meſſenden Weite kommen. Hier finden wie im erſten, auch dreyerley Auflöſungen ſtatt, nur

erleichtert der Gebrauch des beweglichen Winkelkreutzes das Meſſen mit bloſſen Stäben gewaltig. M. G. §. 79. Die Beweiſſe liegen im §. 43. und §. 65. und §. 68.

c) Im 3ten Fall kann man aus dem angenommenen dritten Punkt, gar nicht zu der zu meſſenden Weite kommen. Es giebt eben ſo viele Auflöſungen, in Rückſicht auf die Werkzeuge, wie im 2ten Fall, und hier wird das bewegliche Winkelkreutz bey den Stäben allein, faſt unentbehrlich. M. G. §. 80. Wird aus §. 43, 65, 68 und 67 erwieſen.

Anmerkung.

Da das Winkelmeſſen die äuſſerſte Schärfe erfodert, der kleinſte Fehler die wichtigſteu Folgen nach ſich ziehet, bey mittelmäſſigen, noch mehr bey ſchlechten Inſtrumenten faſt unvermeidlich iſt, ſo ſind, der Genauigkeit wegen, alle Auflöſungen mit bloſſen Stäben immer vorzuziehen, wenn nicht die Vermeidung der Weitläuftigkeit die andern Arten nothwendig macht. Da ferner ſehr ſpitzige oder ſehr ſtumpfe Winkel nicht nur ſchwierig zu meſſen ſind, ſondern auch, wenn gefehlt wird, weit gröſſere Fehler in der Gröſſe der Weiten veranlaſſen, als Winkel von mittlerer Gröſſe, ſo vermeide man die allzuſpitze und allzuſtumpfe durch eine geſchickte Wahl der Standpunkte, wovon vorläufig mündlich, beſtimmt und bewieſen in der Trigonametrie geſprochen wird.

§. 75.

Höhen und Weiten ſind nur durch ihre Lage gegen die Horizontale verſchieden (§. 16.) Nur iſt die Höhe

immer eine Weite zu deren obern Ende man gar nicht, wenigſtens nicht bequem kommen kann. Folglich giebts hier nur 2 Fälle.

a) Eine Höhe zu meſſen, zu deren unterm Ende man aus einem angenommenen Standpunkt kommen kann. Diß läßt ſich 1) durch Hülfe der Stäbe und Ruthen allein, 2) mit dem Meßtiſchgen und 3) dem Aſtrolab bewerkſtelligen. M. G. §. 81. und der Beweiß gründet ſich auf §. 68.

b) Eine Höhe zu meſſen, wo die bey (a) gegebene Bedingung nicht ſtatt findet. Hier liegt die Höhe

1) Entweder mit dem Standpunkt in einer Horizontal-Ebene, 2) oder nicht, z. E. auf einem Berge.

Und beyde Fälle laſſen ſich, wie bey a) ohne und mit Inſtrumenten, ſowohl dem Meßtiſchgen als dem Aſtrolab auflöſen. M. G. §. 82. und 83. Ihre Beweiſſe werden aus §. 65, 67, 68 und 63 genommen.

Anmerkung.

Was bey nicht horizontalen Standlinien zu thun, wird deutlicher und beſtimmter in der Trigonometrie, als hier gelehret. Uebrigens paßt die Anmerkung §. 74. voll hieher. Mündlich vom Meſſen ſchief auf ebenen Horizontalen ſtehender Höhen.

Vierter Abſchnitt.

Von den Cirkeln als Linien betrachtet und denen bey ihnen vorkommenden Linien und Winkeln.

§. 76.

In einem oder gleichen Cirkeln ſchneiden gleiche Sehnen gleiche Bögen ab, und umgekehrt.

Beweiß. T. II. F. 52.

Man ziehe die Radios, AC, BC, CE und DC ſo iſt

AC = CD
BC = CE (§. 21. 3.)
AB = DE p. hyp.

△ ABC = △ CDE (§ 44.) Daher

∠ y = ∠ x
‖ ‖
α AB α DE §. 34. folglich

α AB = α DE W. d. E. W.

Wenn α AB = α DE und wie im erſten Fall die Radii ausgezogen worden, ſo iſt

AC = CD
BC = CE (§. 21. 3.)
y = x (p. hyp. und §. 34.) folglich

△ ABC = △ CDE (§. 42.) Daher
AB = DE.

Zuſatz 1.

Wenn alſo eine Cirkelperipherie in lauter gleiche Bögen getheilt und die Sehnen ausgezogen würden, ſo entſtünde eine gleichſeitige Figur.

Zuſatz 2.

Gröſſere Sehnen ſchneiden gröſſere Bögen ab.

§. 77. Tab. II. F. 52 und 53.

In ungleichen Cirkeln, haben die Sehnen ähnlicher Bogen zu ihren Radiis einerley Verhältnuß.

Beweiß.

Da $\alpha DE \backsim \alpha HF$ ſo iſt $\angle x = \angle u$ nun iſt auch

$DC : CE = HG : GF$ (§. 21. 3.)

$\triangle DCE \backsim \triangle GFH$ (§.67.) folglich

$DE : DC = HF : HG.$

§. 78. Tab. II. F. 54.

Der Radius, welcher eine Sehne halbirt, halbirt auch wenn er durchs Centrum verlängert wird, die über und unter der Sehne liegende Bögen und ſteht auf der Sehne ſenkrecht; und umgekehrt.

Beweiß.

Man ziehe die Sehne AB, halbire ſie in C (§. 45. 3.) ziehe den Radius DF durch C und verlängre

ihn durchs Centrum in E, ferner die Hülfslinien AD, BD, AF, BF, AE und BE. Nun iſt

I. $AC = BC$ (p. hyp.)
$AD = BD$ (§. 21. 3.)
$DC = DC$ (Ar. §. 61. Z.)

---

1) $\triangle ADC = \triangle BDC$ (§. 44.)

$\angle x = \angle y$
$\parallel \qquad \parallel$
$\alpha AF \quad \alpha BF$ (§. 34.)

---

2) $\alpha AF = \alpha BF$.
$o = u$ (Nro. 1.)

---

3) DC ſenkrecht auf AB (§. 40. Z. 2. § 34. Z. 2. §. 13.)

$AC = BC$ (p. hyp.)
$EC = EC$ (A. §. 61. Z.)
$\angle o = \angle u$ (Nro. 3.)

$\triangle AEC = \triangle BEC$ (§. 42.) Daher

$AE = BE$ folglich auch

---

4) $\alpha AE = \alpha BE$ (§. 76.) W. D. E. W.

II. Nun ſeye durch DF der Bogen AB halbirt, ſo iſt auch $AC = BC$ und DC ſenkrecht auf AB, auch $\alpha AE = \alpha BE$.

$x = y$ (p. hyp. weil $\alpha AF = \alpha BF$)
$AD = BD$ (§. 21. 3.)
$DC = DC$ (A. §. 61. Z.)

$\triangle ADC = \triangle BDC$ (§. 42.) folglich

---

1) AC = BC
und ∠o = ∠u
2) Daher DC ſenkrecht auf AB (I. 3.)
3) und αAE = αBE (I. 4.) W. Z. E. W.

III. Nun ſtehe endlich DF ſenkrecht auf AB, ſo wird dadurch AB ſowohl als der α AB, und der α AEB halbirt. Denn

DC = DC (A. §. 61. Z.)
∠o = ∠u (p. hyp.)
∠m = ∠n (weil AD=BD §. 21. 3. u. §. 47)
Daher ∠x = ∠y (§. 60. Z. 4.)

△ADC = △BDC (§. 43.)

1. AC = BC
2. αAF = αBF (I. 2.)
3. αAE = αBE (I. 4.) W. Z. E. W.

§. 79. Tab. II. F. 54.

Jede gerade Linie EF welche die Sehne AB halbirt und perpendikular auf ihr ſteht, geht durchs Centrum.

Beweiß.

Man mache die nemliche Vorbereitung wie §. 78. und nun kann man zeigen, daß EF den ganzen Cirkel in 2 gleiche Theile FAE und FBE theile, folglich gewiß Diameter ſeye und durchs Centrum gehe. Denn

$$DC = DC \quad (\text{A. §. 61. Z.})$$
$$AC = BC$$
$$\angle o = \angle u \quad (\text{p. hyp.})$$

$$\triangle ADC = \triangle BDC \quad (\text{§. 42.}) \text{ Daher}$$

$$\angle x = \angle y \text{ folglich}$$

$$\text{I.} \quad \alpha AF = \alpha BF$$

$$\triangle AEC = \triangle BEC \quad (\text{§. 78. I 4.}) \text{ Daher}$$

$$\text{II.} \quad \alpha AE = \alpha BE \text{ nun war}$$
$$\text{I.} \quad \alpha AF = \alpha BF \text{ folglich } (\text{A. §. 63.})$$

$$\underbrace{\alpha AE + \alpha AF}_{\alpha FAE} = \underbrace{\alpha BE + \alpha BF}_{\alpha FBE}$$

$$\alpha FAE = \alpha FBE.$$

und EF geht gewiß durchs Centrum D.

§. 80.

Hieraus flieſſen folgende Aufgaben und Sätze:

1) Einen jeden gegebenen Cirkelbogen zu halbiren, das Centrum mag bekannt oder unbekannt ſeyn, M. G. §. 89. Der Beweiß liegt (§. 78. 79. §. 45. 3.)

2) Durch 3 gegebene Punkte welche nicht einer geraden Linie liegen, einen Cirkel zu beſchreiben. M. G. §. 67. Der Beweiß fließt aus denen Nro. 1. angeführten §§.

3) Um jeden △ kann ein Cirkel beſchrieben werden. Nro. 2.

4) Das Unbekannte Centrum eines gegebenen Cirkels oder Bogens zu finden. Nro. 2. und M. G. §. 67. Anm.

5) Sobald 3 Punkte in einer Peripherie auf 3 Punkte einer andern Peripherie fallen, ſo decken ſich die ganzen Peripherien und ſind folglich gleich.

§. 81. Tab. II. F. 52.

In einem oder gleichen Cirkeln, ſind gleiche Sehnen gleichweit vom Centrum entfernt und umgekehrt.

Beweiß.

Man ziehe die Perpendikel CJ und CK. Dieſe ſind die Entfernungen der Sehne AB und DE vom Centro C §. 15. folglich iſt zu zeigen, daß CJ = CK.

AC = CD (§. 21. 3.)
AJ = DK (p. hyp. & §. 78. III. 1.)
∠m = ∠n (p. hyp.)

△ ACJ = △ CDK (§. 42. 3. 3.) folglich

I. CJ = CK. W. D. E. W.

Wenn aber CJ = CK ſo iſt auch AB = DE, denn

CJ = CK
∠m = ∠n (p. hyp.)
AC = CD (§. 21. 3.)

△ ACJ = △ CDK (§. 42. 3. 3.) Daher

AJ = DK weil aber
‖ ‖
$\frac{AB}{2}$ $\frac{DE}{2}$ (§. 78. III. 1.) ſo iſt auch

II. AB = DE (A. §. 63. u. 55. Z. 2) W. D. A. W.

§. 82. Tab. II. F. 55.

Der Diameter iſt gröſſer als eine jegliche Sehne des nemlichen Cirkels oder DE > AB.

Beweiß.

Man ziehe die Radios AC und BC als Hülfslinien. Nun iſt

AC + BC > AB (§. 53.) aber auch
‖ ‖
DC CE (§. 21. 3.)

DC + CE > AB
‖
DE folglich (A. §. 66.)

DE > AB

§. 83.

Der ∠ am Centro iſt doppelt ſo groß als der ∠ an der Peripherie, welcher mit ihm auf einerley Bogen ſtehet.

Beweiß. Tab. II. F. 56.

1) Man verlängere AC in B und ziehe BD ſo iſt

u = x + y (§. 59.) aber auch
‖
x (§. 47. 4.)

---

u = 2x. W. D. E. W.

2) Man ziehe Tab. II. F. 57. durch die Scheitel des Peripherie und Centri ∠ die Hülfslinie EF ſo iſt

$$\left.\begin{array}{l} u = 2y \\ x = 2m \end{array}\right\} \text{(nach 1.)}$$

$$u + x = 2y + 2m \text{ (A. §. 63.)}$$

3) Man ziehe Tab. II. F. 58. durch die Scheitel des Centri und Peripherie ∠ die Hülfslinie GH ſo iſt

$$\left.\begin{array}{ll} & u + y = 2x + 2m \\ \text{und} & u = 2x \end{array}\right\} \text{(nach 1.)}$$

$$y = 2m \text{ (A. §. 63.)}$$

§. 84.

Hieraus flieſſen folgende Zuſätze und Aufgaben:

1) Ein jeder Peripherie ∠ hat zu ſeinem Maas den halben Bogen, worauf er ſteht. Dann Tab. II. F. 58.

$$\begin{array}{ll} y & = \alpha JK \text{ (§. 34.) und} \\ \| & \\ 2m & \text{(§. 83. 3.)} \end{array}$$

$$2m = \alpha JK \text{ und } : 2$$

$$m = \frac{\alpha JK}{2} \text{ (A. §. 63.)}$$

2) Alle Peripherie ∠ ∠ x, o, y, welche auf einerley α AB oder auf gleichen Bögen ſtehen, ſind einander gleich, da jeder $= \frac{\alpha AB}{2}$ (1.) Tab. III. F. 59.

3) Jeder Peripherie $\angle$ ACB, der über dem Diameter AB ſteht, iſt = 90° oder ein $\llcorner$. Denn es iſt $\angle$ ACB = $\frac{p}{2}$: 2 (nach 1.) folglich $\angle$ ACB = $\frac{p}{4}$. Tab. III. F. 60.

4) Daher iſt jeder Peripherie $\angle$ ECD, der über einem Bogen, welcher > $\frac{p}{2}$ ſteht, ſtumpf, und wenn er, wie GCF, auf einem Bogen, welcher < $\frac{p}{2}$ iſt, ſteht, ſpitzig.

5) Auf Nro. 3. beruht die M. G. §. 35. vorgeſchlagene Prüfung des Winkelmaaſes, ingleichem eine, vom §. 60. Z. 7. verſchiedene Methode, eine Perpendikulare am End einer Linie aufzurichten, wovon mündlich.

6) Der Winkel auſſer dem Centro im Cirkel T. III. F. 61. hat zu ſeinem Maas den halben Bogen, worauf er ſteht + dem halben Bogen ſeines Scheitelwinkels oder $x = \frac{\alpha AB + \alpha CD}{2}$. Dann

$$x = \underset{\frac{\alpha AB}{2}}{\underset{\parallel}{u}} + \underset{\frac{\alpha CD}{2}}{\underset{\parallel}{m}} \quad (\text{§. 59.}) \text{ und (nach 1.)}$$

$$x = \frac{\alpha AB + \alpha CD}{2}$$

7) Der Winkel auſſer dem Centro, auſſer dem Cirkel, Tab. III. F. 62. hat zu ſeinem Maas den halben Bogen, worauf er ſteht, weniger dem, dieſem entgegengeſetzten, zwiſchen ſeinen Schenkeln liegenden Bogen, oder

$$x = \frac{\alpha CD - \alpha AB}{2}.$$ Dann

$$u = x + y \quad (§. 59.)$$

$$u - y = x$$ (A. §. 63.) und da

$$\begin{matrix} u & - & y \\ \| & & \| \\ \frac{\alpha CD}{2} & & \frac{\alpha AB}{2} \end{matrix}$$ (nach 1.)

$$\frac{\alpha CD - \alpha AB}{2} = x.$$

8) Zwey Bögen welche zwiſchen 2 parallelen Sehnen liegen, ſind gleich; und umgekehrt. T. II. F. 55. Dann man ziehe die Hülfslinie GD, ſo iſt p. hyp.

$$\begin{matrix} \angle x & = & \angle y \\ \| & & \| \\ \frac{\alpha DF}{2} & & \frac{\alpha EG}{2} \end{matrix}$$ (§. 57. 2.) aber auch (nach 1.) folglich

---

I. $\alpha DF = \alpha EG$ (A. §. 62.) W. Z. E. W.

Nun ſeye $\alpha DF = \alpha EG$ ſo iſt auch $DE \,\#\, GF$ weil

$$\angle x = \angle y$$ (p. hyp. und nach 1.)

$DE \,\#\, GF$ (§. 58. 2.)

§. 85. Tab. I. F. 15.

Eine jede, am Ende eines Radius JF aufgerichtete ſenkrechte Linie AFB berührt den Cirkel nur in einem Punkt F, ja es kann zwiſchen die Tangente AF und den Cirkel, ins Berührungspunkt F, keine andre gerade Linie gezogen werden.

Beweiß.

1) Dann man ziehe irgend eine andre Linie JM aus dem Centro auf AFB, ſo iſt, weil x = 90° (p. hyp.) y gewiß < 90° (§. 54.) Daher JM > JF (§. 52.) und jedes Punkt der Linie AB, welches von F verſchieden iſt, fällt auſſer dem Cirkel, folglich berührt AFB den Cirkel nur in einem Punkt F. W. Z. E. W.

2) Man ziehe zweytens, wenn es möglich wäre, zwiſchen den α GHF und die Tangente AF, eine gerade Linie GF und fälle auf ſie, aus dem Centro, die ſenkrechte JK, ſo iſt u = 90°, folglich m < 90° (§. 54.) Daher JF > JK (§. 52.) und GF fällt alſo innerhalb den α GHF, nicht zwiſchen ihn und die Tangente. Es kann daher zwiſchen die Tangente AF und den Cirkel, ins Berührungspunkt F keine andere gerade Linie gezogen werden.

Zusätze.

1) Daher iſt der Berührungs ∠ (§. 20.) kleiner als alle mögliche geradlinichte ∠ ∠ und der vom α GHF und dem Radius JF eingeſchloſſene vermiſchtlinichte ∠ gröſſer als irgend ein ſpitziger geradlinichter ∠. Von denen über dieſen Euclideiſchen Satz entſtandenen Strittigkeiten mündlich. Siehe den Clavius T. I. Opp. f. 117. ſ. Wallisius Opp. Vol. II. f. 605. ſeqq. Karſtens Lehrbegriff I. Th. p. 289. E. A.

2) In einem Punkt eines Cirkels iſt nur eine einige Tangente möglich.

§. 86. Tab. I. F. 15.

Jede Tangente des Cirkels BF ſteht auf dem in den Berührungspunkt gezogenen Radius JF ſenkrecht.

Beweiß.

Geſetzt es ſtünde BF nicht ſenkrecht auf JF, ſo wäre doch eine andre ſenkrechte JM aus J auf BF möglich. Nun fällt BF als Tangente ganz auſſer den Cirkel, folglich iſt JM > JL > JF (§. 21. 3.) Weil aber (p. hyp.) hier $y = 90°$ wäre, ſo müßte $x < 90°$ folglich JM < JF ſeyn, das iſt JM wäre zugleich $\gtrless$ JF. Da aber diß ungereimt iſt, ſo muß BF auf JF im Berührungspunkt ſenkrecht ſtehen.

Zuſätze.

1) Daher wird der Berührungspunkt gefunden, wenn entweder der Radius auf die Tangente, oder dieſe auf jenen ſenkrecht gezogen wird.

2) Folglich wird auf ein gegebenes Punkt F der Peripherie eine Tangente AF gezogen, wenn man in F den Radius JF und auf dieſen in F die ſenkrechte Linie AF oder BF (§. 60. Z. 7.) zieht.

3) Eben ſo leicht flieſt hieraus die Methode: Aus einem gegebenen Punkt A, auſſerhalb einem Cirkel, eine Tangente AE, an den Cirkel zu ziehen.

Tab. III. F. 63. Man zieht aus A ins Centrum des Cirkels eine gerade Linie AC, halbirt dieſe in B (§. 45. 3.) beſchreibt aus B mit dem Radius BC den neuen Cirkel ECDA, wo dieſer den erſtern in E und D durchkreuzt, zieht man aus A gerade Linien AE und AD, welche beyde Tangenten des erſten Cirkels ſind. Dann x und y ſind Peripherie ∠∠, welche über dem Diameter AC ſtehen, folglich $x = y = 90°$ (§. 84. 3.) CD ſteht daher auf AD, ſo wie CE auf AE, in den Berührungspunkten D und E ſenkrecht, folglich müſſen AD und AE Tangenten des Cirkels EDFE ſeyn.

§. 87. Tab. III. F. 64.

Der ∠ EBC eines kleinern Abſchnitts hat zu ſeinem Maas die Hälfte des Abſchnitts α BFE und der ∠ EBD eines gröſſern Abſchnitts hat gleichfalls den gröſſern Abſchnitt $\alpha\frac{EAHB}{2}$ zu ſeinem Maas.

Beweiß.

1) Man ziehe aus dem Berührpunkt B den Diameter AB, ſo iſt $\llcorner CBA = \alpha\frac{AEFB}{2}$ (§. 86 u. 84. 3)

und $\angle EBA = \alpha\frac{AE}{\;}$ (§. 84. 1.)

Nun iſt $\llcorner CBA - \angle EBA = \alpha\frac{AEFB - \alpha AE}{2}$ (A. §. 63.)

$$\underbrace{\llcorner CBA - \angle EBA}_{\angle EBC} = \underbrace{\alpha\frac{AEFB - \alpha AE}{2}}_{\alpha\frac{BEF}{2}}$$

$\angle EBC = \alpha\frac{BEF}{2}$ W. D. E. W.

2) Weil $\llcorner ABD = \frac{\alpha AHB}{2}$ (§. 86. u. 84. 3.)

$\angle EBA = \frac{\alpha AE}{2}$ (§. 84. 1.)

$\underbrace{\llcorner ABD + \angle EBA}_{\text{stumpf.} \angle EBD} = \underbrace{\frac{\alpha AHB + \alpha AE}{2}}_{\frac{\alpha EAHB}{2}}$ (A. §. 63.)

---

stumpf. $\angle EBD = \frac{\alpha EAHB}{2}$

Zuſatz 1.

Da $\angle x = \underbrace{\frac{\alpha EFB}{2}}_{\angle EBC}$, und $\angle y = \underbrace{\frac{\alpha EAHB}{2}}_{\text{stumpf.} \angle EBD}$

ſo iſt $\angle x = \angle EBC$ u. $\angle y =$ ſtumpf. $\angle EBD$ Oder der $\angle$ im gröſſern Abſchnitt iſt dem $\angle$ des kleinern Abſchnitts, und der $\angle$ im kleinern Abſchnitt, dem $\angle$ des gröſſern Abſchnitts gleich.

Zuſatz 2.

Man verlängere die Sehne HB auſſer den Cirkel in G, ſo iſt der $\angle EBG = \frac{\alpha EB + \alpha BH}{2}$ dann

$\angle CBG = \underbrace{\angle DBH}_{\frac{\alpha BH}{2}}$ (§. 41.) und

---

$\angle CBG = \frac{\alpha BH}{2}$ und da ferner

$\angle CBE = \frac{\alpha BE}{2}$ ſo iſt (Ar. §. 63.)

$$\underbrace{\angle CBG + \angle CBE}_{\angle EBG} = \frac{\alpha BH + \alpha BE}{2} \text{ weil aber}$$

$$\angle EBG = \frac{\alpha BH + \alpha BE}{2}$$

Anmerkung.

Wird in der Stereometrie bey der Verfertigung der Körper wichtig werden.

§. 88. Tab. III. F. 66.

Zwiſchen zwo gegebene Linien AB und CD die mittlere geometriſche Proportionale BE zu finden.

Auflöſung.

1) Man ziehe eine gerade Linie und trage auf dieſe die eine gegebene Linie AB aus A nach B.

2) Setze die zwote gegebene CD aus B nach D.

3) Halbire AD in G und beſchreibe aus G mit AG, den Cirkel AEDA.

4) Richte aus B die ſenkrechte Linie BE auf, dieſe iſt die verlangte mittlere Proportionale zwiſchen AB und CD.

Beweiß.

Der $\triangle ABE$ iſt $\sim \triangle BDE$ (§. 71. p. conſt.) Daher

$$AB : BE = BE : BD \text{ nun iſt}$$

$$AB = AB, \quad BD = CD \text{ p. conſt.}$$

$$\text{folglich } AB : BE = BE : CD$$

daſs iſt: BE iſt mittlere geom. Proport. zwiſchen AB und CD. (Ar. §. 209. Z. 3.)

Zuſätze.

1) Folglich läßt ſich aus der Sehne eines Abſchnitts und dem Pfeil oder Höhe deſſelben, der Reſt des Diameters BD finden, indem BE $= \frac{EF}{2}$ (§. 78. III.) folglich AB : $\frac{EF}{2} = \frac{EF}{2}$: BD. Nun iſt AB + BD = AD = dem Diameter und $\frac{AB+BD}{2}$ = AG oder dem Radius. Man kann folglich aus dem Pfeil und Sehne des Abſchnitts, den Diameter, Radius und Centrum des Cirkels, von welchem der Abſchnitt ein Stück iſt, finden. Eine in der Baukunſt beym Gewölbebau wichtige Aufgabe. M. G. §. 54. und 76.

2) Wird AB nach dem verjüngten Maaſsſtab für 1. angenommen und nach eben dem Maaſsſtab eine andre Zahl durch BD ausgedruckt, ſo iſt BE = $\sqrt{BD}$ (Ar. §. 219.) oder man kann, durch dieſe Aufgabe, die Quadratwurzel durch Linien und Zeichnen ausziehen.

§. 89. T. III. F. 61.

Wenn zwo Sehnen AD und BC ſich in E ſchneiden, ſo iſt ED : BE = CE : AE, ferner ED : CE = BE : AE und AE × DE = BE × CE.

Man ziehe die Hülfslinien CD und AB, ſo iſt △ CED ∽ △ ABE in dem y = x und n = o (§. 41. und §. 84. 2.) folglich (§. 65.)

ED : BE = CE : AE

ED : CE = BE : AE (Ar. §. 217.)

u. endlich AE × DE = BE × CE (Ar. §. 215.)

§. 90. Tab. III. F. 67.

Wenn von einem Punkt C auſſer einem Cirkel, zwo Secanten AC und CD gezogen werden, ſo iſt AC : CD = CE : BC.

Beweiß.

Man ziehe die Hülfslinien AE und BD, ſo iſt der △ ACE ∽ △ BCD weil x = x und y = u (Ar. §. 61. 3. §. 84. 2. und §. 65.) Daher AC : CD = CE : BC.

§. 91. Tab. III. F. 68.

Wenn aus einem Punkt A, auſſer einem Cirkel, eine Tangente AB und eine Secante AC gezogen wird, ſo iſt die Tangente mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen der ganzen Secante und dem Stück derſelben, welches auſſer dem Cirkel liegt, d. i. AC : AB = AB : AD.

Beweiß.

Man ziehe die Hülfslinien BD und BC ſo iſt x = x (Ar. §. 62. 3.) u = y (§. 87. 3. 1.) folglich △ ABD ∽ △ ABC. Daher AC : AB = AB : AD

folglich AB mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen AC und AD.

Zuſätze.

1) $AB^2 = AC \times AD$.

2) Da $AB^2 = AC \times AD$ (Zuſ. 1.)
und $AE^2 = \parallel$

ſo iſt auch $AB^2 = AE^2$, oder, wenn aus einem Punkt auſſer einem Cirkel 2 Tangenten gezogen werden, ſo ſind ihre Quadrate, folglich auch die Wurzeln, das iſt, die Tangenten ſelbſt, einander gleich.

3) Daher iſt in einem △ ABF das Quadrat der Hypotenuſe der Summe der Quadrate der Catheten gleich, oder $AF^2 = AB^2 + BF^2$. Dann man beſchreibe aus F mit einem der Catheten BF einen Cirkel und verlängre die Hypotenuſe AF bis in C, nenne $AF = a$, $AB = b$, $BF = CF = DF$ (§. 21. 3) $= c$, ſo iſt $AC = a + c$ und $AD = a - c$. Da nun

$$\begin{array}{ccccccc} AC & : & AB & = & AB & : & AD \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ a+c & & b & & b & & a-c \end{array}$$

und … ſo iſt

$a + c : b = b : a - c$ folglich (Ar. §. 215)

$a^2 - c^2 = b^2$ und (Ar. §. 63.)

$$\begin{array}{ccccc} a^2 & = & b^2 & + & c^2 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ AF^2 & & AB^2 & & BF^2 \end{array}$$

nun iſt … folglich

$AF^2 = AB^2 + BF^2$

Anmerkung.

Dieſer Satz gehört eigentlich in den fünften Abſchnitt, wo er noch auf eine andere Art erwieſen wird. Ich rücke ihn blos hier ein, weil er ſo gar leicht aus dem §. folgt.

§. 92. Tab. III. F. 69.

Wenn in einem Cirkel eine Tangente BD auf den Diameter AB gezogen und aus A, auf ein beliebiges Punkt der Tangente D, eine gerade Linie AD ausgezogen wird, ſo iſt der Diameter mittlere geometriſche Proportionale, zwiſchen der ganzen Secante und dem Stück derſelbigen, welches innerhalb des Cirkels liegt. D. i. AD : AB = AB : AC.

Beweiß.

Man ziehe die Hülfslinie BC ſo iſt

$\llcorner o = \llcorner (x+n)$ (§. 84. 3. §. 86.)

$\angle u = \angle u$

$\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (§. 65.) Daher

AD : AB = AB : AC

folglich AB mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen AD und AC. (Ar. §. 209. Z. 3.)

Zuſatz.

Alſo iſt auch $AB^2 = AD \times AC$ (Ar. §. 215.)

§. 93. Tab. III. F. 70.

Eine gerade Linie AB heißt nach der mittlern und äuſſern Verhältnuß (media & extrema ratione) ge-

theilt, wenn ſich die ganze Linie AB, zum gröſſern Stück derſelben AF, wie diß gröſſere Stück AF, zum kleinern BF verhält, d. i. wenn AB : AF = AF : BF. Diß geſchieht auf folgende Art:

1) Man richte in B eine ſenkrechte Linie $BD = \frac{AB}{2}$ auf.

2) Beſchreibe mit BD aus D einen Cirkel.

3) Ziehe aus A durch das Centrum die Secante AC.

4) Trage AE aus A nach F, ſo iſt in F die Linie AB nach der mittlern und äuſſern Verhältnuß getheilt.

Beweiß.

Es ſeye $AF = AE = x$, $AB = CE = a$, $AC = a + x$ $BF = a - x$. Nun iſt $AB^2 = AC \times AE$ (§. 91. Z. 1.)

Das iſt $a^2 = x^2 + ax$

$a^2 - ax = x^2$ (Ar. §. 63.)

oder $(a - x)\, a = x \times x$ Daher

$a : x = x : a - x$ (Ar. §. 216. Z.)

Weil aber $\begin{matrix} a & : & x & = & x & : & a-x \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ AB & & AF & & AF & & BF \end{matrix}$ ſo iſt auch

$AB : AF = AF : BF$

oder AB iſt nach der mittlern und äuſſern Verhältnuß getheilt.

Fünfter Abſchnitt.

Von den Parallelogrammen und Trapezen.

§. 94. Tab. I. F. 25.

In allen Parallelogrammen ſind die entgegen geſetzte Seiten gleich, und wenn ſie gleich ſind, ſo ſind die Vierecke Parallelogramme.

Beweiß.

Da BC ⋕ AD ſo iſt auch

x = n (§. 57. 2.)
m = y
AC = AC (Nr. §. 61. 3.)

△ ABC = △ ACD (§. 43.)

I. BC = AD und AB = CD W. Z. E. W.

Wenn aber BC = AD und AB = CD ſo iſt, weil AC = AC, △ ABC = △ ACD (§. 44.) folglich x = n und m = y daher BC ⋕ AD und AB ⋕ CD (§. 58. 2.) folglich ABCD

II. ein Parallelogramm (§. 23. u. §. 61.) W. Z. A. W.

Zuſatz.

Da ſich dieſer Beweiß bey allen □, ▭, ▱ und ▱ anbringen läßt, ſo ſind dieſe 4 Figuren Parallelogramme.

§. 95. Tab. I. F. 25.

Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwey gleiche Theile getheilt die beyde an einer Seite liegende Winkel ſind zuſammen = 180° u. die ſich nach den Diagonalen entgegen geſetzte Winkel ſind einander gleich.

Beweiß.

1) AB = CD, BC = AD (§. 94.) AC = AC (Ar. §. 61. 3.) daher △ ABC = △ ACD. W. D. E. W.

2) ∠B + ∠A = 180° (§. 57. 1.) folglich aus eben dem Grund ∠A + ∠D = 180°; ∠D + ∠C = 180° und ∠C + ∠B = 180°. W. D. A. W.

3) ∠B + ∠A = 180° und ∠A + ∠D = 180° (nach 2.) Daher ∠B + ∠A = ∠A + ∠D (Ar. §. 62.) und auch ∠B = ∠D (Ar. §. 63.) auf die nemliche Art zeigt ſich, daß ∠A = ∠C. W. D. D. W.

Zuſätze.

1) Iſt demnach ein Winkel ein ∟ ſo ſinds alle.

2) Iſt ein Winkel ſchief, ſo ſind alle ſchief.

3) Auf dieſem und dem vorhergehenden §. 94. beruhet der Beweiß für die Zeichnung aller Parallelogramme, folglich der M. G. §. 110, 111, 112 und 113.

§. 96. Tab. III. F. 71.

Zwey Parallelogramme, welche einerley Grundlinie und Höhe haben, ſind einander gleich.

Beweiß.

Das □ BC hat mit dem ▱ CF einerley Grundlinie CD aber auch gleiche Höhe, weil BD = GF (§. 61.) Nun iſt

$$AC = BD$$
$$CE = DF \quad (\S.\ 94.)$$
$$x = o \quad (\S.\ 27.\ \text{Nro. } 3.)$$

$$\triangle ACE = \triangle BDF \quad (\S.\ 4.\ Z.\ 3.)$$ d. i.

$$M + N = N + P$$
$$N = N \quad (\text{Ar. } \S.\ 61.\ 3.)$$

$$M = P \quad (\text{Ar. } \S.\ 63.)$$

nun iſt $Q = Q$ (Ar. §. 61. Z.) daher

$$M + Q = P + Q$$ (A. §. 63.) allein da

$$\Vert \qquad \Vert$$
$$\square AD \qquad \square CF$$ ſo iſt auch

$$\square AD = \square CF$$

Zuſätze.

Da $\square AD = \square CF$ aber auch

$$\square AD = \square CF$$ (Ar. §. 63.) und

$$\Vert^{2} \qquad \Vert^{2}$$
$$\triangle ACD \qquad \triangle CDF$$ (§. 95.) ſo iſt auch

$$\triangle ACD = \triangle CDF$$ folglich

ſind auch △ △, welche gleiche Grundlinien und Höhen haben, einander gleich.

2) Ein jeder △ iſt die Hälfte von einem Parallelogramm, ſobald beyde gleiche Grundlinien und Höhen haben: Denn

$$\triangle CDF = \triangle ACD \quad (Z. 1.)$$

$$\triangle ACD = \frac{\square BC}{2} \quad (§. 95.)$$

$$\triangle CDF = \frac{\square BC}{2}.$$

Anmerkung.

Daß, gleiche Höhe haben oder zwiſchen einerley Parallelen ſtehen, einerley ſey, erhellet aus §. 61. und §. 16.

§. 97. Tab. III. F. 72.

Wenn ein Parallelogramm mit einem △ gleiche Grundlinie, aber nur die halbe Höhe hat, ſo iſt das Parallelogramm dem △ gleich, und umgekehrt.

Beweiß.

1) Es ſeye der ◺ ABE und das ▭ AC, AB gemeinſchaftliche Grundlinie, BC als Höhe des ▭ $= \frac{AE}{2}$ als Höhe des ◺ (p. hyp.) ſo iſt

$$BC = DE$$

$$x = y \quad (§. 41.)$$

$$o = u \quad (\text{weil } BC \parallel AE \; §. 57. 2.)$$

folglich ◺ BCF = ◺ DEF (§. 60. Z. 4. u. §. 43.)

und da $\triangle$ABDF = $\triangle$ABDF (A. §. 61. Z.) ſo iſt auch

$\triangle$ ABDF + $\triangle$ BCF = $\triangle$ ABDF + $\triangle$ DEF (A. §. 63.)
‖ ‖
$\square$ AC $\triangle$ ABE

$\square$ AC = $\triangle$ ABE.

2) Hätte ein ſtumpfw. $\triangle$ ABJ mit dem $\square$ AC gleiche Grundlinie AB und gleiche Höhe, ſo ſtünde $\triangle$ ABJ mit $\triangle$ ABE auf einerley Grundlinie und zwiſchen den nemlichen Parallelen AB u. GH. Daher iſt $\triangle$ ABJ = $\triangle$ ABE (§. 96. Z. 1.)
allein es iſt ‖
$\square$ AC (nach 1.)

$\triangle$ ABJ = $\square$ AC. W. Z. E. W.

3) Nimmt man AB für die gemeinſchaftliche Höhe des $\square$ AC und des $\triangle$ ABE, AD für die Grundlinie des $\square$ AC, AE aber für die Grundlinie des $\triangle$ ABE an, ſo iſt der Beweiß vollkommen der nemliche, wie Nro. 1. und da der ſchiefwinklichte $\triangle$ AKE = $\triangle$ ABE nach denen Nro. 2. angegebenen Gründen, ſo iſt auch in dieſem Fall, ſowohl der $\triangle$ ABE als der $\triangle$ AKE = $\square$ AC. W. Z. A. W.

§. 98. Tab. III. F. 73.

In ähnlichen Parallelogrammen und Triangeln verhalten ſich die Abſchnitte der Grundlinien in einem wie im andern, und die Höhe des einen zu ſeiner Grundlinie, wie die Höhe des andern zur Grundlinie des andern.

Beweiß.

Man ziehe die Hülfslinien GJ und BD, inglei-chem die Höhen GH und BC, ſo iſt $x = y$ als rechte ∟ und $u = o$ (p. hyp.) Daher △GFH ∽ △ABC (§. 65.) Eben ſo iſt $m = r$ und $n = s$ folglich △GHJ ∽ △BCD (§. 65.) Alſo nothwendig

$GH : FH = BC : AC$ und

1) $GH : BC = FH : AC$ (A. §. 217.)

Aber auch $GH : HJ = BC : CD$ und

2) $GH : BC = HJ : CD$ (A. §. 217.)

Da aber || = $FH : AC$ (nach 1.) ſo iſt

I. $FH : AC = HJ : CD$ (A. §. 203.) W. D. E. W.

Da ferner $GH : BC = FH : AC$ (nach 1.) und || = $HJ : CD$ (nach 2.) ſo iſt

$GH : BC = FH+HJ : AC+CD$ (A. §. 217.), wo $FH+HJ = FJ$ und $AC+CD = AD$

$GH : BC = FJ : AD$ (A. §. 61. 3.) u. endlich

II. $GH : FJ = BC : AD$ (A. §. 217.) W. D. A. W.

§. 99. Tab. I. F. 27.

Wenn in einem Parallel-Trapez, mit ſeiner zwi-ſchen den Parallelen liegenden Seite AE, durch das Ende der kleinſten Parallele, eine neue Parallele BC gezogen wird, ſo entſteht ein Parallelogramm, welches mit dem übrigen bleibenden △BCD zuſammengenom-men dem Paralleltrapez gleichet.

Beweiß.

Da BE $\#$ AC und BC $\#$ AE (p. hyp. und conſtr.) ſo iſt BE = AC und BC = AE (§. 61.) folglich AEBC ein Parallelogramm (§. 23.) Daß aber AEBC + $\triangle$ BCD = AEBD erhellet aus (Ar. §. 61. und 3.)

§. 100. Tab. III. F. 74.

In jedem rechtwinklichten $\triangle$ iſt das Quadrat der Hypotenuſe der Summe der Quadrate beyder Catheten gleich, d. i. $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

Beweiß.

Man ziehe aus dem $\llcorner$ A, mit der Seite CF des Quadrats der Hypotenuſe, eine Parallele AG, welche das $\square$ BC in 2 Parallelogramme JF und BG zerſchneidet. Man nenne JF = Q; BG = P, das $\square$ AC = R, das $\square$ AB = T und ziehe noch ferner die Hülfslinien AF, BE, AH und CL, ſo iſt

$$\llcorner o = \llcorner y \quad (§. 27. 2.)$$

$$x = x \quad (A. §. 61. 3.)$$

$$\angle o + x = \angle x + y \quad (A. §. 63.)$$

$$AC = CE$$

$$CF = BC \quad (§ 23.)$$

$$\triangle ACF = \triangle BCE \quad (§. 42.) \text{ Allein}$$

$$\frac{Q}{2} \qquad \frac{R}{2} \quad (§. 96. 3. 2.)$$

$$\frac{Q}{2} = \frac{R}{2} \text{ und } \times 2 \quad (Ar. §. 63.)$$

$$1) \quad Q = R$$

Da ferner
$$\begin{aligned} \angle u+n &= \angle u+m \\ AB &= BL \\ BH &= BC \end{aligned}$$
(aus den nemlichen Gründen wie 1.)

$$\triangle ABH = \triangle BCL$$ (§. 42.) und da
$$\triangle ABH = \frac{P}{2}, \quad \triangle BCL = \frac{T}{2}$$ (§. 96. Z. 2.)

$$\frac{P}{2} = \frac{T}{2}$$ und × 2 (A. §. 63.)

---

2) $P = T$ Nun war nach 1.

$Q = R$ daher (A. §. 63.)

$$Q+P = R + T$$ weil aber
$$Q+P = BC^2, \quad R = AC^2, \quad T = AB^2$$

ſo iſt $BC^2 = AC^2 + AB^2$

Ein andrer Beweiß des nemlichen Satzes T. I. F. 18.

Man ziehe aus dem ∟D auf die Hypotenuſe AB eine ſenkrechte Linie DE und nenne $AB = a$, $AE = x$ ſo iſt $BE = a - x$, $AD = b$ und $BD = c$. Nun iſt $\triangle ADE \backsim \triangle ABD$ und $\triangle BDE \backsim \triangle ABD$ (§. 71.) Folglich iſt

$$AB : AD = AD : AE$$ oder

$$a : b = b : x$$ und (A. 215.)

---

1) $b^2 = ax$

Aber auch $AB : BD = BD : BE$ oder

$$a : c = c : a - x$$ Daher (A. §. 215.)

---

2) $c^2 = a^2 - ax$ weil aber nach 1.
$b^2 = ax$ ſo iſt (A. §. 63.)

$b^2 + c^2 = a^2$ Nun iſt

$\parallel \quad \parallel \quad \parallel$

$AD^2 \quad BD^2 \quad AB^2$ Daher

$$AD^2 + BD^2 = AB^2$$

Anmerkung.

Vom Erfinder, Geſchichte und Namen dieſes merkwürdigen Satzes, mündlich.

Zuſatz. Tab. I. F. 22.

Es ſeye eines □ ABCD Seite $BC = AB = 1$ ſo iſt $AC^2 = BC^2 + AB^2$ das iſt $AC^2 = 2$ folglich $AC = \sqrt{2}$. Nun iſt AC Diagonale des □ (§. 24.) folglich verhält ſich die Diagonale eines □ zu ſeiner Seite $= \sqrt{2} : 1$, oder ſie iſt eine Irrationalgröſſe (Ar. §. 149.) Man ſieht alſo auch hieraus:

a) Daß Irrationalgröſſen wirklich in der Natur vorhanden ſind.

b) Daß ſie ein wahres Verhältnuß gegen einander haben.

c) Daß diß Verhältnuß durch Linien ausgedrückt werden kann, wenn es ſchon nicht in Zahlen durch rationale Verhältnuſſe möglich iſt.

d) Daß die arithmetiſche Ausdrücke der Irrationalverhältnuſſe nichts Widerſprechendes behaupten.

§. 101. Tab. III. F. 75.

In einem ſtumpfwinklichten △ ABC, iſt das Quadrat der größten Seite gleich, der Summe der □te der beyden übrigen Seiten + dem doppelten Produkt aus der Grundlinie AB in das zwiſchen ihr und der Perpendikulare CD liegende Stück AD.

Beweiß.

Man verlängre die Grundlinie AB unbeſtimmt und ziehe die Perpendikulare CD, nenne $AB = a$, $AC = c$, $BC = b$, $AD = x$, $CD = y$, ſo iſt BD $= a + x$ und nun muß bewieſen werden, daß

$b^2 = a^2 + c^2 + 2ax$. Es iſt aber

$b^2 = y^2 + a^2 + 2ax + x^2$ (§. 100. u. A. §. 144.)

ingleichem $c^2 = y^2 + x^2$ (§. cit.) diß ſubſtituirt

giebt $b^2 = a^2 + c^2 + 2ax$.

Zuſatz.

Man kann alſo in jedem ſtumpfwinklichten △ ABC die Perpendikulare CD finden, wenn man in dieſer Gleichung x reducirt (A. §. 183.) und im ⊿ ACD aus c und x nach §. 100. y findet. Denn da

$b^2 = a^2 + c^2 + 2ax$ ſo iſt

$b^2 - a^2 - c^2 = 2ax$ und

$\frac{b^2 - a^2 - c^2}{2a} = x$ nun iſt

$c^2 = y^2 + x^2$ (§. 100.) folglich

$$c^2 - x^2 = y^2 \text{ (A. §. 63.) und}$$

$$\sqrt{c^2 - x^2} = y = CD.$$

§. 102. Tab. III. F. 76.

In jeglichem △ ABC iſt das Quadrat einer Seite AB, welche einem ſpitzigen ∠C gegenüber ſtehet + dem doppelten Produkt aus der Seite AC, worauf die Perpendikulare BD gezogen wurde, in den Abſchnitt der nemlichen Seite DC, welcher zwiſchen der Perpendikulare BD und dem erſtern ſpitzigen ∠C liegt, gleich der Summe der Quadrate der beyden übrigen Seiten AC und BC. Oder $AB^2 + 2AC \times DC = AC^2 + BC^2$.

Beweiß.

Es ſeye AB = a, BC = b, AC = c, BD = y, DC = x, ſo iſt AD = c — x und nun zu beweiſen, daß: $a^2 + 2cx = c^2 + b^2$.

Da $a^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$ (§. 100. u. Ar. §. 144.)
und $b^2 = y^2 + x^2$ (§. 100.) ſo iſt wenn b^2

ſubſtituirt wird $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ (Ar. §. 63) u.

$$a^2 + 2cx = b^2 + c^2 \text{ (Ar. §. cit.)}$$

Zuſätze.

Es kann alſo auch hier wie (§. 101. Zuſ.) y oder BD gefunden werden. Denn

$$a^2 + 2cx = b^2 + c^2 \text{ folglich } - a^2$$

$$2cx = b^2 + c^2 - a^2 \text{ und } : 2c$$

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Nun iſt $b^2 = x^2 + y^2$ und folglich

$$\sqrt{b^2 - x^2} = y$$

2) Folglich läßt ſich in jedem △ aus den 3 gegebenen Seiten die Perpendikularhöhe finden.

3) Wenn in einem △ nichts als die drey Seiten gegeben ſind, ſo läßt ſich aus §. 101. und 102. beurtheilen, ob er ein ◺, ſtumpfw. △ oder △ Triangel ſeye.

Sechſter Abſchnitt.

Von den Vielecken.

§. 103. Tab. III. F. 77.

Die Summe der Winkel in jedem Vieleck wird gefunden, wenn man von der Zahl der Seiten des Vielecks 2 abzieht und den Reſt mit 180°, multiplicirt. Oder wenn die Zahl der Seiten = n, die Summe der ∠∠ = S ſo iſt $S = \frac{(n-2)\,p}{2}$

Beweiß.

Man ziehe in jedem Vieleck die Diagonalen z. E. hier AC und CE, ſo erhält man immer 2 △ weniger als Seiten ſind, das iſt n — 2. Nun iſt die Summe der ∠∠ A + B + C + D + E = der Summe der ∠∠

aller im Vieleck durch die Diagonalen entſtandnen △△. Und die Summe der ∠∠ in jedem △ = 180° = $\frac{p}{2}$ (§. 60.) folglich iſt $(n-2) \times \frac{p}{2} = S$ oder $S = \frac{(n-2)\,p}{2}$.

Zuſätze.

1) Aus dieſem Satz fließt die Berechnung einer Tafel, welche die Summe der ∠∠ aller Vielecke vom 3 bis 20. Eck enthält. Z. E. im Fünfeck iſt $n - 2 = 3$ daher $3 \times 180° = 540° = S$ im Fünfeck ꝛc. ꝛc. und

2) Da in regularen Vielecken alle ∠∠ einander gleich ſind (§. 24.) ſo iſt die Gröſſe von einem ∠ immer $= \frac{S}{n}$ oder $\frac{(n-2)\,p}{2n}$. Daher

Zahl der Seiten.	Sum̃e der ∠∠.	∠ im regul. Vieleck.	Zahl der Seiten.	Sum̃e der ∠∠.	∠ im regul. Vieleck.
III.	180°.	60°.	XII.	1800	150.
IV.	360°.	90°.	XIII.	1980.	$152\frac{4}{13}$
V.	540°.	108°.	XIV.	2160.	$154\frac{2}{7}$
VI.	720°.	120°.	XV.	2340.	156.
VII.	900°.	$128\frac{4}{7}$.	XVI.	2520.	$157\frac{1}{2}$.
VIII.	1080°.	135.	XVII.	2700.	$158\frac{14}{17}$.
IX.	1260°.	140.	XVIII.	2880.	160.
X.	1440°.	144.	XIX.	3060.	$161\frac{1}{19}$.
XI.	1620.	$147\frac{3}{11}$.	XX.	3240.	162.

3) Wenn man innerhalb eines Vielecks T. I. F. 28. ein Punkt annimmt und aus allen ∠∠ des Vielecks gerade Linien in diß Punkt zieht, ſo entſtehen ſo viel △△ als die Figur Seiten hat, folglich iſt hier die Summe aller Winkel in dieſen $\triangle\triangle = \frac{pn.}{2}$ Allein die um das Punkt F befindliche ∠∠ gehören nicht zur Summe der ∠∠ des Vielecks und ſie betragen zuſammen $360° = p$ (§. 40. Zuſ. 3.) folglich iſt auch $S = \frac{pn}{2} - p$

4) Man verlängere die Seiten eines Vielecks T. III. F. 77. ſo iſt jeder entſtehende äuſſere ∠ z + dem innren $m = 180° = \frac{p}{2}$. Folglich ſind alle äuſſere und innre ∠∠ zuſammen $= \frac{pn.}{2}$ Nun iſt $S = \frac{pn}{2} - p$ Daher

Summe der äuſſern und innren $\frac{pn}{2}$

$S = \frac{pn}{2} - p$ Diß abgezogen giebt

die Summe der äuſſern ∠∠ $= p = 360°$.

5) Nach dem Zuſatz 1. der Tabelle und Zuſ. 4. läßt ſich alſo eine richtige Probe anſtellen, ob man bey dem Meſſen aller ∠∠ eines Vielecks geirrt habe oder nicht. Man ſummirt die gemeſſene ∠∠, iſt S nicht $= (n-2)\frac{p}{2}$, ſo iſt geirrt worden. Oder man meſſe alle benachbarte ∠∠ der innern, und ſummire ſie. Iſt ihre Summe $\gtrless p$ ſo wär gleichfalls ein Fehler begangen.

§. 104.

Polygon oder Vielecks ∠∠ ſind diejenige, deren Schenkel Seiten des Vielecks ſind. Centriwinkel heiſſen in regularen Vielecken diejenige, deren Scheitel das Centrum des Vielecks iſt und deren Schenkel aus dem Centro in zwey nebeneinander liegende Polygon ∠∠ gezogen werden. Z. E. x, y, u, m, n. T. I. F. 28.

Zuſätze.

1) Wenn die Peripherie T. I. F. 31. in lauter gleiche Theile getheilt wird, ſo iſt die Figur gleichſeitig, (§. 76. Z. 1.) aber auch alle Polygon ∠∠ gleich (§. 84. 2.) das iſt, man erhält ein regulares Vieleck (§. 24.) in welchem alle Centri ∠∠ gleich ſind (§. 76.) Nun iſt die Summe der Centri ∠∠ = p (§. 40. 3.) folglich der Centri ∠ in jedem regularen Vieleck $= \frac{p}{n}$. Hierauf beruht §. 90. der M. G.

2) Der Polygon ∠ jedes regularen Vielecks iſt $= \frac{S}{n}$ (§. 103. Z. 2.) Man kann ihn aber auch ohne S zu ſuchen, finden. Denn im regularen Vieleck T. I. F. 28. iſt △ DEF = △ AEF, weil AE = DE (§. 24.) EF = EF und AF = DF (§. 44.) und o = p auch q = r (§. 47.) Daher o + q = o + p. Allein o + p = 180° — m (§. 60. Z. 3.) Daher iſt der Polygon ∠ im regularen Vieleck im̃er $= \frac{p}{2} - \frac{p}{n}$ und der halbe Polygon ∠ z. E. $o = \left(\frac{p}{2} - \frac{p}{n}\right) : 2$

§. 105.

Man ſagt, daß eine Figur geometriſch verzeichnet werde, wenn die Zeichnung, blos durch Cirkel und Linial, nach beſtimmten Regeln, ohne ungewiſſes wiederholtes Verſuchen, verrichtet wird und dieſe Auflöſung eines ſcharfen Beweiſes fähig iſt. Mechaniſche Zeichnungen hingegen, heiſſen diejenige, welche entweder durch Beyhülfe noch andrer Werkzeuge, oder durch wiederholtes ungewiſſes Verſuchen verrichtet werden, und keines ſcharfen Beweiſes fähig ſind. Beyſpiele hievon liefern (§. 45. Nro. 3. 4. 5.)

§. 106. Tab. I. F. 31.

Ein jedes regulares Vieleck in einen Cirkel zu zeichnen.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man ſuche aus der gegebenen Anzahl der Seiten den Centri $\angle$ (§. 104. Z. 1.)

2) Trage dieſen mit dem Tranſporteur auf den Radius AF, ſo wird der andere Schenkel BF in der Peripherie das Punkt B beſtimmen (§. 39.)

3) Die Sehne AB trägt man ſo oft in der Peripherie herum als n in dem gegebenen Fall erfordert und verbindet die Punkte A, B, C, D, E, A mit geraden Linien.

4) So iſt die Figur ABCDE das verlangte regulare Vieleck (§. 104. Z. 1.)

Anmerkung.

Hierauf beruhet (M. G. §. 114.) Es iſt wahr, dieſe Zeichnung iſt blos mechaniſch (§. 105.) Da ſie aber a) Allgemein iſt, b) Keine allgemeine geometriſche Methode für alle Vielecke möglich iſt, wie in der Algebra gelehrt wird. c) Nach den Schranken dieſes Lehrbuchs, nicht einmal alle bekannte geometriſche Methoden, für regulare Vielecke vorgetragen werden können. d) Da gegenwärtige Methode den Weg zu ſchärfern in der Trigonometrie bahnt, wie in derſelbigen ſich deutlich zeigen wird. e) Da Zeichnung der Regularen Vielecke ſchon jetzo unumgänglich nothwendig iſt, ſo nahm ich keinen Anſtand ſie vorzutragen. Doch will ich die leichteſte geometriſche Methoden, wenigſtens für einige Vielecke, in den folgenden §§. angeben, weil ſie zum Beweiß vieler Sätze unentbehrlich ſind.

§. 107. Tab. III. F. 78.

Ein Quadrat geometriſch in einen Cirkel zu zeichnen.

Auflöſung.

1) Man ziehe einen Diameter AC und durch das Centrum E einen andern Diameter BD ſenkrecht (§. 45. 4.)

2) Ziehe ferner die Sehnen AB, BC, CD und AD, ſo iſt das □ in den Cirkel beſchrieben.

Beweiß.

Der ∠ ABC = ∠ BAD = ∠ ADC = ∠ BCD = ∟ (§. 84. 3.) Es iſt aber auch o = x = y = u = 90° (p. conſtr.) folglich ∝ AB = ∝ BC =

α CD = α AD, daher AB = BC = CD = AD (§. 76.) und ABCD ein □ (§. 23.) und zwar in den Cirkel beſchrieben (§. 26.)

Zuſätze.

1) Wenn die Bögen AB, BC, CD, AD halbirt (§. 80. 1.) und die Sehnen ausgezogen werden, ſo iſt das regulare Achteck geometriſch in den Cirkel beſchrieben. Setzt man das Halbiren der Bögen fort, ſo erhält man das 16, 32, 64, 128, 256 Eck, ꝛc. ꝛc.

2) Das in den Cirkel beſchriebene Viereck mag ein Quadrat, oder irgend ein andres Viereck seyn, ſo werden immer die 2 ſich entgegengeſetzte ∠ zuſammen 180° ausmachen. Denn ſie haben immer, die Hälfte des ganzen Cirkels, als Peripherie ∠∠, zu ihrem Maas (§. 84. 1.) Z. E. ∠B + ∠D = 180° u. der ∠A + ∠C = 180°.

§. 108. Tab. IV. F. 79.

Ein regulares Sechseck geometriſch in einen Cirkel beſchreiben.

Aufloͤſung.

Man trage den Radius AC aus A in der Peripherie herum, ſo wird er ſie in 6 gleiche Bögen theilen, und wenn die Sehnen AB, BG ꝛc. ꝛc. ausgezogen werden, das regulare Sechseck in den Cirkel beſchrieben ſeyn.

Beweiß.

Der Centri ∠ des Sechsecks x muß 60° ſeyn (§. 104. Z. 1.) Allein der Radius AC = AB ſchneidet einen α AB von 60° ab, indem AC = AB = BC, folglich der △ ABC gleichſeitig, daher u = y = x = 60° (§ 60. Z. 6.) und α AB = α BG = α GD ꝛc. ꝛc. (p. conſtr. und §. 76.) Es ſind demnach alle 6 Seiten und ∠ ∠ gleich (§. 76. Z. und §. 104. Z. 2.) Folglich ein Regulares Sechseck (§. 24.) und zwar in den Cirkel beſchrieben (§. 26.)

Anmerkung.

Hierauf gründet ſich der Beweiß des §. 55. M. S.

Zuſätze.

1) Auch hier kann durch bloſſes Halbiren der α α AB, GD ꝛc. ꝛc. wie (§. 107. Z. 1.) das regulare 12, 24, 48, 96, 192 Eck geometriſch in einen Cirkel beſchrieben werden.

2) Man ziehe die Sehnen AG, GE und AE, ſo iſt die in Cirkel beſchriebene Figur ein regulares Dreyeck.

Anmerkung.

Wie durch Verbindung des regularen 4 und 6 Ecks das 12 Eck geometriſch in einen Cirkel zu beſchreiben, mündlich.

§. 109. Trig. Tab. III. F. A.

Ein regulares Zehneck geometriſch in einen Cirkel zu beſchreiben.

Auflöſung.

Man meſſe den Radius BC, mache das Quadrat daraus, multiplicire diß mit 5, dividire das Produkt mit 4, ziehe hieraus die Quadratwurzel und ſubtrahire von dieſer den halben Radius, ſo hat man die Seite des regularen Zehnecks, welche ſich im Cirkel als Sehne herumtragen läßt, und wenn, wie §. 107. und §. 108. die Sehnen ausgezogen werden, ſo iſt das regulare Zehneck in den Cirkel beſchrieben.

Beweiß.

Geſetzt AB ſeye = der zu findenden Seite des regularen Zehnecks, ſo iſt $\propto AB = \frac{p}{10} = \angle o = 36°$ (§. 104. Z. 1.) Nun iſt AC = BC (§. 21. 3.) Daher $\angle m = \angle n$ (§. 47.) alſo $m = n = 72°$ (§. 60. Z. 3.) und $\angle u = 108°$ (§. 40. Z. 1.) Man mache ferner AD = AC, ſo iſt $\angle v = \angle y$ (§. 47.) und jeder = 36° (§. 60. Z. 3.) und $\angle o + \angle y = 72°$, daher da

$$m = n = 72°$$
$$u = 108°$$
$$v = y = 36°$$
$$o = 36°$$

$$m = m$$
$$o = v$$ Daher

$\triangle ABC \backsim \triangle BCD$ (§. 65.) folglich

$BD : BC = BC : AB$ Da aber nach der Figur $BD = r + x$, $BC = r$, $BC = r$, $AB = x$ ſo iſt

$$r+x : r = r : x \text{ und (Ar. §. 215.)}$$

$$x^2 + rx = r^2 \text{ folglich (Ar. §. 185. 7.)}$$

$$x = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} - \frac{r}{2}$$

Oder die Seite des regularen Zehnecks wird gefunden, wenn man aus dem 4ten Theil des 5fachen Quadrats des Radius, die Quadratwurzel zieht und den halben Radius davon ſubtrahirt.

Zuſatz. T. IV. F. 80.

1) Man wird alſo ein regular Fünfeck geometriſch in einen Cirkel beſchreiben, wenn man den Cirkel auf dieſe Art in 10 gleiche Bögen theilt, und die Sehnen BK, BD ꝛc. ꝛc. ſo auszieht, daß immer ein Theilungspunkt übergangen wird.

2) Und durch bloſſes Halbiren der Bögen, die zum regularen Zehneck gehören, läßt ſich wie (§. 107. Z. 1.) das regulare 20, 40, 80, 160 Eck ꝛc. ꝛc. in einen Cirkel beſchreiben.

3) Man beſchreibe T. IV. F. 81. in einen Cirkel ein regulares 6 Eck (§. 108.) ſuche die Seite des in den nemlichen Cirkel zu beſchreibenden regularen Zehnecks, trage die letztere aus A in B, ſo ſchneidet der α BC die Seite des regularen 15 Ecks ab. Denn wenn eine Sehne, Seite des regularen Funfzehnecks ſeyn ſoll, ſo muß ihr Bogen $\frac{p}{15}$ ſeyn. Da nun $\alpha AC = 60°$ (§. 108.) $\alpha AB = 36°$, ſo iſt $\alpha AC - \alpha AB = 24° = \frac{p}{15}$.

Halbirt man nun die Bögen des 15 Ecks fort, ſo geben ſich die Bögen, folglich auch Seiten des regularen 30, 60, 120, 240 ꝛc. ꝛc. Ecks, wie (§. 107. Z. 1.)

4) Aus der geometriſchen Zeichnung des 4, 6, und 10 Ecks flieſſen alſo die geometriſche Zeichnungen des 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 80, 96, 120, 128, 160, 192, 256 Eck.

§. 110. Tab. I. F. 31.

Auf jede gegebene Linie CD ein jedes verlangtes regulares Vieleck zu beſchreiben, z. E. ein Fünfeck.

Aufloͤſung.

1) Man ſuche den halben Polygon ∠ entweder nach der Tabelle (§. 103. oder nach §. 104. Z. 2.) hier 54°.

2) Trage dieſen auf C und D (§. 39.) und ziehe ſeine Schenkel CF und DF aus.

3) In F wo ſich dieſe durchkreutzen, iſt das Centrum und CF oder DF Radius zu einem Cirkel, in welchem ſich die gegebene Linie CD ſo oft herum tragen läßt, als das Vieleck Seiten bekommen ſoll. Diß thut man wirklich, hier 5mal,

4) und zieht die Sehnen AB, BC ꝛc. ꝛc. aus, ſo iſt das verlangte regulare Vieleck auf die gegebene Linie CD beſchrieben.

Beweiß.

Das über CD beſchriebene $\triangle$ wird immer gleichſchenklicht (§. 47.) und $\angle$ o immer = dem Centri $\angle$ des zu beſchreibenden Vielecks, dann

$$o + y + u = \frac{p}{2} \text{ (§. 60.)}$$
$$y + u = \frac{p}{2} - \frac{p}{n} \text{ (§. 104. Z. 2.)}$$

folglich (Ar. §. 63.) $o = \frac{p}{n}$ Das iſt o = dem Centri $\angle$ (§. 104. Z. 1.) Daher läßt ſich nun aus F ein Cirkel mit CF beſchreiben, welcher durch C und D gehet (§ 21. 3.) welchen CD in ſo viel gleiche Bogen theilet, als das Vieleck Seiten bekommen ſoll. Werden nun die Sehnen CD, BC ꝛc. ausgezogen, ſo muß CBAED ein regular Vieleck von den verlangten Seiten ſeyn (§. 104. Z. 1.) und es iſt über der gegebenen Linie CD beſchrieben.

Anmerkung.

Auch hieher paßt (§. 106. Anmerk.) Geometriſche Zeichnungen ſind hier zu weitläuftig und theils unmöglich anzuführen. Für genauere Ausübende Regeln ſoll die Trigonometrie ſorgen.

§. 111. T. IV. F. 79.

Um ein jedes gegebenes Vieleck einen Cirkel beſchreiben.

Auflöſung.

1) Man theile zwey unmittelbar auf einander folgende Winkel deſſelben A und B jeden in zwey

gleiche Theile, durch BC und AC (§. 45. 2.) Da nun u+y <180°, ſo werden ſich BC und AC in C ſchneiden (§. 56. Z. 3.)

2) Aus C beſchreibe man mit BC einen Cirkel, welcher der verlangte um das Vieleck zu beſchreibende Cirkel iſt.

Beweiß.

Da u=y=dem halben Polygon ∠ (§. 104. 2.) desgleichen o=m, n=p; aus dem nemlichen Grund, und BG=AB=AF (§. 24.) ſo iſt △ BCG = △ ABC = △ ACF (§. 43.) Daher GC = BC = AC = CF, und weil diß auch von den übrigen △ CEF, CDE und CDG eben ſo bewieſen werden kann, ſo iſt auch CF = CE = CD, folglich alle aus C in die Polygon ∠ ∠ gezogene gerade Linien Radii, und der Cirkel um das Vieleck beſchrieben (§. 26.)

§. 112. Tab. IV. F. 82.

Jedes verlangte regulare Vieleck um einen gegebenen Cirkel zu beſchreiben. Z. E. Ein Fünfeck.

Auflöſung.

1) Man beſchreibe ein regulares Vieleck von eben ſo viel Seiten in den Cirkel (§. 106.)

2) Ziehe aus deſſen Mittelpunkt C auf ſeine Seiten die Perpendickel CK, CM, CO, CQ, CH bis in die Peripherie des Cirkels.

3) Ferner in die Polygon $\angle\angle$ die Radios CB, CD, CE, CF, CA und verlängre ſie unbeſtimmt über die Peripherie hinaus.

4) Ziehe mit den Seiten des in den Cirkel beſchriebenen Vielecks, Parallelen, durch die Punkte K, M, O, Q, H, ſo giebt ſich das um den Cirkel beſchriebene verlangte Vieleck JLNPG.

Beweiß.

Wenn alle Seiten des Vielecks JLNPG Tangenten des Cirkels ſind, und alle ſeine Vielecks Winkel und Seiten einerley Gröſſe haben, ſo iſt es ein reguläres um den Cirkel beſchriebenes Vieleck. (§. 26.) Nun iſt

1) $\llcorner CSB = \llcorner CKL$, weil $BS \# KL$ (p. conſt.) und jeder $= 90°$ in dem $\llcorner CSB = 90°$ (per conſtr.) folglich KL Tangente des Cirkels (§. 86.) Da nun diß von allen übrigen Seiten eben ſo bewieſen werden kann, ſo müſſen auch alle Seiten Tangenten des Cirkels ſeyn. W. D. E. W.

2) Da $AB = AF$ (p. conſtr.) und $AS = \frac{AB}{2}$ auch $AR = \frac{AF}{2}$ (§. 78.) folglich $AS = AR$, $AC = AC$ (§. 21. 3.) $CS = CR$ (§. 81.) ſo iſt $\triangle CAS = \triangle CAR$ (§. 44.) folglich iſt

$$\begin{array}{l} \angle CAS = \angle CAR \text{ aber auch} \\ \quad\;\; \| \qquad\quad\;\; \| \\ \angle CJK = \angle CJH \text{ (§. 57. 3.) folglich} \\ \hline \angle CJK = \angle CJH \end{array}$$

Daher $\underbrace{\angle CAS + \angle CAR}_{\angle BAF}$, $\underbrace{\angle CJK + \angle CJH}_{\angle LJG}$ folglich

---

$\angle BAF = \angle LJG$

Da nun auf eben dieſe Art bewieſen wird, daß $\angle L = \angle B$, $\angle N = \angle D$ ꝛc. ꝛc. und die $\angle\angle$ A, B, D, E, F gleich ſind (p. conſtr.) ſo ſind auch die $\angle\angle$ J, L, N, P, G alle gleich. W. D. A. W.

3) Weil endlich $\angle CKJ = \angle CHJ$ (nach 1.) $\angle CJK = \angle CJH$ (nach 2.) und $CJ = CJ$ ſo iſt $\triangle CJK = \triangle CJH$ (§. 60. 3. 4. und §. 43.) folglich $JK = HJ$ und da aus den neml. Gründen $KL = GH$ ſo iſt auch $JL = JG$ (Ar. §. 63.) Nun läßt ſich der nemliche Beweiß bey allen übrigen Seiten anbringen, folglich ſind auch alle Seiten des um den Cirkel beſchriebenen Vielecks gleich. W. D. D. W.

Zuſatz.] Tab. IV. F. 82.

Sollte in ein gegebenes regulares Vieleck JLNPG ein Cirkel beſchrieben werden, ſo dörfte man nur zwo von ſeinen Seiten JL und JG halbiren und aus den Punkten K und H, die Perpendikul KC und HC aufrichten. Dieſe werden ſich in C ſchneiden, woraus mit dem Radius CK der verlangte Cirkel beſchrieben werden kann. Dann man beſchreibe um das gegebene Vieleck JLNPG einen Cirkel (§. 111.) ſo ſind JL und JG Sehnen und KC ſowohl als HC gehen durch das Centrum (§. 79.) Weil aber auch JL =

JG (p. hyp.) ſo iſt KC = HC (§. 81.) Eben ſo beweißt man, daß CK = CM = CO = CQ folglich berührt der mit KC beſchriebene innere Cirkel alle Seiten des gegebenen Vielecks. Er iſt folglich in dasſelbe beſchrieben. (§. 26.)

§. 113. Tab. III. F. 78.

Ein Quadrat um einen Cirkel zu beſchreiben.

Auflöſung.

Diß könnte zwar nach (§. 112.) geſchehen, allein folgende Methode iſt in dieſem Fall kürzer.

1) Man ziehe die beyden Diameter AC und BD rechtwinklicht.

2) Beſchreibe aus A, B, C und D in F, G, H und J Kreutzbögen mit dem Radius BE.

3) Ziehe JF, GF, GH und HJ aus, ſo iſt das □ um den Cirkel beſchrieben.

Beweiß.

AEBF = EBGC = CEDH = AEDJ ſind gleiche Quadrate (§. 95. Z. 3. und §. 96.) Und die ∠ ∠ bey A, B, C und D rechte ∟, folglich JF, GF, GH und JH Tangenten des Cirkels (§. 86.) auch JF = GF = GH = JH = 2 BE (p. conſtr.) und die ∠ ∠ F, G, H, J rechte ∟, daher iſt JFGH ein □ (§. 23.) und zwar um den Cirkel beſchrieben. (§. 26.)

§. 114.

Irregulare Vielecke, welche andern gegebenen irregularen Vielecken gleich und ähnlich ſind, zu zeichnen, es mögen nun a) Alle Seiten der Figur und alle

zugleich mögliche Diagonalen (§. 24.) oder b) Alle Seiten und ſo viel Winkel als Seiten ſind, weniger 3 gegeben ſeyn, lehrt (M. G. §. 116.) Die Beweiſſe gründen ſich auf (§. 21. 2. und §. 42. 43. 44.)

§. 115.

Eine Linie welche nach dem verjüngten Maasſtab eben ſo viel Ruthen, Schuhe, Zoll ꝛc. ꝛc. enthält, als eine andere Linie nach dem wirklichen Maas im Groſſen, nenne man eine verjüngt gleiche Linie. Eine Figur in Grund legen (oder einen Plan aufnehmen) heißt: Eine Figur im Kleinen zeichnen, welche einer andern im Groſſen gegebenen Figur ähnlich und verjüngt gleich iſt. Eine Figur vom Papier aufs Feld tragen (Einen Plan abſtecken) heißt: Eine Figur im Groſſen zeichnen, welche der im Kleinen gegebenen Figur ähnlich iſt, und deren ſämtliche Linien im groſſen Maas den verjüngten Linien gleichen.

In beyden Aufgaben ſind 3 Hauptfälle möglich: Dann man kann

1) Entweder in der ganzen Figur im Groſſen frey herum wandern, ohne daß das Aug, Füſſe oder Hände ein Hindernuß antreffen.

2) Oder man kann ſie nur aus 2 Endpunkten einer geraden Linie, die man meſſen kann, völlig überſehen.

3) Oder man kann bloß in dem ganzen Umkreiß der Figur frey herum gehen und alle Seiten und ∠∠ der Figur meſſen.

Alle dieſe Fälle laſſen ſich

a) Sowohl ohne Inſtrumenten, das iſt:

1) Blos durch Hülfe der Ruthe und Stäbe,

2) Durch Ruthe, Stäbe und Winkelkreutz,

b) Als auch mit Inſtrumenten, folglich mit

1) Dem Meßtiſchgen,

2) Aſtrolab,

3) Der Bouſſole oder Magnetnadel auflöſen.

Die Methoden giebt M. G. §. 117 bis §. 123 ſehr deutlich an. Man bemerke in Rückſicht auf das Ausübende: Daß

I. Nro. a. 1. Die richtigſte aber mühſamſte Methode.

II. Nro. a. 2. Etwas ſchneller und bequemer, doch ſchon mehrern Fehlern unterworfen iſt. (§. 74. Anmerk.)

III. Nro. b. 1. Weit ſchneller als Nro. a. die Aufgaben auflößt, und weil ſich die Zeichnung während der Arbeit ſelbſt giebt, an ſich ſehr bequem iſt, aber auch, nicht nur wegen (§. 74. Anmerk.) ſondern auch, wegen dem Einfluß der Witterung auf das Papier und Tiſchgen, viele, oft unvermeidliche Fehler veranlaſſet.

IV. Nro. b. 2. Iſt die ſchnelleſte Methode, die ſich, mit einem guten Inſtrument, bey guter und ſchlechter Witterung ausüben läßt, aber auch wegen dem Meſſen und Abtragen der ∠∠, folglich den Unrichtigkeiten des Aſtrolabs und

Tranſporteurs, auch (§. 74. Anmerk.) die meiſten Fehler veranlaſſet, welche nur die Trigonometrie beträchtlich vermindert.

V. Nro. b. 3. Iſt, wenn man nicht eine ſehr gute Magnetnadel hat und täglich ihre Abweichung von der Mittagslinie beobachtet, die ungewiſſeſte Methode. Wovon, ſo viel in der reinen Mathematik erklärt werden kann, hiſtoriſch, mündlich das Mehrere, ſo wie auch vom 2ten Fall, wenn man die Figur nicht ganz aber doch vieles von ihr überſehen kann.

§. 116.

Die Beweiſe von allen dieſen Aufgaben, gründen ſich auf (§. 21. 7.) und §. 64. 65. 66. 67. 68. woraus folgender allgemeiner Lehrſatz zum Beweiß derſelbigen fließt:

Wenn zwo Figuren T. IV. F. 83. ABCDE und GHJKL einander ähnlich ſind, folglich AB : AE = GH : GL, AB : BC = GH : HJ ꝛc. ꝛc. ſo ziehe man nach Belieben aus 2 ∠ ∠ A und E, zwo Linien AF und EF, ſo, daß ſie ſich in F ſchneiden, mache ∠ x = ∠ o dem ∠ u = ∠ y und ziehe aus G und L, GM und ML welche ſich in M ſchneiden werden, ſo heiſſen die beyden Punkte F und M ähnlich liegende Punkte. Nun ziehe man aus dieſen nach allen übrigen ∠ ∠ der Figuren gerade Linien BF, CF, DF, HM, JM, KM, ſo entſtehen in beyden Figuren lauter ähnliche △ △.

Beweiß.

$\triangle AEF \backsim \triangle GML$ (§. 65.)

I. $AE : AF = GL : GM$ und da

II $AE : AB = GL : GH$ (p. hyp.) ſo iſt (Ar. § 217.)

I. $AE : GL = AF : GM$

II. $AE : GL = AB : GH$ folglich (Ar. §. 217.)

$AF : GM = AB : GH$

weil der $m + o = n + x$ (p. hyp.)

und $o = x$ (p. conſtr.) ſo iſt (Ar. §. 63.)

$m = n$

Daher $\triangle ABF \backsim \triangle GHM$ (§. 67.)

Diß folgte aus der Aehnlichkeit der △ △ AEF und GML und eben ſo ſchließt man aus der Aehnlichkeit der △ △ ABF und GHM die Aehnlichkeit der ihnen nächſt anliegenden △ △ BFC und HMJ; aus dieſen, daß △ CDF ∽ △ JKM, aus dieſen, daß △ DEF ∽ △ KML.

Zuſätze.

1) Das Punkt F wurde nach Belieben angenommen. Man kann es alſo auch in einem ∠ F der Figur ABCDF (T. IV. F. 84.) annehmen, ſo wird es in der andern Figur GHJKM in den Scheitel des ∠ M = ∠ F fallen. Alsdann werden zwey Paare von den gezogenen Linien AF, DF, GM, KM Seiten und die übrigen BF, CF, HM und JM Diagonalen der Figuren. Aehnliche Figuren werden alſo durch ihre Diagonalen in ähnliche △ △ zerlegt.

2) Soll nun auf eine gegebene Linie MK eine Figur gezeichnet werden, welche einer andern gegebnen Figur ABCDF ähnlich iſt, ſo zerlege man die gegebne Figur ABCDF durch Diagonalen in △△ und ſetze auf MK ein △ MKJ, welches dem △ CDF ähnlich iſt und ſo alle übrige ähnliche △△ in einerley Ordnung auf einander.

3) Wenn T. IV. F. 85. GHJKL ∽ ABCDE und F auf F auch GF auf AF und FL auf EF gelegt wird, ſo wird auch FH auf BF, FJ auf CF und FK auf DF fallen, und JK # CD; KL # DE, kurz, jede Seite der kleinen Figur # jeder gleichnamigten Seite der gröſſern Figur ſeyn, indem $x = y$ (p. hyp.) folglich JK # CD (§. 58. 3.) Und wenn in CF durch einen beliebig angenommenen Punkt J, JK # CD; durch K, KL # DE ꝛc. ꝛc. gezogen wird, ſo muß die innre Figur der äuſſern ähnlich ſeyn, da $x = y$ und $o = u$ (§. 57. 3.) folglich △ FJK ∽ △ CDF (§. 65.) und da dis auf die nemliche Art von allen übrigen △△ der kleinen und groſſen Figur bewieſen werden kann, ſo iſt auch GHJKL ∽ ABCDE. (§. 21. 7. und §. 64.)

§. 117. Tab. IV. F. 82.

Jedes in einen Cirkel beſchriebene Vieleck iſt kleiner als der Cirkel; jedes um einen Cirkel beſchriebene Vieleck gröſſer als derſelbige, ſo wie der Umkreis des erſtern $< p$ und der Umkreis des andern $> p$ iſt.

Beweiß.

1) Dann das ganze Vieleck fällt innerhalb den Cirkel (§. 26.) und iſt folglich nur einem Theil deſſelbigen gleich (§. 27. 1.) alſo auch kleiner als der Cirkel (Ar. §. 61.) W. D. E. W.

2) Iſt das Vieleck um den Cirkel beſchrieben, ſo fallen ſeine Seiten als Tangenten, ganz auſſer dem Cirkel (§. 26 und 20.) Daher iſt der Cirkel nur einem Theil des Vielecks gleich (§. 27. 1.) folglich kleiner als das Vieleck (Ar. §. 61.) und nothwendig das Vieleck gröſſer als der Cirkel. W. D. A. W.

3) Da $AB < \alpha AB$, $BD < \alpha BD$ ꝛc. ꝛc. (§. 53.) ſo iſt auch $AB + BD + DE + EF + AF =$ dem Umkreis des Vielecks $< \alpha AB + \alpha BD + \alpha ED + \alpha EF + \alpha AF = p$. W. D. D. W.

4) Geſetzt das Vieleck habe unendlich viele Seiten, ſo iſt der αAK unendlich klein, folglich von einer geraden Linie unendlich wenig verſchieden (§. 5. Z. 2.) Nun iſt JK Tangente (§. 26.) folglich der $\angle JKA <$ als alle denkbare $\angle\angle$ (§. 85. Z. 1.) hingegen der $\angle AKC = \angle KAC$ (§. 47.) $>$ als alle mögliche ſpitzige geradlinichte $\angle$ (§. 85. Z. 1.) daher der $\angle JAK$ zwar ſtumpf (§. 40.) aber doch einem $\llcorner$ äuſſerſt nahe, folglich iſt gewiß der $\angle JAK > AJK$ (§. 54. und §. 55.) Nothwendig iſt daher in dem unendlich kleinen $\triangle AJK$ die Seite $JK > AK$ und eben ſo $KL > BK$.

folglich die Tangente JL, oder die Seite des um den Cirkel beſchriebenen Vielecks > α AB. Diß kann von allen Seiten des um den Cirkel beſchriebenen Vielecks eben ſo bewieſen werden, folglich iſt auch die Summe derſelben, oder der Umkreiß des um den Cirkel beſchriebenen Vielecks > als p des nemlichen Cirkels. W. Z. B. W.

§. 118. Tab. I. F. 12.

Aus der gegebenen Sehne EF eines α FHE und dem Radius CF, die Sehne FH des halben α FH finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man ziehe vom Quadrat des Radius das Quadrat der halben Sehne ab, ſo iſt $CF^2 - FJ^2 = CJ^2$ und $\sqrt{CF^2 - FJ^2} = CJ$ (§. 100.)

2) Daher zieht man aus dem Reſt Nro. 1. die $\sqrt{}$ (A. §. 168. u. 169.) um CJ zu erhalten, ſubtrahirt aber auch diß CJ vom Radius, ſo findt ſich JH weil

$$CF = CH \text{ (§. 21. 3.)}$$
$$CJ = CJ$$

$$\text{Daher } CF - CJ = \underbrace{CH - CJ}_{\begin{array}{c}\|\\ JH\end{array}}$$

$$\text{folglich } CF - CJ = JH$$

3) Man addire das □ der halben Sehne zum □ von JH und ziehe die $\sqrt{}$ aus, ſo iſt dieſe = FH

denn $FJ^2 + HJ^2 = FH^2$ (§. 100.) Daher

$$\sqrt{FJ^2 + HJ^2} = FH.$$

folglich die verlangte Sehne des halben α FH gefunden.

Anmerkung.

Da ſich auf die Erfindung von JH aus den obigen gegebenen Stücken, die Methode, groſſe Cirkel im Feld zu beſchreiben, gründet (M. G. §. 66.) ſo liegt auch in dieſem §. der Beweiß für die dort angegebene Auflöſung.

§. 119. Tab. IV. F. 82.

Aus der Seite des in einem Cirkel beſchriebenen regularen Vielecks, die Seite, des um den nemlichen Cirkel beſchriebenen regularen Vielecks zu finden.

Auflöſung.

1) Man ſuche das Centrum des Cirkels (§. 80. 4.) und ziehe CK ſenkrecht auf AB.

2) Suche CS und SK (§. 118.)

3) Spreche CS : AS = CK : JK und nun iſt JK × 2 = JL = der geſuchten Seite des um den Cirkel beſchriebenen Vielecks.

Beweiß.

$\angle y = y$ und $\llcorner$ ASC = $\llcorner$ JKC (§. 78. 3. und (§. 112.) folglich iſt $\triangle$ ACS $\backsim$ $\triangle$ CJK (§. 65.) folglich CS : AS = CK : JK; da aber auch $\triangle$ CJK =

△ CKL (§. 112.) ſo iſt JK = KL daher 2 JK = JK + KL = JL.

§. 120.

Der Diameter eines Cirkels verhält ſich beynahe zur Peripherie = 100 : 314. oder d : p = 100 : 314.

1) Dann man ſuche durch fortgeſetztes Halbiren, aus der Seite des in den Cirkel beſchriebenen □, die Seite des in den nemlichen Cirkel beſchriebenen 1, 073, 741, 824 Ecks (§. 107. und 118.) Wird nun der Diameter 1 oder in Decimalbrüchen 1. 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, angenommen, ſo iſt dieſe geſuchte der wahren erſtaunend nahe kommende Seite = 0. 000, 000, 000, 585, 167, 231, 706, 863, 871 22. Ferner ſuche

2) man aus dieſer gefundnen Seite, die Seite des dem innern ähnlichen um den Cirkel beſchriebenen Vielecks (§. 119.) Dieſe wird beynahe 0. 000, 000, 000, 585, 167, 231, 706, 863, 873, 784 ſeyn.

3) Man multiplicire jede gefundene Seite mit der Zahl der Seiten des Vielecks (Nro. 1.) um den Umkreiß, ſowohl des in, als des um den Cirkel beſchriebenen Vielecks, zu erhalten. So iſt der erſte = 6. 28, 318, 530, 717, 958, 645, 093

u. der 2te = 6. 28, 318, 530, 717, 958, 649, 156, 537 jener etwas kleiner als die Peripherie des Cirkels, dieſer etwas gröſſer (§. 117.) Daher muß die Peripherie mittlere arithmetiſche Proportionale zwiſchen dieſen beyden Zahlen ſeyn (Ar. §. 209. Z 3.)

	6.28,318,530,717,958,645,093,000
	6.28,318,530,717,958,649,156,537
2:	12.56,637,061,435,917,294,249,537

folglich iſt 6.28,318,530,717,958 647,124,768 beynahe die wahre Peripherie, des, in 100 000 Trillionſtel getheilten Radius, oder des in 200 000 Trillionſtel getheilten Diameters. Daher verhält ſich d : p beynahe wie

2.00, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 zu 6.28, 318, 530, 717, 958, 647, 124, 768 oder wenn man mit 2 dividirt wie

1. 00, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, zu 3. 14, 159, 265, 358, 979, 323, 562, 384

Oder wenn von dieſen beyden Zahlen nur die 3 höchſten Ziffern genommen werden, ſo iſt d : p = 100 : 314.

Zuſätze.

1) Diß letzte Verhältnuß iſt hinreichend, wenn man die Peripherie nur in 100 Theilen des Diameters ſucht. Kommen Umſtände vor, welche eine gröſſere Genauigkeit z. E. die Peripherie in 1000tel, 10000 ꝛc. verlangen, ſo darf man nur die 4, 5, 6 ꝛc. ꝛc. erſte Zahlen, von beyden Gliedern des gefundenen groſſen Verhältnuſſes, nehmen. Z. E. d : p = 10000 : 31415.

2) Wär d = 113 ſo würde p = 355 beynahe ſeyn, dann 10000 : 31415 = 113 : 354, 9895. Diß von Adrian Metius erfundene Verhältnuß,

iſt in kleinen Zahlen das allergenaueſte. Denn wenn man an 355 ſieben Nullen hängt und mit 113 dividirt, ſo zeigt ſich, daß es von dem Ceuliſchen kaum um 3 Zehenmillionſtel abweichet.

Anmerkung.

Dieſe beſchwerliche Methode diß Verhältnuß zu erfinden, kürzte Huygens gewaltig ab, allein ſein Verfahren ſetzt Sätze voraus, welche hier nicht eingerückt werden konnten. Doch hat ſchon vor ihm Ludolph von Ceulen ähnliche Abkürzungen angegeben und ausgeübet, ja die Peripherie bis auf 35 Decimalſtellen oder in Quintillionſtel des Radius berechnet. Nach ihm iſt d : p wie 1.00, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 zu 3. 14, 159, 265, 358, 979, 323, 846, 264, 338, 327, 950, 288, wobey er bewieſen: Daß die wahre Peripherie zwar noch etwas gröſſer, als ſie hier angegeben wird, aber doch kleiner als dieſe Zahl iſt, ſobald die letzte Ziffer in 1 verwandelt wird. Am allerweiteſten gieng Machin und Lagny, welche die Peripherie, der erſte bis auf 100, der letzte bis auf 127 Decimalſtellen ſuchte, welche letztere Euler Comm. Petrop. T. IX. p. 227. in ſeiner Abhandlung: De variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi, liefert, aber ſelbſt p. 223. geſteht, daß Lagny einen noch verborgenen Kunſtgriff dazu gebraucht habe. Die Rechnung des Unendlichen geht freylich den allerkürzſten und genaueſten Weg, findet aber hier keine Statt und ſetzt ſelbſt dieſe Gründe voraus. Ja wir werden ſchon in der Trigonometrie den Beweiß ungleich kürzer geben. Für die Ausübung hat Ceulen mehr gethan als nöthig iſt, denn es wird ſchwerlich ein Fall vorkommen, wo es bey Beſtimmung von p auf kleinere Theile als Quintillionſtel ankäme. Was Archimed, Ptolemäus und Vieta hierinnen geleiſtet und ihre, nebſt Huygens Uebereinſtimmung mit dem Ceuliſchen Verhältnuß, davon mündlich.

Siebendter Abſchnitt.

Ausrechnung, Vergleichung, Verwandlung und Theilung der Figuren.

§. 121. Tab. IV. F. 86.

Wenn ſich in einem □ AC beyde Seiten mit einerley Maas AE = AG ausmeſſen laſſen, ſo verhält ſich, wenn AB und AD als Zahlen angeſehn werden, deren Einheit = AE; $AE^2 : AB \times AD = 1 : AB \times AD$.

Beweiß.

AE^2 kann ſo oft auf AD geſetzt werden, als ſeine Seite AE = AG in AD enthalten iſt, und giebt folglich eine Reihe an AD anliegender □te 1, 2, 3, 4, 5, 6. Jngleichem können auf AB eben ſo viel, den erſten gleiche □te, 1, 7, 13 hintereinander ſtehen, als AE in AB enthalten iſt. Alſo wird die Reihe der □te I, auf AB ſo oft geſetzt werden können, als AE in AB ſteckt, und man erhält die Reihe II. und III. Daher beſtimmt AD als Zahl betrachtet, wie viel Quadrate in der Reihe I liegen, AB hingegen, wie viel ſolcher Reihen möglich ſind und folglich AB × AD die Menge aller □te zuſammen (Ar. §. 50. Z. 1.) folglich iſt

$$AE^2 : AB \times AD = 1 : AB \times AD$$

§. 122.

Quadratruthen, Schuhe, Zolle, Linien ꝛc. ꝛc. ſind □te, deren Seiten, eine Ruthe, Schu, Zoll ꝛc. ꝛc.

iſt. Sie werden wie (§. 28.) das Längenmaas gezeichnet, nur hängt man, wenn Zweydeutigkeit zu beſorgen wäre, hinter die Signaturen ein q an. Z. E. $238^{\circ q}$. Und die Summe dieſer Quadratruthen ꝛc. welche auf einmal auf einer Fläche liegen können, heißt ihr Innhalt.

§. 123. Tab. IV. F. 86.

Aus dieſen beyden vorhergehenden §§. folgt: Daß

1) Wenn AE^2 für den Maasſtab der Fläche AC angenommen wird, der Inhalt des ▭ durch die Multiplikation ſeiner Grundlinie mit ſeiner Höhe gefunden werde. Nennt man daher die Grundlinie b, die Höhe a, ſo iſt der Innhalt aller ▭ = ab (§. 122.)

2) Im □ iſt $a = b$ (§. 23.) folglich ſein Innhalt a^2.

3) Wenn ſich, T. IV. F. 86. und F. 87. die Seiten zweyer ▭ AC und GH mit einerley Längenmaas meſſen laſſen, ſo verhält ſich

$$\square AC : \square GH = AB \times AD : GJ \times GK$$

Da nun dieſes Verhältnuß aus den beyden Verhältnuſſen

$$\left.\begin{matrix} AB : GJ \\ \text{und } AD : GK \end{matrix}\right\}$$ entſteht, wenn die beyde vorhergehende und die beyde nachfolgende Glieder in einander multiplieirt werden, ſo ſtehen die Rektangel AC und GH in einem zuſammengeſetzten Verhältnuß ihrer Grundlinien und Hö-

hen (Ar. §. 206.) folglich auch die △ △ als ihre Hälften (§. 96. Z. 2.)

4) Und da alle gerade Linien ſich durch ein gemeinſchafftliches Maas ſo genau meſſen laſſen, daß der etwa mögliche Fehler verſchwindet (§. 73.) ſo gelten §. 121, 122 und 123. von allen möglichen □ und □ten.

§. 124.

Was Quadrat Meilen und Stunden ſind, fließt aus §. 122. und dieſe mögen gröſſeres, ſo wie die □ Ruthen ꝛc. kleineres Quadratmaas heiſſen. Mehrere Arten des gröſſern □ Maaſes ſiehe (M. G. §. 92.) Auch hier findet die Eintheilung in Decimal- und gemeines Quadratmaas, wie beym Längenmaas §. 28. ſtatt, je nachdem die Seite des □ nach Decimal- oder gemeinem Maas gemeſſen wird. Eben ſo wird man im gemeinen Maas 16, 12, 6, ſchuiges □ Maas erhalten. Folglich hat die Quadratruthe im Decimalmaas 100′, der Schu 100″ ꝛc. ꝛc. hingegen im 16 ſchuigen Maas 256′, im 12ſchuigen 144′, im 6ſchuigen 36′. Ingleichem hat in dieſen 3 Arten des gemeinen Maaſes der Schu immer 144″ der Zoll 144‴ die Linie 144^{IV} ꝛc. ꝛc. nur im franzöſiſchen Maas wird die Linie 100^{IV} enthalten.

§. 125.

Es verhalten ſich alſo auch die verſchiedene □ Schue wie die □te ihrer §. 29. angegebenen Längen-

ſchue. Und der Geometer bedient ſich in der Ausübung des nemlichen §. 30. angegebenen Vortheils, um immer mit dem bequemen Decimalmaas zu arbeiten.

§. 126.

Alle hieher gehörige Regeln zum Rechnen mit Decimal □ Maas ſiehe M. G. §. 93. und 94. Hier gründen ſich

1) Gröſſere Sorten in kleinere
2) Kleinere : : : : gröſſere
3) Verſchiedene : : eine
} zu verwandeln auf §. 124. und Ar. §. 121. Nro. 3.)

4) Addition und
5) Subtraktion
} verändern auch hier das Maas nicht.

6) Multiplikation und Diviſion

a. Wenn ein Faktor, oder der Diviſor, eine unbenannte Zahl iſt, geben gleichfalls im Produkt und Quotienten das vorige Maas.

b. Hingegen giebt Länge mit Länge multiplicirt Quadratmaas (§. 123.) Z. E. $l \times l = q$

c. Folglich $\frac{q}{l} = l$, oder Quadratmaas mit Längenmaas dividirt, giebt Längenmaas.

7) Und da $\sqrt{a^2} = a$, ſo iſt auch die $\sqrt{}$ aus Quadratmaas Längenmaas.

Hingegen wird das gemeine □ Maas, nach (Ar. §. 109. und f.) behandelt. Von dem an einigen Orten noch üblichen Riemmaas ſiehe (M. G. §. 96.) Von der Ausübung mündlich ſo viel nöthig iſt.

§. 127.

Auch hier fließt aus §. 124, 125 und 126. folgende Tabelle:

I. Verhältnuſſe der 4 uns wichtigſten Quadratruthen ꝛc. ꝛc.			
Decim. Ruthe	16ſchuige R.	12ſchuige R.	6ſchuige R.
1°	1°	1°	1°
100′	256′	144′	36′
10000″	36864″	20736″	5184″
1000000‴	5308416‴	2985984‴	746496‴
100000000⁗	764411904⁗	429981696⁗	74649600⁗
II. Verhältnuß der uns wichtigſten Quadratſchue in Decimaltheilen.			
Des Pariſer oder königl. Franzöſiſchen.	Des Londner.	Des Rheinländiſchen.	Des Zuriachiſchen Unterl. Schu.
207360000	182655225	193571569	154107397

Zuſätze.

1) Alle §. 32. gemachte Folgerungen paſſen auch hieher.

2) Auf eine ähnliche Art iſt die Tabelle M. G. §. 96. zur Verwandlung gröſſerer Quadratmaaſe z. E. Morgen, berechnet und ihre Anwendung kommt mit der §. 32. gelehrten überein.

§. 128. Tab. IV. F. 86.

Den Innhalt eines jeden Parallelogramms zu finden.

Auflöſung.

Man multiplicire die Grundlinie z. E. AD mit der wahren Höhe z. E. AB, ſo iſt das Produkt der Innhalt, oder ab iſt die allgemeine Formel für den Innhalt aller Parallelogramme.

Beweiß.

Der Innhalt aller Rektangel iſt ab (§. 123. 1.) Nun iſt jeder Rhombus, jeder Rhomboide, einem ▭ gleich, ſobald ſie gleiche Grundlinien und Höhen haben (§. 96.) folglich kann der Innhalt der ihnen gleichen ▭ für ihren Innhalt ſubſtituirt werden, und da im □ a = b ſo iſt auch $a^2 = ab$ (§. 123. 2.) folglich die Allgemeinheit der Formel ab für alle Parallelogramme bewieſen.

Anmerkung.

Wirkliche Ausrechnung aller Parallelogramme ſiehe (M. G. §. 124.) welche hier allgemein bewieſen wurde. Anwendung der Berechnung des Rektangels auf die Aufgabe: Die Anzahl der Klaffter in einem Holzſtoß zu finden.

Zuſätze. T. III. F. 73.

1) Jeder △ FGJ iſt = ▭ $\frac{FK}{2}$, wenn ſie gleiche Grundlinien und Höhen haben (§. 96. Z. 2.) Nun iſt ▭ FK = ab folglich der Innhalt des △ FGJ = $\frac{ab}{2} = a \times \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \times b$ (Ar. §. 137.) Wann iſt jede dieſer 3 Formeln zur Berechnung eines △ die bequemſte?

2) Da der $\triangle = \frac{ab}{2}$, ſo iſt auch $\frac{a}{2} : \frac{ab}{2} = b$ und $\frac{b}{2} : \frac{ab}{2} = a$.

3) Nach §. 101 und 102. kann aus den 3 Seiten des $\triangle$ immer ſeine Höhe, folglich auch ſein Innhalt gefunden werden.

4) Im gleichſchenklichten $\triangle$ Tab. I. F. 17. iſt $AC^2 = AD^2 + CD^2$ wenn CD Höhe deſſelbigen iſt (§. 100.) folglich auch $\sqrt{AC^2 - AD^2} = CD$. Daher kann in demſelben, aus der halben Grundlinie und der Seite, ſeine Höhe durch Rechnung gefunden werden.

Anmerkung.

Auf dieſen 4 Zuſätzen beruht der Beweiß des (§. 125. der M. G.) die letzte p. 123. mit * bezeichnete Methode ausgenommen, welche aus denen bisher vorgetragenen Gründen zu beweiſen, zu weitläuftig fiele, daher im 3ten Zuſatz eine andere Methode vorgeſchlagen worden. Den Beweiß der letztern gab ich aus Eulern, in meinem Programm: Einige geometriſche Sätze, Carlsruhe 1780. vollſtändig. Es ſeyen die 3 Seiten = 100 Zoll; 80 Zoll; 60 Zoll; ſo iſt der Innhalt des $\triangle$ = 24 Schue 00 Zoll.

§. 129. Tab. I. F. 27.

Den Innhalt eines jeden Parallel-Trapez AEBD zu finden.

Aufloͤſung.

1) Man addire die parallele Seiten AD und BE.

2) Multiplicire ſie mit der zwiſchen ihnen liegenden Perpendikulare BF.

3) Halbire das Produkt, ſo hat man ſeinen Innhalt.

Beweiß.

Es ſeye AC, die Baſis des ▱ AB = b, die Grundlinie des △ BCD, CD = c, ſo iſt AD = b + c und die 2te Parallele BE = AC = b; auch EG = BF (§. 61. und §. 62.) als Höhe des ▱ und △ = a, ſo iſt nach obigen Regeln $\frac{(2b+c)a}{2}$ der wahre Innhalt. Dann

▱ AB = ab }
△ BCD = $\frac{ac}{2}$ } §. 128.
Daher (Ar. §. 63.)

▱ AB + △ BCD = $ab + \frac{ac}{2}$ weil aber
‖ ‖
⏢ AEBD $\frac{(2b+c)a}{2}$ (§. 99.)

⏢ AEBD = $\frac{(2b+c)a}{2}$ und da
‖
nach der Benennung $\frac{(AD+BE)BF}{2}$ ſo iſt auch

⏢ AEBD = $\frac{(AE+BE)BF}{2}$

und hierauf beruhet (§. 126. M. G. Erſter Fall.)

§. 130. Tab. I. F. 26.

Jedes gemeine Trapez ABCD zu berechnen.

Aufloͤſung und Beweiß.

1) Man ziehe eine geſchickte Diagonale BD, d. i. ſo, daß ſie, wo moͤglich, ohne Verlaͤngerung, gemeinſchafftliche Grundlinie der beyden △ △ ABD und BDC wird, ſie ſeye = b.

2) Die Hoͤhe des △ ABD oder AE ſey = a, die Hoͤhe des △ BCD oder CF = c ſo iſt

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABD = \frac{ab}{2} \\ \triangle BCD = \frac{bc}{2}\end{array}\right\}$$ §. 128. Z. 1. daher Ar. §. 63.)

$$\triangle ABD + \triangle BCD = \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} = \frac{(a+c)\,b}{2}$$ Da aber

△ABD + △BCD = ⏢ABCD ſo iſt

$$⏢ABCD = \frac{(a+c)\,b}{2} = \frac{(AE+CF)\times BD}{2}$$

Und hierauf beruhet (M. G. §. 126. Zweyter Fall.)

§. 131. Tab. VI. F. 84.

Den Innhalt eines jeden geradlinichten Vielecks zu finden.

Aufloͤſung und Beweiß.

1) Es mag in Grund gelegt ſeyn (§. 115.) oder nicht, ſo zerlege man es durch Diagonalen in Trapeze und Triangel.

2) Rechne dieſe einzeln aus (§. 128. Z. 1. und §. 130.)

3) Addire ihre Innhalte zuſammen (Ar. §. 111.) ſo iſt die Summe der verlangte Innhalt (Ar. §. 61.)

Anmerkung.

Hierauf gründet ſich (M. G. §. 127. erſte Methode) Die 2te Methode, wird aus §. 129. erwieſen, wovon mündlich.

Zuſätze.

1) Hier iſt bey der Ausrechnung im Felde §. 128. Z. 3. von groſſer Bequemlichkeit, wenn man ſehr im Wurzelausziehen geübt iſt, oder die Ludolphiſchen Tafeln (Ar. §. 304. d.) bey Handen hat.

2) Wär die Figur krummlinicht, ſo beſteht ſie im Grunde aus unendlich vielen unendlich kleinen geraden Linien (§. 5. 2.) kann folglich in △ △ zerlegt und wie eine geradlinichte berechnet werden, welches der Grund von (M. G. §. 133.) iſt.

Anmerkung.

Alſo iſt die höhere Geometrie ein überflüſſiges Plagewerk — Man hüte ſich, dieſen ſehr lächerlichen Schluß eines ſehr unplatoniſchen Profeſſors zu machen. Seine Schwäche erhellt aus (A. §. 21.)

§. 132. Tab. IV. F. 79.

Den Innhalt eines jeden regularen Vielecks zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man ſuche das Centrum deſſelbigen (§. 111.)

2) Ziehe aus dieſem auf eine Seite EF die ſenkrechte Linie CH (§. 45. 5.) ſo iſt $EH = \frac{EF}{2} = \frac{b}{2}$ und $CH = a$ (§. 78. III. und §. 128. Z. 1.)

3) Folglich iſt $\triangle ECF = \frac{ab}{2}$. Nun iſt die Anzahl dieſer $\triangle\triangle$ im Vieleck, welche ſich alle gleichen $= n$ (§. 103. Z. 3.)

4) Folglich der Inhalt des ganzen regularen Vielecks $= \frac{abn}{2} = \frac{ab}{2} \times n = ab \times \frac{n}{2} = a \times \frac{bn}{2}$ $= \frac{a}{2} \times bn = an \times \frac{b}{2}$.

Zuſätze.

1) Jeder Cirkel T.IV. F. 88. iſt ein regulares Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten (§. 5. 2. und §. 24.) in welchem $a = r$ und $bn = p$, folglich ſein Innhalt $= \frac{pr}{2} = p \times \frac{r}{2}$ Wenn alſo p für b eines $\triangle$ ABC und r für a des nemlichen $\triangle$ geſetzet wird, ſo iſt jeder Cirkel einem $\triangle$ gleich, deſſen Grundlinie p und deſſen Höhe r gleichet. Und da $r = \frac{d}{2}$ aber auch $\frac{r}{2}$ $= \frac{d}{4}$ (Ar. §. 63.) ſo iſt auch $\frac{pr}{2} = \frac{pd}{4}$ oder jedes Cirkels Innhalt $= \frac{pd}{4}$.

Anmerkung.

Dieſen Beweiß erfand der groſſe Kepler. Cavallieri ahmte ihn nach und wandte ihn auf andere Sätze, obſchon

nicht mit gleichem Glück an, woraus ſeine Methode des Untheilbaren (Methodus indiviſibilium) entſtanden, wovon theils in der Stereometrie, theils in der Geſchichte der Geometrie ein Mehreres.

2) Folglich iſt T. I. F. 13. jeder Sektor BEF $= \frac{\alpha r}{2}$; oder einem △ gleich, deſſen Grundlinie $= \alpha$ und deſſen Höhe $= r$.

§. 133. Tab. IV. F. 89.

Gleiche Parallelogramme von gleichen Höhen, verhalten ſich wie ihre Grundlinien und umgekehrt.

Beweiß.

$\square CD : \square EF = AB : ab$ (§. 128.)

I. $\square CD : \square EF = B : b$

Ferner iſt T. IV. F. 90. $\square CD : \square EF = AB : ab$

II. $\square CD : \square EF = A : a$ Dann $B = b$. p. hyp. auch $A = a$. p. hyp. und Ar. §. 217. und §. 128.

Zuſätze.

1) Folglich verhalten ſich auch gleiche △ △ von gleichen Höhen, wie ihre Grundlinien, und umgekehrt (§. 96. 2.)

2) Zwey Sektoren von gleichen Radiis, aber ungleichen Bögen, verhalten ſich wie ihre Bögen. Z. E. $\frac{\alpha R}{2} : \frac{\alpha r}{2} = S : s$

$$\frac{S : s = \alpha R : \alpha r \text{ und } R = r}{S : s = \alpha : \alpha \quad (\text{Ar. §. 217.})}$$

(§. 132. Zuſ. 2.)

§. 134. Tab. IV. F. 91.

Wenn zwey Parallelogramme CD und EF gleich ſind, ſo verhält ſich die Grundlinie des erſten zur Grundlinie des andern, wie die Höhe des andern zur Höhe des erſten (ſunt in ratione reciproca baſium & altitudinum) und umgekehrt, ſie mögen gleiche oder ungleiche Grundlinien und Höhen haben.

Beweiß.

$$\frac{\square CD = \square EF \text{ p. hyp. folglich}}{AB = ab \text{ Daher } (\text{Ar. §. 216. 3.})}$$

$$\overline{B:b = a : A \quad \text{W. Z. E. W.}}$$

$$\frac{\text{Und wenn } B:b = a : A \text{ ſo iſt } (\text{Ar. §. 216. 3.})}{\frac{AB = ab \text{ oder}}{\square CD = \square EF}}$$

Zuſätze.

1) Folglich gilt obiger Satz auch von allen △△ (§. 96. 2.) und hierauf gründet ſich M. G. §. 100 und 101.

2) Wenn T. IV. F. 92. in 2 gleichen △△ CDE und GFK der ∠x = ∠y ſo iſt auch

B : b = FG : DE. Denn

$\triangle$DEH ∽ $\triangle$FGJ Da x = y u. o = u (p. hyp. & §. 65.)

A : a = GF : DE

|| = B : b Daher (Ar. §. 203.)

B : b = GF : DE

Und hieraus wird M. G. §. 101. Nro. 2. erwieſen.

§. 135.

Aehnliche $\triangle$ $\triangle$ verhalten ſich wie die Quadrate ihrer gleichnamigten Seiten, ingleichem wie die Quadrate ihrer Höhen. T. IV. Fig. 93.

Beweiß.

Der $\triangle$ CEF ∽ $\triangle$ GJK (p. hyp.) folglich x = y und da u = o (§. 24.) ſo iſt auch $\triangle$EDF ∽ $\triangle$JKH (§. 65.) folglich

CF : GK = EF : JK

ED : JH = || Daher (Ar. §. 203.)

CF : GK = ED : JH oder nach der Figur

B : b = A : a oder

$$\frac{B}{b} = \frac{A}{a} \text{ und } \times \frac{B}{b} \quad (\text{Ar. §. 63.})$$

$$\frac{B^2}{b^2} = \frac{AB}{ab} \text{ folglich auch}$$

$B^2 : b^2 = AB : ab$ und : 2 (Ar. §. 63.)

$B^2 : b^2 = \frac{AB}{2} : \frac{ab}{2} = \triangle CEF : \triangle GJK$

(§. 128. Z. 1.) W. D. E. W.

Da ferner $\frac{B}{b} = \frac{A}{a}$ ſo iſt $\times \frac{A}{a}$ (Ar. §. 63.)

$$\frac{AB}{ab} = \frac{A^2}{a^2}$$ folglich auch

$$AB : ab = A^2 : a^2$$ und : 2 (Ar. §. 63.)

$$\frac{AB}{2} : \frac{ab}{2} = A^2 : a^2 \text{ oder } A^2 : a^2 = \triangle CEF : \triangle GJK.$$

Zuſatz.

Man beſchreibe über CF, aus der Linie CF und EF und dem ∠ x ein Parallelogramm FL, aber auch über GK, aus GK, KJ und dem ∠ y das ▱ KM. So verhält ſich das ähnliche ▱ FL : ▱ KM = die Quadrate ihrer ähnlichen Seiten, oder auch wie die Quadrate ihrer Höhen. Dann

$$\triangle CEF : \triangle GJK = CF^2 : GK^2 = DE^2 : HJ^2$$

$$\triangle CEF = \frac{▱FL}{2}, \quad \triangle GJK = \frac{▱KM}{2}$$ (§. 96. Z. 2.) folgl. iſt (A. §. 55. Z. 2.)

$$▱FL : ▱KM = CF^2 : GK^2 = DE^2 : HJ^2$$

Da nun diß bey allen möglichen ähnlichen △△ geſchehen kann, ſo verhalten ſich auch alle ähnliche Parallelogramme, wie die □te ihrer gleichnamigten Seiten und Höhen.

§. 136. Tab. IV. F. 84.

Alle ähnliche Figuren verhalten ſich wie die Quadrate ihrer gleichnamigten Seiten. Oder ABCDF : GHJKM = $AB^2 : GH^2$.

Beweiß.

Man ziehe aus 2 gleichnamigten $\angle\angle$ F und M die Diagonalen, ſo entſtehen in einer Figur ſo viel $\triangle\triangle$ als in der andern, und ein jeder $\triangle$ in der erſten, iſt dem andern gleichnamigten $\triangle$ in der andern ähnlich (§. 116. Z. 1.) Nun iſt $\triangle ABF : \triangle GHM = AB^2 : GH^2$ und $\triangle BCF : \triangle HJM = BC^2 : HJ^2$ ferner $\triangle CDF : \triangle JKM = CD^2 : JK^2$ (§. 135.) Es iſt aber auch (§. 64.)

$AB : GH = BC : HJ = CD : JK$ und (A. §. 217. N. 9.)

$AB^2 : GH^2 = BC^2 : HJ^2 = CD^2 : JK^2$ Daher auch

$\triangle\triangle ABF : GHM = BCF : HJM = CDF : JKM = AB^2 : GH^2 = BC^2 : HJ^2 = CD^2 : JK^2$ folglich auch (Ar. §. 217. Nro. 5.)

$$\underbrace{\triangle ABF + \triangle BCF + \triangle CDF}_{ABCDF} : \underbrace{\triangle GHM + \triangle HJM + \triangle JKM}_{GHJKM} = AB^2 : GH^2$$

folglich

$$ABCDF : GHJKM = AB^2 : GH^2$$

Anmerkung.

Hierdurch erhielte (M. S. §. 102.) ſeinen vollſtändigen Beweiß.

Zuſätze.

1) Da ſich der nemliche Beweiß, vollkommen, auf alle regulare Vielecke, welche gleichviel Seiten haben, anwenden läßt (§. 64. Z. 1.) ſo ver-

halten ſich auch dieſe, wie die Quadrate ihrer gleichnamigten Seiten.

2) Aehnliche in oder um einen Cirkel beſchriebene Figuren, verhalten ſich, wie die Quadrate ihrer Radiorum T. IV. F. 82. Z. E. hier ABDEF : JLNPG = $AC^2 : CJ^2$, eine Folge, welche, wenn der obige Beweiß nur ein wenig verändert wird, klar in die Augen fällt.

3) Alſo verhalten ſich auch Cirkel, wie die Quadrate ihrer Radiorum. Denn ſie ſind Vielecke von unendlich vielen Seiten (§. 5. Z. 2.) und alle einander ähnlich (§. 21. 8.)

4) Weil $D : d = R : r$ (Ar. §. 205.) ſo iſt auch

$D^2 : d^2 = R^2 : r^2$ (Ar. §. 217.) weil aber
C : c ═══ || (Z. 3.) wenn C der gröſte,
c der kleine Cirkel iſt

ſo iſt auch $C : c = D^2 : d^2$ (Ar. §. 203.)
oder die Cirkel verhalten ſich auch wie die Quadrate ihrer Diameter. Und hieraus fließt der Beweiß für (M. G. §. 102. 2.)

5) Da $C = \frac{PD}{4}$ und $c = \frac{pd}{4}$ (§. 132. Z. 1.) ſo iſt
$\frac{PD}{4} : \frac{pd}{4} = D^2 : d^2$ (Zuſ. 4.) und (Ar. §. 205.)

$PD : pd = D^2 : d^2$ aber auch : D und d

$P : p = D : d$ (Ar. §. 217.)
Oder die Peripherien verhalten ſich wie ihre Diameter. Woraus der Beweiß für (M. G. §. 56. gegen das Ende) fließt.

6) Da $P : p = D : d$ ſo iſt auch (Ar. §. 217.)

$P : p = \frac{D}{2} : \frac{d}{2}$ allein (§. 21. 5.)

$\frac{D}{2} = R$, $\frac{d}{2} = r$

$: P : p = R : r$

Oder die Peripherien verhalten ſich wie ihre Radii.

7) Folglich iſt auch $P : R = p : r$ und (Ar. §. 217.) $R : P = r : p$ oder die Radii haben in allen Cirkeln zu ihren Peripherien einerley Verhältnuß.

8) Weil $D : d = P : p$ (Zuſ. 5.) ſo iſt auch

$D - d : d = P - p : p$ (Ar. §. 217.) und

$D - d : P - p = d : p$ (A. §. cit.) weil nun (§. 120.) $100 : 314 = = ||$ ſo iſt (Ar. §. 203.)

$D - d : P - p = 100 : 314.$

Und diß giebt den Beweiß für (M. G. §. 56. ganz am Ende.)

§. 137.

Aus dem gegebenen Diameter d die Peripherie p und umgekehrt zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Iſt d gegeben, ſo iſt $100 : 314 = d : p$ (§. 120) folglich $\frac{314\,d}{100} = p$ (Ar. §. 220.)

2) Wär p gegeben, ſo iſt $314 : 100 = p : d$ (§. 120.) alſo $\frac{100\,p}{314} = d$ (Ar. §. 220.)

Und hierauf beruht (§. 73. und 74. M. G.) woſelbſt berechnete Aufgaben zur Uebung.

§. 138. Zuſatz.

Folglich kann auch, aus r, die halbe Peripherie oder $\frac{p}{2}$ gefunden werden, da

$100 : 314 = d : p$ und $: 2$ (Ar. §. 217.)

$$100 : 314 = \frac{d}{2} : \frac{p}{2}$$
$$\frac{d}{2} = r \quad (\S.\ 21.\ 5.)$$

$$100 : 314 = r : \frac{p}{2}$$

§. 139. Tab. I. F. 13.

Aus dem gegebenen r, d oder p eines Cirkels die Gröſſe eines α BE in Ruthen, Schu ꝛc. ꝛc. zu finden, wenn ſeine Gröſſe in Graden, Minuten ꝛc. bekannt iſt. Es ſeye z. E. α BE $= 30°$, $r = 5'0''$

Auflöſung und Beweiß.

I. 1) Man ſuche aus r; $\frac{p}{2}$ (§. 138. Z.) $= 1°5'7''$

2) Nun iſt $\frac{p}{2} : \alpha BE = \frac{p}{2} : \alpha BE$ und
$$\frac{p}{2} = 180°, \quad \alpha BE = 30°, \quad \frac{p}{2} = 1°5'7''$$

3:) $18|0 : 3|0 = 157$ (Ar. §. 217.)

$$\left.\begin{matrix}6 : 157'' \\ 81\end{matrix}\right\} = \alpha'6''\tfrac{1}{6} = \alpha BE$$

3) Folglich ſpricht man: Die halbe Peripherie in Graden, verhält ſich zum Bogen in Graden, wie die in Ruthen, Schu ꝛc. gefundene halbe Peripherie zum Bogen in Ruthen, Schu ꝛc. ꝛc.

II. Da $\frac{p}{2} : \alpha = \frac{p}{2} : \alpha$ ſo iſt auch (Ar. §. 217.)

$$p : \alpha = p : \alpha \text{BE in } {}^\circ . {}' . {}''.$$

III. Iſt alſo d gegeben, ſo ſucht man p (§. 137.) und verfährt, wie Nro. II.)

Und hierauf beruhet (M. G. §. 75.) Daß ſich aber, wenn α BE ſowohl in °. ′. ″ als in Graden gegeben iſt, umgekehrt auch p, d und r daraus finden laſſe, iſt für ſich klar, eben ſo wohl, als daß nach Nro. I. aus denen dort gegebenen Stücken, die Gröſſe eines jeden einzelen Grades, Minute und Secunde ꝛc. ꝛc. könne gefunden werden.

§. 140.

Aus den gegebenen Diametern 2er Cirkel den Unterſchied ihrer Peripherien zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

Man ziehe den kleinern Diameter vom gröſſern ab, und ſpreche

$$100 : 314 = D - d : P - p.$$

denn da $D - d : P - p = 100 : 314$ (§. 136. Zuſ. 8.)

ſo iſt auch $100 : 314 = D - d : P - p$, worauf ſich die Aufgabe (M. G. §. 74. Nro. 3.) gründet.

§. 141.

Aus d, r oder p den Innhalt eines jeden Cirkels C zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Iſt d gegeben, ſo ſuche man p (§. 137.)

2) — p — — — — d (§. cit.)

3) — r — — — — $\frac{p}{2}$ (§. cit. Z. 1.) ſo iſt im erſten und 2ten Fall $C = \frac{pd}{4}$ (§. 132. Z. 1.) im 3ten Fall wird $C = \frac{p}{2} \times r$ (ebendaſelbſt.)

Zuſatz.

Da $\frac{pd}{4} = p \times \frac{d}{4} = \frac{p}{4} \times d = \frac{p}{2} \times \frac{d}{2}$ (A. §. 61. Z.) und $\frac{p}{2} \times r = \frac{pr}{2} = p \times \frac{r}{2}$ ſo kann man von dieſen 7 Formeln, immer diejenige anwenden, welche, den Umſtänden nach, die bequemſte iſt, wovon mündlich. Hierauf gründet ſich (M. G. §. 128.)

§. 142. Tab. III. F. 78.

Der Innhalt eines jeden Cirkels ABCD verhält ſich zum □ ſeines Diameters FGHJ = 785 : 1000, und umgekehrt.

Beweiß.

Es ſeye AC = d = 100, ſo iſt $\frac{pd}{4}$ = ABCD = 7850 (§. 141.) und d^2 = □ FGHJ = 10000, folglich iſt

$\frac{pd}{4}$: d^2 = 7850 : 10000 Da aber
$\Vert$ $\Vert$
⊙ ABCD □ FGHJ ſo iſt (: 10) (Ar. §. 217.)

⊙ ABCD : □ FGHJ = 785 : 1000 folgl. auch
□ FGHJ : ⊙ ABCD = 1000 : 785 (Ar. §. 217.)

Zuſätze.

1) Wäre d = 113 ſo iſt p = 355 (§. 120. Z. 2.)
ſo gl. $\frac{pd}{4} = 10028\frac{3}{4}$ (§. 141.) u. $d^2 = 12769$ (§. 128.)
folgl. $\frac{pd}{4} : d^2 = 10028\frac{3}{4} : 12769$ (×4) (Ar. §. 217.)

$\frac{pd}{4} : d^2 = 40115 : 51076$ u. : 113. (Ar. §. cit.)

$\frac{pd}{4} : d^2 = 355 : 452$
Welches Verhältnuß genauer als das erſtere iſt (§. 120. Z. 2.) Und hierauf gründet ſich (M. G. §. 104.)

2) Da $d^2 : \frac{pd}{4} = 1000 : 785$ ſo iſt auch $1000 : 785 = d^2 : \frac{pd}{4}$. Daher kann, durch Hülfe dieſes Satzes, der Innhalt eines Cirkels, ohne die Peripherie zu ſuchen, gefunden werden (M. G. §. 128. 2te Art.)

3) Da ferner $\frac{pd}{4} : d^2 = 785 : 1000$ alſo auch $785 : 1000 = \frac{pd}{4} : d^2$ und $\sqrt{d^2} = d$, ſo läßt ſich auch aus dem Innhalt eines Cirkels ſein Diameter finden (Ar. §. 217. §. 167. und §. 168.)

4) Da T.III. F.69. $AB^2 : \frac{pd}{4} = 1000 : 785$ aber auch
$\Vert$
AD × AC (§. 92.) ſo iſt auch

$AD \times AC : \frac{pd}{4} = 1000 : 785$

5) Folglich verhält ſich T. III. F. 78. ein in den Cirkel beſchriebenes □ zu dem um den nemlichen Cirkel beſchriebenen □ wie 1 : 2 oder $AB^2 : GF^2 = 1 : 2$ Denn

$$\begin{matrix} AB^2 + BC^2 = AC^2 \ (\text{§. 100.}) \text{ u. nach §. 23. iſt} \\ \| \qquad\quad \| \\ AB^2 \text{ auch } GF^2 \ (\text{§. 61.}) \text{ folglich} \end{matrix}$$

$2AB^2 = GF^2$ Daher

$2AB^2 : GF^2 = 1 : 1$ und : 2 (Ar. §. 217.)

$AB^2 : GF^2 = \frac{1}{2} : 1$ und × 2 (Ar. §. cit.)

$AB^2 : GF^2 = 1 : 2$

6) Und das im Cirkel beſchriebene □ verhält ſich zum Innhalt des Cirkels, wie 500 : 785 Denn es iſt

$GF^2 : AB^2 = 2 : 1$ (Zuſ. 5.) ferner

$GF^2 : \frac{pd}{4} = 1000 : 785$ folgl. 2 (A. §. 217.)

$\frac{GF^2}{2} : \frac{pd}{4} = 500 : 785$ und weil $\frac{GF^2}{2} = AB^2$ ſo iſt

---

$AB^2 : \frac{pd}{4} = 500 : 785.$

Anmerkung.

Artige Methode, den Innhalt eines Cirkels aus der Sehne ſeines Quadranten zu finden.

§. 143. Tab. I. F. 13.

Den Innhalt eines Sectors zu finden, wenn $r = EF$ und $\propto BE = \angle x$ gegeben ſind.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man ſuche aus r und $\angle x$, den αBE in °. ′. ″. (§. 139.)

2) Und da der Sector $= \frac{\alpha r}{2}$ ſo multiplicire man αBE mit r und dividire das Produkt mit 2, ſo iſt der Innhalt des Sectors gefunden. (§. 132. Z. 2.)

§. 144. Tab. I. F. 6. Trig.

Aus der gegebenen Sehne eines Abſchnitts AB und ſeiner Höhe DF, den Innhalt deſſelbigen zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

Da der Ausſchnitt ABCD aus dem Abſchnitt ABD und dem über ſeiner Sehne ſtehenden △ ABC, deſſen Spitze im Centro C liegt (Er heiſſe der Sehnen △) beſtehet, ſo iſt auch der Abſchnitt ABD = dem Ausſchnitt ABCD — dem Sehnen △ ABC.

1) Man ſuche daher aus AB und DF, den Reſt des Diameters EF (§. 88. Z. 1.)

2) Addire EF zu DF und halbire die Summe, ſo iſt $\frac{EF + DF}{2} = \frac{DE}{2} = CD = AC = BC$ (§. 21. Zuſ. 5. und 3.) folglich auch das Centrum C gefunden.

3) Ziehe von CD die Höhe DF ab, ſo iſt CD—DF = CF oder der Höhe des Sehnen △ ABC.

4) Ziehe die Radios AC und BC aus, und meſſe den Ausſchnitts ∠ o + x.

5) Nun finde man aus AC und dem ∠ o+x den Ausſchnitt ABCD (§. 143.)

6) Jngleichem aus CF (Nro. 3.) und $\frac{AB}{2}$ = BF den Sehnen △ ABC (§. 128. Z. 1.)

7) Ziehe vom Ausſchnitt ABCD den Sehnen △ ABC ab, ſo iſt der Reſt der Abſchnitt ABD.

Zuſätze.

1) Sollte der Jnnhalt des gröſſern Abſchnitts AFBE gefunden werden, ſo addirt man den Sehnen △ ABC zum Ausſchnitt ACBE.

2) Folgende Tabelle enthält die Gröſſe, der in Graden, Minuten und Secunden gemeſſenen Abſchnittsbögen, in 100000 Theilen des Diameters. Sie iſt nach (§. 139.) berechnet, und verſchafft den Vortheil, daß man bey Berechnung der Ab- und Ausſchnitte, nie die Peripherie zu ſuchen nöthig hat. Jhr Gebrauch iſt folgender. Es ſeye der Radius des Ausſchnitts AC = 30°0′0″ folglich D = 60°0′0″ und α AB = o+x = 6°. So ſetzte man aus der Tabelle an

$$100|000 : 5235 = 6|0°0'0''$$
$$6''$$

$$1|00 : 314|10| = 3°1'4'' = \alpha AB$$

Und hierauf beruhen (§. 130. und §. 131. M. G.) wo §. 130. die Berechnung verbeſſert werden muß.

Tafel
zu Berechnung der Bögen bey den Aus- und Abſchnitten.

Grade.	Gröſſe der Bög. in 100000tel von d.	Minuten.	Gröſſe der Bögen.
1	872	1	14
2	1745	2	29
3	2617	3	43
4	3490	4	58
5	4363	5	72
6	5235	6	87
7	6108	7	101
8	6981	8	116
9	7853	9	130
10	8726	10	145
20	17453	20	290
30	26179	30	436
40	34906	40	581
50	43633	50	727

Grade.	Gröſſe der Bög. in 100000tel von d.	Secunden.	Gröſſe der Bögen.
60	52359	— —	— —
70	61086	2	0
80	69813	3	$\frac{1}{2}$
90	78539	4	$\frac{1}{2}$
100	87266	5	1
110	95993	6	1
120	104719	7	$1\frac{1}{2}$
130	113446	8	$1\frac{1}{2}$
140	122173	9	2
150	130899	10	2
160	139626	20	4
170	148353	30	7
180	157079	40	9
360	314159	50	12

§. 145.

Dieſe bisher vorgetragene Berechnung der Figuren läßt ſich bequem in folgende kurze Formeln zuſammenfaſſen. Es iſt nemlich der Innhalt

1) Aller Parallelogramme $=$ ab (§. 128.)

2) Aller Triangel $= \frac{ab}{2}$ (Ebend. Z. 1.)

3) Aller Parallel-Trapeze $= \frac{(2b+c)a}{2}$ (§. 129.)

4) Aller gemeinen Trapeze $= \frac{(a+c)b}{2}$ (§. 130.)

5) Aller regularen Vielecke $= \frac{abn}{2}$ (§. 132.)

6) Aller Cirkel $= \frac{pd}{4}$ (§. 132. Z. 1.)

7) Aller Ausſchnitte $= \frac{cr}{2}$ (§. 132. Z. 2.)

8) Aller Abſchnitte = Sector — Sehnen △. (§. 144.)

§. 146. Tab. IV. F. 94.

Man beſchreibe ein gleichſchenklicht ◺ ABC und auf deſſen gleichen Seiten AB = BC, halbe Cirkel, AEB und BFC, aber auch über deſſen Hypotenuſe AC, mit AD, aus D, den halben Cirkel ABC, ſo heißt das Stück AEBG oder BFCH der hippocratiſche Mond (Lunula Hippocratis) und iſt immer = dem ◺ ABD.

Beweiß.

Es ſeye AC = 2a, ſo iſt AD = BD = CD = a, ferner AB = u, BC = z, ABGE = Y und BFCH = X. Nun iſt

$4a^2 = u^2 + z^2$ (§. 100.) Daher iſt

$\frac{C}{2} 2a = \frac{C}{2} u + \frac{C}{2} z$ (§. 136. Z. 4.)

Nun iſt $\frac{C}{2} z$ weil p. hyp. $u = z$ folglich

$\frac{C}{2} 2a = 2\frac{C}{2} u$ und (: 2)

$\frac{C}{4} 2a = \frac{C}{2} u$ und da (Ar. §. 63.)

$ABG = ABG$

$\frac{C}{4} 2a - ABG = \frac{C}{2} u - ABG$ aber auch

△ABD = Y oder dem hippokratiſchen Mond ABGE.

Anmerkung.

Daß X = △BCD erhellet auf die nemliche Art. Von der Urſache der Benennung, dem Erfinder, Werth dieſer Erfindung, mündlich.

§. 147. Tab. IV. F. 95.

Zwey oder mehrere Quadrate in eines zu verwandeln.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man zeichne einen ∟ x und mache ſeine Schenkel GH und GJ = den Seiten der beyden □te AB und CD, ſo iſt $HJ^2 = AB^2 + CD^2$ (§. 100.)

2) Wär noch ein 3tes □ da, ſo ſetze man auf JH die ſenkrechte Linie JK = EF der Seite dieſes □, ziehe KH, ſo wird

$$KH^2 = JH^2 + KJ^2$$ (§. 100.) u. da nach

$$\quad\ \ \| \qquad \|$$ Nro. 1. ſo iſt

$$KH^2 = AB^2 + CD^2 + EF^2$$

3) Zeichne auf die letzte Hypotenuſe ein □, ſo ſind die gegebene □te in eines verwandelt.

Anmerkung.

Sind noch mehrere □te gegeben, ſo verfährt man mit dem 4ten, 5ten ꝛc. ꝛc. immer wie Nro. 2. um die Summe von allen zu erhalten. Und wenn z. E. KH auf dem verjüngten Maaßſtab gemeſſen und nach (Ar. §. 161.) quadrirt wird, ſo iſt die gefundene Quadratzahl der Summe der Innhalte aller gegebenen Quadrate gleich.

§. 148. Tab. V. F. 96.

Zwey Quadrate von einander abzuziehen.

Auflöſung.

1) Man mache EF = CD der Seite des kleinern □ und richte auf ihr eine ſenkrechte unbeſtimmte Perpendikulare in E auf.

2) Durchſchneide aus F mit GF = AB der Seite des gröſſern Quadrats, dieſe Perpendikulare in G, ſo iſt ein auf EG zu beſchreibendes □ der Unterſchied der beyden gegebenen □te.

Beweiß.

Dann $GF^2 = EF^2 + EG^2$ oder da

$$\| \qquad \|$$ ſo iſt auch

$$AB^2 = CD^2 + EG^2$$ folglich (A. §.63.)

$$AB^2 - BD^2 = EG^2.$$

§. 149. T. V. F. 97.

Ein □ zu zeichnen, welches 2, 3, 4 ꝛc. ꝛc. mal ſo groß als ein gegebenes □ iſt.

Aufloͤſung und Beweiß.

1) Man zeichne den ∟ y und mache ſeine Schenkel CD = CE = AB der Seite des gegebenen Quadrats.

2) Ziehe die Hypotenuſe DE und auf dieſe ein □, diß iſt das doppelte vom gegebenen, da $DE^2 = CD^2 + CE^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2$ (§. 100.)

3) Verlangt man das 3fache von AB^2, ſo zeichne man auf DE den ∟ o und mache EF = AB ſo iſt wie (§. 147.) $DF^2 = DE^2 + EF^2 = 2AB^2 + AB^2$ (Nro 2.) $= 3AB^2$ und wenn auf DF der ∟ u gezeichnet, auch abermal GF = AB gemacht wuͤrde, ſo muß $DG^2 = 4AB^2$ ſeyn ꝛc. ꝛc.

Anmerkung.

Quadrate laſſen ſich alſo geometriſch addiren, ſubtrahiren und multipliciren.

§. 150.

Da ſich die Cirkel wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten (§. 136. Z. 4.) ſo koͤnnen nach §. 147. 148. und 149. auch Cirkel geometriſch addirt, ſubtrahirt und multiplicirt werden, wenn man mit ihren Diametern, wie mit den Seiten, der in den angefuͤhr-

ten §§. gegebenen Quadrate, verfährt. Wenn man nun den Unterſchied zweyer concentriſchen Cirkel T. 5. F. 98. welche mit AC und BC beſchrieben wurden, oder den Ring y die Krone nennt, ſo iſt jegliche Krone einem Cirkel gleich, welcher mit dem Radius AB, der nach §. 148. gefunden werden kann, beſchrieben wird.

§. 151. Tab. III. F. 72.

Einen jeden △ in ein ▭ zu verwandeln.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man theile die Grundlinie des △, AE in 2 gleiche Theile in D (§. 45. 3.)

2) Richte in A und D ſenkrechte Linien AB = CD = der Höhe des gegebenen △ auf (§. 60. Z. 6. §. 45. 4.) und ziehe BC

3) So iſt das ▭ ABCD dem gegebenen △ gleich (§. 97.)

§. 152. Tab. V. F. 99.

Jedes ▭ in ein □ zu verwandeln.

Auflöſung.

1) Man ſuche zwiſchen der Grundlinie AB u. Höhe des ▭ AD die mittlere geometriſche Proportionale EF (§. 88.)

2) Beſchreibe auf dieſe ein □ EFGH (§. 95. Z. 3.) Diß iſt dem gegebenen ▭ ABCD gleich.

Beweiß.

$$AD : EF = EF : AB \text{ (p. conſtr.) folglich}$$

$$\underbrace{AD \times AB}_{\parallel} = \underset{\parallel}{EF^2} \text{ (Ar. §. 215.)}$$

$$\square AC = \square EG.$$

§. 153.

Alle Trapeze und Vielecke in Quadrate zu verwandeln.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man zerlege ſie durch Diagonalen in △△.
2) Dieſe verwandle man in ▭▭ (§. 151.)
3) Jedes ▭ in ein □ (§. 152.) und endlich
4) Alle Quadrate in eines (§. 147.)

§. 154. Tab. IV. F. 88.

Jeden Cirkel in einen △ zu verwandeln.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man ſuche aus d die p (§. 137.) und mache die Grundlinie AC des △ ABC = p.

2) Richte in A die ſenkrechte Linie AB = r auf (§. 60. Z. 6.) ſo iſt der ◺ABC dem gegebenen Cirkel gleich (§. 132. Z. 1.)

§. 155.

Jeden Cirkel in ein □ zu verwandeln.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man verwandle den Cirkel in einen △ (§. 154.)

2) Dieſen △ in ▭ (§. 151.)

3) Das ▭ in ein □ (§. 152.) ſo iſt das gefundene □ dem gegebenen Cirkel gleich.

Anmerkungen.

1) Eben ſo kann ein Ausſchnitt in ein □ verwandelt werden (§. 132. Z. 2.)

2) Da nun, wie aus (§. 152—155) erhellt, jede Figur in □ verwandelt, und alsdann, oder auch ohne dieſe Vorbereitung, ausgerechnet werden kann (§. 145.) ſo heißt die Erfindung des Innhalts der Figuren, ihre Quadratur. Ein Ausdruck, welcher vorzüglich beym Cirkel gewöhnlich iſt. Und da es bey dieſem, hauptſächlich auf die Erfindung von p aus d, ankommt, ſo verſteht man auch gewöhnlich, wenn von der Quadratur des Cirkels geſprochen wird, die Erfindung des Verhältnuſſes von d : p. Nun iſt diß, für die Ausübung durch Annäherung weit genauer beſtimmt, als es irgend ein praktiſcher Gebrauch erfordert (§. 120. Anm.) Zum Vergnügen des Verſtandes lieſſe ſich zwar in der Theorie noch verſuchen, ob ſich nicht d : p durch ein paar beſtimmte Zahlen in einem Rationalverhältnuß ausdrucken lieſſe. Wahrſcheinlich iſts irrational, denn gänzlich ſcheint diß Sturm in Matheſ. Enucleata L. I. §. 2. noch nicht erwieſen zu haben. Aber geſetzt man fände ein Irrationalverhältnuß von d : p. Würde man nicht immer p, ſo wie

jetzo, durch bloſſe Annäherung ſuchen müſſen? Genug, die mathematiſchen Pfuſcher lächerlich zu machen, welche in der Abſicht, die Quadratur des Cirkels erfinden wollen, weil ſie ſich von ihrer Erfindung groſſe Vortheile im menſchlichen Leben und wichtige Belohnungen verſprechen. Wem ſolche Adepten, durch verlangte Prüfung ihrer Entdeckungen, Zeit verderben wollen, der prüfe ihre Verhältnuſſe nach dem von Ceuliſchen. Diß iſt als Annäherung erwieſen, folglich alle übrige, welche nicht damit übereinſtimmen, gewiß unrichtig. Denn ſchwerlich wird der Fall vorkommen, daß ein ſolcher Cirkel Adepte p in mehr Decimalſtellen ausdrücken ſollte. Daß aber die unbeſtimmte Quadratur des Cirkels unmöglich ſeye, wird in der höhern Geometrie erwieſen. Man ſehe hierüber: Lamberts Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung zweyter Theil, V. Abhandlung, p. 140.

§. 156.

Die Theilung aller Figuren, welche im menſchlichen Leben den wichtigſten Einfluß haben, trägt (M. G. Kap. 12.) ſo vollſtändig, deutlich und kurz vor, als es wohl irgend in einem Handbuche geſchehen iſt. Ich werde deswegen, blos die dort abgehandelte Materien in ihrem Zuſammenhang vorſtellen, und die Gründe, aus welchen die Auflöſungen erwieſen werden, aus dem Vorhergehenden anführen. Eine Abkürzung, welche dem Zweck dieſes Lehrbuchs vollkommen angemeſſen iſt.

§. 157.

Die hier vorkommende noch nicht erklärte Begriffe giebt (M. G. §. 135.) Man muß wiſſen: Was Grundlinien, Seitenlinien, Theilungslinien ſind. Ein abgeſchnittenes Stück heißt Gleichbreit, wenn die Grund- und Theilungslinie dem Augenmaas nach, nicht merklich con- oder divergiren; hingegen zugeſpitzt, wo das Gegentheil ſtatt findet.

§. 158.

Ein Stück von einer beſtimmten Gröſſe in Geſtalt eines △ abzuſchneiden, wird in M. G. §. 136. gelehrt. Der Beweiß fließt aus (§. 128. Z. 2.) Nur iſts in der Ausübung vortheilhaft, wenn die Grundlinie geometriſch halbirt (§. 45. Z. 3.) und dann erſt dieſe Hälfte gemeſſen und damit dividirt wird.

§. 159.

Das Abſchneiden gleichbreiter Stücke, trägt (M. G. §. 137.) vor. Die erſte Methode wird aus (§. 134. Z. 2.) die andere aus (§. 96. Z. 1.) erwieſen. Letztere iſt in der Ausübung kürzer und bequemer.

§. 160.

Das Verfahren bey unſchicklichen Grund- und Seitenlinien zeigt (M. G. §. 138.) und die ſo oft nöthige Abänderung der gefundenen Theilungslinie wird E. D. §. 139. angegeben. Sie gründet ſich auf (§. 96. Z. 1.)

§. 161.

Die wirkliche Theilung der Flächen durch Rechnung finden wir und zwar

1) In gleiche Theile (M. G. §. 140. 1. 2. 3.) Und da der letzte Theil ſich immer von ſelbſt gibt, auch ſo groß ſeyn muß, als er durch die Rechnung gefunden wurde, ſo kann die vorgenommene Theilung hiedurch einigermaſen geprüft werden, wenn man dieſen letzten Theil nach (§. 131.) berechnet und ſeinen Jnnhalt, mit dem durch die erſte Rechnung gefundnen vergleicht. Hier iſt ein beträchtlicher Vortheil bemerkenswerth. Wenn T. V. F. 100. die Seitenlien, BG und CH, gerade Linien ſind, die in einem fortlaufen und der erſte Theil ABCE nach (§. 159. 2te Methode) gefunden iſt, ſo nehme man die Theilungslinie AE als Grundlinie des △ ACE an, ſuche aus C, die Perpendikularhöhe deſſelben CD und trage ſie eben ſo aus AD hinaufwärts, um einen neuen △ ADF = △ ACE zu erhalten, wie man vorhin aus dem △ ABC, den △ ACE ohne Rechnung fande. Auf dieſen wird auch der △ FEJ, = △ AEF, wie der △ ACE auf △ ABC geſetzt und ſo alle übrige gleiche Theile, durch bloſſe Zeichnung, ohne weiteres Rechnen und Meſſen der neuen Grundlinien, gefunden.

2) Die Theilung in ungleiche Theile von beſtimmter Gröſſe (M. G. §. 140. Nro. 4 und 5.) erhält ihren Beweiß aus (Ar. §. 232.) ſo wie M. G. §. 141. Nro. 1. und 2. Die Nro. 3. ange-

gebene Methode aber wird aus §. 158. bewieſen, und der (M. G. §. 145.) vorgetragene Fall: Ein Feld ſo zu theilen, daß die Theilungslinien in einem beſtimmten Punkt zuſammenſtoſſen, findet in dem nemlichen Satz ſeine Gründe.

§. 162.

Figuren ohne Berechnung zu theilen, iſt, △ und Parallelogramme ausgenommen, mehr ein Vergnügen des Verſtandes, als in der Ausübung brauchbar.

1) Die Theilung der Parallelogramme

a) In beliebige gleiche Theile ſiehe (M. G. §. 142.) die Beweißgründe (§. 96.)

b) In ungleiche Theile, nach einem beſtimmten Verhältnuß, können ſie nach §. 134. getheilt werden, wovon mündlich.

c) Ein Parallelogramm, ſo in 2 gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinie durch ein beſtimmtes Punkt gehe, lehrt (M. G. §. 144.) Der Beweiß iſt folgender T.V.F 101.

Man ziehe noch die Hülfslinie GH. Nun iſt zu zeigen, daß das Trapez CEGD = dem Trapez CHFD.

Da BE = BF (p. conſtr.)
u = y (§. 41.)
o = x (§. 57. 2.) ſo iſt

I. △CBE = △BDF (§. 43.)

Ferner iſt BC = BD (I.)
m = n (§ 41.)
r = s (§. 57. 2.) alſo

II. △BCH = △BDG (§. 43.) Und endlich
BH = BG (II.)
BF = BE (p. conſtr.)
v = q (§. 41.) ſo iſt

III. △BHF = △EBG (§. 42.) und da
△BCH = △BDG (II.) auch
△BDF = △CBE (I.) ſo muß (Ar. §. 63.)
△△BDF+BCH+BHF = △△CBE+BDG+EBG
ſeyn. Und da || auch || (Ar. §. 61.)

ſo iſt auch Trap. CHFD = Trap. CEGD.

2) Die Theilung der △△

a) In beliebige gleiche zugeſpitzte Theile, ſiehe (M. G. §. 143.) Der Beweiß liegt §. 96. Z. 1.

b) In beliebige ungleiche zugeſpitzte Theile nach einem beſtimmten Verhältnuß, werden ſie, nach (§. 134. Z. 1.) getheilt, wovon mündlich.

c) In gleiche Theile, ſo, daß die Theilungslinien mit einer beliebigen Seite des △ parallel laufen, ſiehe (M. G. §. 143. *) Der Beweiß fließt aus (§. 135.) Wie ſie auf dieſe Art in ungleiche Theile zu theilen, mündlich.

3) Die Theilung einer jeden Figur ohne Rechnung, ſetzt die Verwandlung derſelbigen in einen △ voraus, welche (M. G. §. 146.) vorgetragen und aus §. 96. Z. 1. erwieſen wird. Die Thei-

lung ſelbſt aber wird (M. S. §. 147.) gelehrt und beruht auf Nro. 2. a. und §. 96. Z. 1.

Anmerkung.

Alle in dieſem §. vorgekommene und noch mancherley andere angenehme Aufgaben, findet man ſehr deutlich und gründlich, aus Ozanams Schriften, in folgendem kleinen Traktätchen: „Anweiſung, wie die geradlinichten Figu„ren nach einem gegebenen Verhältnuß, ohne Rechnung, „blos geometriſch zu theilen. Frankf. und Leipzig 1776." Wie auch in Belidors Cours de Mathematique, und vorzüglich in Boehms Gründlicher Anleitung zur Meßkunſt auf dem Felde. Kap. V. p. 141. und f. N. A.

Achter Abſchnitt.

Von der Lage gerader Linien, ſowohl unter ſich ſelbſt, als gegen gegebene Ebenen und einer Ebene gegen andere Ebenen.

§. 163.

Wenn in der Stereometrie deutliche Begriffe von den Körpern gegeben und ihre Eigenſchaften gründlich erwieſen werden ſollen, ſo muß dieſe Lehre nothwendig vorausgeſchickt werden. Ich thue diß um ſo mehr, weil ſie zugleich eine herrliche Vorbereitung auf die Kugelſchnitte und Sphäriſche Trigonometrie iſt, und die Früchte ſich in dieſen Abſchnitten reichlich zeigen werden. Nur bemerke man vorläufig, folgenden heiſche= und willkürlichen Satz.

§. 164.

Eine jede Ebene, kann, an ſich, unbeſtimmt, nach allen Seiten vergröſſert werden.

In dieſem Abſchnitt ſollen alle Ebenen als Vielecke gezeichnet werden.

Anmerkung.

Chartenblätter, groſſe Nähenadeln, Vorſtellung der auſſer den Ebenen liegenden geraden Linien, durch Fäden, können dem mündlichen Vortrag, in dieſem Abſchnitt, ausnehmende Deutlichkeit verſchaffen.

§. 165. Tab. V. F. 102.

Zwey, auf einer Ebene ABEF, angenommene Punkte A und B, oder auch eine durch ſie gezogene gerade Linie AB, beſtimmen die Lage dieſer Ebene nicht vollkommen.

Beweiß.

Denn es kann ſich die Ebene ABEF um die Linie AB, wie der Deckel einer viereckigten Tobaksdoſe, in einem halben Cirkel bewegen und folglich unzählige Lagen erhalten z. E. ABCD, ABGH.

§. 166. Tab. V. F. 102.

Aber 3 Punkte B, H, J, welche in der nemlichen Ebene ABGH, allein nicht in gerader Linie liegen, werden die Lage der Ebene ABGH vollkommen beſtimmen.

Beweiß.

Geſetzt die Ebene ABGH liege in der Linie AB, ſo kann ſie zwar um dieſelbe ſich bewegen und unzählige Lagen erhalten (§. 165.) wenn ſie aber einmal in die Lage kommt, daß das Punkt J in derſelben ſich befindet, ſo darf ſie dieſe Lage nicht im mindeſten ändern, ſo lange das Punkt J in der Ebene liegen ſoll, indem es ſonſt entweder über, oder unter die Ebene zu liegen käme.

Zuſätze.

1) Folglich kann, durch 3 Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, nur eine Ebene gelegt ja gedacht werden. Ob ſie aber horizontal (§. 14.) ſenkrecht, oder ſchief liege, wird hiedurch noch nicht beſtimmt.

2) Alle ebene △△, ebene geradlinichte ∠ und Cirkel liegen in einerley Ebene. Denn ſie werden immer durch 3 Punkte beſtimmt.

§. 167. Tab. V. F. 101.

Vier oder mehr Punkte, können zwar in der nemlichen, aber auch in ſehr verſchiedenen Ebenen liegen.

Beweiß.

Es ſeyen die Punkte E, H, F, D, G. Dieſe können zwar alle in der Ebene EHFG liegen. Nun ziehe man EF, und beuge den Theil GEF um die Linie EF in die Höhe, ſo liegt D und G ſchon nicht mehr in der Ebene EHFG.

§. 168. Tab. V. F. 103.

Zwo Ebenen, welche ſich durchſchneiden, können ſich nur in Einer Geraden Linie JK durchſchneiden und haben ſonſt keinen Punkt mit einander gemeinſchaftlich.

Beweiß.

Wenn die Ebene EFGH die Ebene ABCD in JK durchſchneidet, ſo iſt

1) Der Durchſchnitt gewiß eine Linie, denn die Flächen haben keine Dicke (§. 2. Zuſ.)

2) Dieſe iſt beyden Flächen gemeinſchaftlich, denn indem EFGH die Ebene ABCD durchſchneidet, ſo wird dieſe auch von jener durchſchnitten.

3) Aber auch eine gerade Linie, ſonſt könnte ſie nicht ganz in beyden ebenen Flächen liegen (§. 8.)

4) Und zwar nur eine Einige gerade Linie, weil ſonſt eine von beyden Flächen eine Dicke haben müßte, welches gegen (§. 2. Zuſ.)

5) Die beyde Ebenen haben aber auch ſonſt keinen auſſer JK liegenden Punkt mit einander gemein. Denn man ſetze das Gegentheil: So liegt z. E. der dritte Punkt entweder in der durchſchneidenden Fläche in L, oder in der durchſchnittenen in M. Allein in beyden Fällen könnte, entweder durch JK und L, oder durch J, K und M nur eine Fläche gelegt werden (§. 166. Z. 1.) Folglich würden ſich die beyden Flächen gar nicht ſchneiden, welches gegen die angenommene Bedingung lieſe.

Zuſatz. T. V. F. 102.

Man denke ſich die Ebenen BC und BE durch AB verlängert, ſo iſt der erwieſene Satz von ihnen wahr. Nun verlängere man auch die dritte Fläche AH durch eben dieſe Linie AB und er wird auch von BC und AH wahr ſeyn. Was alſo hier von zwo Ebenen bewieſen wurde, gilt auch von dreyen ja unzählichen.

§. 169. Tab. V. F. 104.

Wenn auf eine Ebene ABCD, aus einem auſſer derſelben liegenden Punkt E, eine gerade Linie EF gezogen wird, ſo neigt ſie ſich entweder gegen keine Seite der Ebene mehr als gegen die andre, oder es findet das Gegentheil ſtatt. Im erſten Fall ſteht ſie ſenkrecht auf der Ebene, im andern macht ſie mit ihr einen ſchiefen ∠, deſſen Gröſſe man folgendermaſſen beſtimmet. Man fällt von einem beliebigen auſſer der Ebene liegenden Punkt der Linie EF, mit dem Senkbley ein Perpendikul EG auf die gegebene Ebene, und zieht aus dem Punkt F, wo EF die Ebene durchſchneidet, nach G, wo der Perpendikul EG auffällt, eine gerade Linie GF, und nun iſt x oder EFG der ſpitze ∠, welchen die Linie EF mit der Ebene macht, und wenn GF gegen H verlängert wird, y oder EFH ſein benachbarter ſtumpfer ∠.

Zuſatz. T. V. F. 105.

Eine gerade Linie GH ſteht daher auf einer ganzen Ebene ABCD ſenkrecht, wenn ſie auf allen, will-

kürlich durch den Berührungspunkt H, gezogenen Linien AC, BD, EF ſenkrecht ſteht.

§. 170. Tab. V. F. 105.

Eine gerade Linie GH, welche auf 2 andern geraden, in einerley Ebene ABCD liegenden und ſich im Berührungspunkt H ſchneidenden Linien AH und DH, in H ſenkrecht ſteht, ſteht auf der ganzen Ebene ABCD ſenkrecht.

Beweiß.

Sie wird ſenkrecht auf der ganzen Ebene ſtehen, ſobald ſie auch auf einer dritten, willkürlich durch H gezogenen Linie EF in H ſenkrecht ſteht (§. 169. 3.) Daß diß aus der Bedingung dieſes Satzes folge, zeigt man alſo. Man verlängre AH und DH ſo, daß HC = AH und BH = DH und verbinde die Punkte A, B, C, D durch gerade Linien; ziehe durch H eine willkürliche gerade Linie EF, daß ſie AB und CD in E und F durchſchneide; aber auch, aus einem beliebigen Punkt G der Perpendikulare GH, die Linien BG, EG, AG, DG, FG, CG, ſo iſt im

△ABH und △CDH

AH = CH } p. conſtr.
BH = DH }

∠BHA = ∠CHD (§. 41.) Daher

I. △ABH $\cong$ △CDH (§. 42. und 67.)

Ferner im △ BEH und △ DFH iſt

BH = DH p. conſtr.

$\angle EBH = \angle FDH$ (nach I.)
$\angle BHE = \angle DHF$ (§. 41.) alſo

II. $\triangle BEH \cong \triangle DFH$ (§. 43. und 65.)
Im $\triangle AGH$ und $\triangle CGH$ iſt
$\llcorner AHG = \llcorner CHG$ (p. hyp. §. 169. u. 40. Z. 2.)
$AH = CH$ (p. conſtr.)
$GH = GH$ (Ar. §. 63.). Daher

III. $\triangle AGH \cong \triangle CGH$ (§. 67. und 42.) und
IV. $\triangle BGH \cong \triangle DGH$ aus dem nemlichen Grunde, wie Nro. III. Folglich wird auch
Im $\triangle ABG$ und $\triangle DGC$
$AB = CD$ (I.)
$AG = CG$ (III.)
$BG = DG$ (IV.) alſo auch

$\triangle ABG \cong \triangle DGC$ (§. 44. und 66.) Daher

V. $\angle GBE = \angle GDF$ Woraus fließt, daß, da
Im $\triangle BEG$ und $\triangle DFG$
$BE = DF$ (II.)
$BG = DG$ (IV.)
$\angle GBE = \angle GDF$ (V.) ſo iſt ferner

VI. $\triangle BEG \cong \triangle DFG$ (§. 42. u. 67.) u. da endl.
Im $\triangle EGH$ und $\triangle GFH$
$EH = HF$ (II.)
$EG = GF$ (VI.)
$GH = GH$ (Ar. §. 61.) ſo muß der

VII. $\triangle EGH = \triangle GFH$ ſeyn (§. 44. u. 66.) folgl. auch

---

$\angle GHE = \angle GHF = 90°$ (§. 40. Z. 2.)

Folglich ſteht GH auf EF ſenkrecht (§. 10.) Da nun EF willkürlich durch H gezogen wurde, ſo läßt ſich der nemliche Beweiß, von allen andern möglichen durch H zu ziehenden Linien, führen. Wenn alſo eine gerade Linie auf 2 andern geraden Linien, die in einerley Ebene liegen, in dem Durchſchnittspunkt perpendikular ſteht, ſo ſteht ſie auf der ganzen Ebene perpendikular.

Zuſätze.

1) Stünde aber GH nur auf einer, in der Ebene ABCD liegenden Linie, z. E. auf AH ſenkrecht, ſo kann ſie gar wohl auf der ganzen Ebene ſchief ſtehen. Denn ſie könnte ſich gegen B oder D neigen, ohne daß der ∟ AHG verändert würde.

2) Hierauf beruhet der Bau eines Werkzeugs, womit ſich ſehr leicht ſenkrechte Linien auf eine Ebene aufrichten laſſen, wovon mündlich.

3) Aus einem Punkt H in einer Ebene, läßt ſich alſo nur eine einige ſenkrechte Linie GH ziehen. Denn geſetzt man nehme an, daß noch eine z. E. JH möglich ſeye, ſo müßte der $\angle$ JHF $= 90°$ folglich dem ∟ GHF gleich ſeyn, das iſt, ein Theil würde dem Ganzen gleichen, welches gegen (Ar. §. 61.)

4) Eben ſo wenig kann man aus einem Punkt G, mehr als ein Perpendikul GH auf eine gegebene Ebene fällen. Denn, wenn man annähme, daß noch ein andres z. E. GA möglich wäre, ſo

könnte doch immer von H nach A eine gerade Linie AH gezogen werden. Und nun wär im △ AGH der ∟ AHG = 90° p. hyp. aber auch der ∠ GAH = 90° (p. hyp. und conſtr.) folglich in einem △ 2 rechte ∟, welches doch unmöglich iſt (§. 54.)

5) Das Perpendikul GH iſt die kürzeſte Linie, welche aus G auf die Ebene ABCD gezogen werden kann. Denn jede andre Linie, z. E. AG, würde Hypotenuſe eines ⊿ AGH werden, und alſo gröſſer als GH ſeyn (§. 54. 3. 2.)

§. 171. Tab. V. F. 106.

Wenn zwo Linien EF und GH auf der ganzen Ebene AC ſenkrecht ſtehen, ſo liegen ſie in der nemlichen ſenkrechten Ebene EFGH und laufen mit einander parallel. Und wenn zwo Linien EF und GH parallel ſind, und eine von ihnen EF, auf der ganzen Ebene ſenkrecht ſteht, ſo wird auch die andere GH, auf der nemlichen ganzen Ebene, ſenkrecht ſtehen.

Beweiß.

Man ziehe GF und verlängre ſie unbeſtimmt nach J und K, ferner EH, ingleichem durch F willkürlich LM und durch G die Linie NO parallel LM.

1) Lägen nun EF und GH nicht in der nemlichen ebenen ſenkrechten Fläche EFGH, ſo müßte entweder ∟ NGH $\gtrless$ ∟ OGH oder der ∟ LFE $\gtrless$

∟MFE ſeyn, da aber ∟NGH = ∟OGH u. ∟LFE = ∟MFE (p. hyp.) ſo liegen auch EF und GH in der nemlichen ebenen ſenkrechten Fläche EFGH.

2) Weil ∟EFG = ∟FGH (p. hyp.) und alſo EF ſo wohl als GH auf GF ſenkrecht ſtehen, ſo iſt auch EF parallel GH (§. 62.)

3) Da EF ⋕ GH, ſo liegen ſie in einerley ebenen Fläche EFGH, folglich wird auch die gerade Linie EG in eben dieſer ebenen Fläche liegen (§. 8.) Nun ſteht EF, auf JK und LM, ſenkrecht in F (p. hyp.) Sollte nun GH nicht auch ſenkrecht, auf JK und NO, in G ſtehen, ſo müßte entweder der ∟FGH $\gtrless$ ∟EFG oder der ∟NGH $\gtrless$ als ∟EFL ſeyn. Allein im erſten Fall wäre GH nicht parallel EF (§. 62.) und im andern könnten EF, GH und EG nicht in der nemlichen Ebene EFGH liegen. Jenes wäre gegen die Vorausſetzung, diß gegen das Erſtbewieſene. Es iſt alſo der ∠FGH = ∟EFG = 90° und der △NGH = ∟EFL = 90°, folglich ſteht GH auf NG und GF, alſo auf der ganzen Ebene AC ſenkrecht (§. 170.)

§. 172. Tab. V. F. 104.

Hieraus fließt die geometriſche Methode, aus einem gegebenen Punkt E, welches auſſerhalb einer Ebene AC liegt, eine ſenkrechte Linie EG

auf dieſe Ebene zu ziehen, und aus einem in der Ebene AC gegebenen Punkt J eine ſenkrechte Linie JK auf dieſer Ebene aufzurichten.

Auflöſung.

I. 1) Man ziehe auf der Ebene AC die Linie LM willkürlich.

2) Auf dieſe aus E, EF ſenkrecht, ſo, daß ∟EFL = ∟EFM.

3) FP, von unbeſtimmter Länge, aus F, ſenkrecht auf LM, ſo iſt ∟LFP = ∟MFP.

4) Aus E auf PF die ſenkrechte Linie EG, dieſe wird auf der ganzen Ebene AC ſenkrecht ſtehen.

II. 1) Man ziehe nach (I.) aus einem willkürlich angenommenen Punkt E, die ſenkrechte Linie EG auf die Ebene AC,

2) Aus G nach J eine gerade Linie GJ,

3) Mit EG durch J eine Parallele JK, dieſe wird auf der ganzen Ebene AC ſenkrecht ſtehen.

Beweiß.

I. Wenn EG auf zwoen in der Ebene AC liegenden Linien GF und GO ſenkrecht ſteht, ſo ſteht ſie auf der ganzen Ebene AC ſenkrecht (§. 170.) Daß diß aus der gegebenen Auflöſung folge, erhellet alſo:

Man ziehe die Hülfslinie NO parallel LM, ſo iſt ∟MFE = ∟MFP = 90°, daher ſteht MF

auf EFG, als Ebene betrachtet, ſenkrecht. Da aber OG parallel MF (p. conſtr.) ſo wird auch OG auf der nemlichen Ebene EFG ſenkrecht ſtehen (§. 171.) Daher iſt ∟EGO = ∟EGF = 90°, folglich ſteht EG auf GF und GO, das iſt, auf der ganzen Ebene AC ſenkrecht. W. Z. E. W.

II. Weil JK parallel EG, EG aber ſenkrecht auf der Ebene AC ſteht (p. conſtr.) ſo muß auch JK auf der nemlichen Ebene AC ſenkrecht ſtehen. (§. 171.)

Zuſatz.

Aus E iſt nur eine ſenkrechte Linie EG auf die Ebene AC möglich (§. 170. Z. 4.) folglich auch nur eine ſenkrechte Linie EF aus E auf LM und GF wird auch immer ſenkrecht auf LM ſtehen. Und wenn GF ſenkrecht auf LM ſteht, ſo wird auch EF ſenkrecht auf derſelben ſtehen.

§. 173. Tab. V. F. 107.

Wenn zwo gerade Linien GJ und CD mit einer dritten AB parallel laufen, ſo iſt GJ parallel CD, wenn gleich nicht alle drey in einerley Ebene liegen.

Beweiß.

Man ziehe HF in der Ebene ABJG ſenkrecht aus F auf AB, ingleichem EF in der Ebene ABDC ſenkrecht aus F auf AB, ſo iſt ∟JHF = ∟DEF (§. 57. I. und p. hyp.) Es ſteht alſo, JH und DE, auf

der Ebene EFH ſenkrecht, folglich iſt auch GJ ‡‡ CD (§. 171.) ohngeachtet ſie in verſchiedenen Ebenen liegen.

§. 174. Tab. V. F. 108.

Wenn man in einem beliebigen Punkt einer Ebene EG eine ſenkrechte Linie CD aufrichtet, und aus C einen Cirkel beſchreibt, ſo iſt jedes in der Linie CD angenommene Punkt, z. E. D, gleichweit von jedem Punkt der Peripherie entfernt.

Beweiß.

Man ziehe die Hülfslinien AD, BD, AC u. BC, ſo iſt AC = BC (§. 21. 3.)
CD = CD (Ar. §. 61.)
∟ACD = ∟BCD (§. 27. 2.) folglich

△ACD = △BCD (§. 42.) Daher

AD = BD.

§. 175. Tab. V. F. 109.

Eine gerade Linie AB lauft mit einer Ebene HF parallel, wenn beyde, man mag ſie vergröſſern, wie man will, nie zuſammenſtoſſen.

Ihre Richtung wird durch eine auf der Ebene FH gezogene Linie CD, ihre Stelle oder Entfernung von FH durch ein gegebenes Punkt B beſtimmt. Um ſie wirklich zu ziehen, lege man durch CD und den Punkt B eine zwote Ebene BD, deren Lage durch C, D u. B vollſtändig beſtimmt wird (§. 166) und ziehe mit CD in der Ebene BD die Parallele AB (§. 58. Z. 2.

und 3.) ſo iſt gewiß AB parallel der Ebene HF. Denn CD liegt in beyden Ebenen HF u. BD (§. 168.) und wenn AB nicht parallel mit HF wäre, ſo müßte ſie irgend in einem Punkt mit HF zuſammenſtoſſen, das iſt, BD und HF, würden, entweder in DC, oder auſſer derſelben, noch ein 3tes gemeinſchaftliches Punkt haben. Allein, das erſte wäre gegen (§. 9.) das letzte gegen (§. 168.) folglich iſt AB parallel mit der Ebene HF.

§. 176. Tab. V. F. 110.

Wenn zween Winkel ABC und DEF nicht in einerley Ebene GJ, aber ihre Scheitel B und E in einer geraden Linie BE liegen und ihre Schenkel AB und DE, BC und EF mit einander parallel laufen, ſo ſind die beyde Winkel gleich.

Beweiß.

Man mache AB = DE und BC = EF und ziehe die Linien AD, CF, AC und DF, ſo iſt

CF ⧣ und = BE
AD ⧣ und = BE (§ 61.) folglich

CF ⧣ und = AD aber auch
AC ⧣ und = DF (§. 61.) Daher weil

AB = DE
BC = EF (p. conſtr.)
AC = DF wie erwieſen wurde, ſo iſt

△ABC = △DEF (§. 44.) folglich auch

∠ABC = ∠DEF.

§. 177. Tab. V. F. 111.

Ein Flächenwinkel iſt die Neigung zwoer Ebenen AC und AE, welche ſich in einer Linie AD ſchneiden. Sein Maas iſt der gewöhnliche ∠ CDE oder BAF. Denn man ziehe auf die gemeinſchaftliche Durchſchnittslinie beyder Ebenen AD, aus einem beliebigen Punkt, die ſenkrechte Linie LJ und aus J die ſenkrechte Linie JK, welche durch J in P verlängert wird, ſo iſt JLP gewiß der Neigungswinkel beyder Ebenen, und wenn diß in tauſend andern Punkten derſelben auf die nemliche Art geſchieht, z. E. in O, M, N, Q oder C, D, H, E, ſo ſind doch alle dieſe daher entſtehende ∠∠ LJP, OMQ, CDE einander gleich (§. 176.) indem LJ parallel OM parallel CD und PJ parallel MQ parallel DE, da ſie alle ſenkrecht auf AD ſtehen (§. 62.) folglich beſtimmt ∠ CDE den Flächen ∠ der beyden Ebenen AC und AE.

Zuſatz.

Er läßt ſich bequem durch 4 Buchſtaben ausdrücken BDAE, von welchen die beyden mittlern immer an der Durchſchnittslinie ſtehen müſſen, und da ∠ CDE das Maas vom ∠ BADE, ſo gilt §. 40. und 41 von allen Flächen ∠∠.

§. 178. Tab. V. F. 112.

Eine Ebene GE, welche auf einer andern AC, in ihrer Durchſchnittslinie EF ſenkrecht ſteht, ſteht auf der ganzen Ebene AC ſenkrecht.

Beweiß.

Der Flächen $\angle$ JKL iſt = 90°, folglich ſteht JK auf KL und auf EK ſenkrecht (§. 177.) das iſt auf der ganzen Ebene AC (§. 170.)

Zuſätze.

1) Die Fläche GE kann ſich um die ſenkrechte Linie JK in einem Cirkel herum bewegen, ohne ihre ſenkrechte Lage gegen die Ebene AC zu ändern. Folglich kann ſie nach unzähligen Richtungen z. E. MN auf derſelben ſenkrecht ſtehen.

2) Wenn zwo oder mehrere Ebenen T. V. F. 113. GJ und LN, welche ſich in EF ſchneiden, auf einer dritten Ebene AC ſenkrecht ſtehen, ſo ſteht auch ihre Durchſchnittslinie EF auf der Ebene AC ſenkrecht (Z. 1. und §. 168.) Ein Beyſpiel geben die Wände eines regelmäſigen Zimmers.

3) Ebenen von gleichen Neigungswinkeln paſſen in einander. Denn man lege T. VI. F. 114. die Ebene LN auf die Ebene AC ſo, daß KL auf AB paſſe, ſo fällt Q auf H und QR auf HJ (§. 177.) aber auch QP auf HG (p. hyp. und §. 27. Z. 1.) Daher paßt die ganze Ebene LN auf AC, weil die Punkte L, Q, R auf die Punkte A, H, J fallen; und eben ſo, da L, Q, P auf A, H, G fällt, wird auch die Ebene LO auf AE paſſen (§. 166.) das iſt: Ebenen von gleichen Neigungs $\angle$ $\angle$ paſſen ganz in einander.

§. 179.

Parallel=Ebenen nennt man diejenigen, welche eine ſolche Lage gegen einander haben, daß ſie, wenn ſie auch ins Unendliche vergröſſert würden, ſich nie durchſchneiden.

Anmerkung.

Ihre Figur trägt nichts hiezu bey. Ein △ kann mit einem □, ein ▭ mit einem Cirkel parallel liegen.

§. 180. Tab. VI. F. 114. a.

Wenn eine gerade Linie GJ ſo zwiſchen zwo Ebenen AD und MO liegt, daß ſie auf beyden ſenkrecht ſteht, ſind die beyde Ebenen AD und MO ⌗.

Beweiß.

Man lege durch GJ eine neue Ebene FH, ſo ſteht dieſe ſo wohl auf AD als MO ſenkrecht (§. 178.) und ſchneidet AD in EF, MO aber in KH, und GJ wird auf beyden Durchſchnittslinien EF und KH ſenkrecht ſtehen. Folglich iſt EF ⌗ KH (§. 58.) Es kann ſich aber die Ebene FH im Cirkel um GJ drehen, ohne ihre ſenkrechte Lage gegen AD und MO zu ändern, und noch immer werden die neue daher entſtehende Durchſchnittslinien parallel laufen, folglich müſſen auch, unter den angegebenen Bedingungen, die ganze Ebenen AD und MO parallel ſeyn.

Zuſätze.

1) Wenn zwiſchen zwo parallelen Ebenen, eine gerade Linie, auf einer von dieſen Ebenen ſenkrecht ſteht, ſo ſteht ſie auch auf der andern ſenkrecht.

2) Wenn T. VI. F. 115. zwo Ebenen C und E, mit einer dritten D, parallel laufen, ſo iſt auch die Ebene C parallel E. Denn die auf E ſenkrechte Linie BA ſteht auf D, folglich auch auf C ſenkrecht (Zuſ. 1.) Daher iſt C parallel E.

§. 181. T. VI. F. 116.

Wenn zwo parallele Ebenen von einer dritten Ebene durchſchnitten werden, ſo ſind

1) Ihre Durchſchnittslinien AB und CD parallel, aber auch

2) Zwo oder mehr zwiſchen ihnen liegende Parallellinien AC und BD einander gleich;

3) Der äuſſere Neigungs ∠ EFG iſt dem entgegen geſetzten innern Neigungs ∠ FHJ gleich.

Beweiß.

1) AB liegt in der Ebene QR und CD in der Ebene OP. Nun würden QR und OP, wenn ſie unendlich vergröſſert würden, nie zuſammenſtoſſen (§. 179.) folglich würden auch AB und CD, man mag ſie verlängern, wie man will, nie zuſammenſtoſſen, das iſt, AB iſt parallel CD (§. 9.) W. D. E. W.

2) Durch die Parallelen AC und BD kann immer eine Ebene BC gelegt werden, deren Durchſchnitts-linien AB $\#$ CD. Daher ſtehen AC und BD unter obiger Bedingung, immer zwiſchen zwo Parallelen AB und CD, folglich muß AC = BD ſeyn (§. 61.) W. D. A. W.

3) Man ziehe auf AB $\#$ CD (Nro. 1.) aus einem willkürlichen Punkt E, die Linie EF ſenkrecht, und verlängere ſie bis in CD, ſo ſteht EH auch auf CD ſenkrecht (§. 57. 3.) Man ziehe ferner aus F die ſenkrechte Linie FG und aus H die ſenkrechte Linie HJ. Nun iſt GF parallel HJ (§. 175.) folglich auch ∠ EFG = ∠ FHJ (§. 57. 3.) Da aber ∠ EFG = dem äuſſern, und ∠ FHJ = dem innern Neigungs ∠ (§. 177.) So iſt auch der äuſſere Neigungs ∠ dem innern Neigungs ∠ gleich. W. D. D. W.

§. 182. Tab. VI. F. 117.

Wenn 3 parallele Ebenen AB, CD und EF, zwo gerade Linien OP und QR, in GK, LN, und HJ durchſchneiden, ſo ſtehen die zwiſchen den Parallel-Ebenen liegende Stücke in Proportion. Es iſt GL : LH = KN : NJ und GH : LH = KJ : NJ.

Beweiß.

Man ziehe durch die Punkte, in welchen die Linien OP und RQ von den 3 Parallel-Ebenen durchſchnitten werden, gerade Linien GK, LN, HJ, welche pa-

rallel ſeyn werden (§. 181.) Aber auch die Linie KH. So entſtehen zween gleich und ähnliche $\triangle\triangle$; $\triangle GKH \cong \triangle HKJ$ (§. 57. 2. §. 43. und §. 65.) Ferner, iſt, da LN parallel GK, $\triangle LHM \sim \triangle GHK$ und $\triangle KMN \sim \triangle KHJ$ (§. 68.) Daher iſt

I. $GL : LH = KM : HM$

II. $KN : NJ = \parallel$ Daher (Ar. §. 203.)

$GL : LH = KN : NJ$ aber auch (Ar. §. 217.)

$GL + LH : LH = KN + NJ : NJ$ und da

$\parallel \qquad\qquad \parallel$

$GH : LH = KJ : NJ$.

Neunter Abſchnitt.

Begriffe von den Körpern und ihrer Entſtehung.

§. 183. Tab. I. F. 9.

Ein körperlicher Winkel entſteht, wenn mehr als zween ebene Winkel, welche nicht in einerley Ebene liegen, in einem Punkt, ſo mit ihren Scheiteln zuſammenſtoſſen, daß immer zween und zween von ihnen, einen gemeinſchaftlichen Schenkel haben. Z. E. Die Wände und der Boden eines Hauſes.

Anmerkung.

In dieſem ganzen Abſchnitt werden wenige Figuren vorkommen. Mit einer Menge Zeichnungen wird der Vorſtellung noch immer ſchlecht geholfen, und gleichwohl das Buch deſto gewiſſer vertheuret. Körperliche Vorſtel-

lungen zeigen in einer Stunde mehr, als hundert Figuren in 6 Stunden.

Zuſätze.

1) Folglich werden wenigſtens 3 ebene ∠ zu einem körperlichen ∠ erfordert.

2) Gleiche körperliche ∠ müſſen aus gleichen, gleich vielen und in einerley Ordnung liegenden ebenen ∠∠ beſtehen. Z. E. Die Winkel eines wohlgebauten Zimmers.

3) Daher ſind gleiche körperliche Winkel auch ähnlich.

4) Die Summe aller ebenen ∠∠, woraus ein erhabener körperlicher ∠ entſteht, muß < 360° ſeyn.

§. 184.

Grundfläche eines Körpers heißt diejenige Fläche, worauf man ſich den Körper als ruhend vorſtellt. Seine Seitenflächen ſtehen auf dem Umfang der Grundfläche, Seine Höhe iſt die gröſste Senkrechte Linie, welche von irgend einem Punkt des Körpers auf die Grundfläche gefällt werden kann. Ebene Körper ſind in ebene, Unebene Körper in unebene Flächen eingeſchloſſen.

Anmerkung.

Die beyden letztern nannte ein berühmter Philoſoph Deutſchlands, geradlinicht und krummlinichte Körper. Sind denn aber Körper nur in Linien eingeſchloſſen?

§. 185.

Ein ordentlicher Körper im ſtrengſten Verſtand (corpus regulare ſenſu ſtrictiſſimo) iſt in lauter ordentliche, ähnliche und gleiche Flächen eingeſchloſſen. Bey einem ordentlichen Körper im weitläuftigeren Verſtand (ſenſu latiori) ſind entweder alle, oder wenigſtens die entgegen geſetzte Seitenflächen ähnlich und gleich. Und wenn man von dieſen beyden Begriffen das Gegentheil ſetzt, ſo hat man die Begriffe von Unordentlichen Körpern im ſtrengſten und weitläuftigern Verſtand (corpus irregulare.)

§. 186.

Ein ſenkrechter Körper (corpus rectum) iſt, deſſen Seitenflächen auf ſeiner Grundfläche, oder deſſen Höhe auf dem Mittelpunkt der Grundfläche ſenkrecht ſtehet. Findet das Gegentheil ſtatt, ſo hat man einen ſchiefen Körper (corpus obliquum.)

§. 187.

Gleichdicke Körper ſind, in welchen alle, mit der Grundfläche parallele Durchſchnittsflächen, gleich und ähnlich ſind. Ungleichdicke das Gegentheil.

In zugeſpitzten Körpern werden alle mit der Grundfläche parallele Durchſchnitte, ſo wie ſie ſich von ihr entfernen, immer kleiner, bis ſie ſich endlich in einem Punkt verlieren, doch ſo, daß die Seitenlinien eines jeden Durchſchnitts immer in den Seiten-

flächen des Körpers liegen. Und wenn in einem zu=geſpitzten Körper, ein Durchſchnitt parallel mit der Grundfläche geſchiehet, ſo heißt der obere zugeſpitzte Körper der abgeſchnittene, der Unterſchied des ganzen und abgeſchnittenen Körpers aber, Ein abgekürzter Körper (corpus truncatum.)

§. 188. Tab. I. F. 3.

Jeder Körper entſteht aus der Bewegung einer Fläche (§. 7.) Dieſe Fläche nennt man die Erzeugende Fläche (ſuperficies genitrix) z. E. AC. Diejenige Parallel = Linien, welche bey gleichdicken Körpern die Richtung der Bewegung der erzeugenden Fläche beſtimmen, z. E. AE und CG, nenne man Richtungslinien (lineæ directrices) und den $\angle$ DAE oder BAE, den die Richtungslinie mit der erzeugenden Fläche AC macht, den Richtungswinkel.

§. 189. Tab. I. F. 3.

Wenn ſich eine ebene (wenigſtens dreyſeitige) Fläche AC, nach der Richtungslinie AE, immer mit ſich ſelbſt parallel herab bewegt, ſo entſteht ein Prißma. Diß iſt drey, vier, fünf ꝛc. ꝛc. eckigt, und ordentlich oder unordentlich, je nachdem die erzeugende Fläche ein Drey, Vier, Fünf ꝛc. ꝛc. Eck und zwar ein ordentliches oder unordentliches Vieleck iſt. Iſt der Richtungs $\angle = 90°$, ſo erhält man ein ſenkrechtes Prißma (§. 180. Z. 2.) wo nicht ein ſchiefes. Daher iſt

Zuſätze.

1) Im Prißma die Grundfläche immer der erzeugenden Fläche gleich (Ar. §. 61. 3.)

2) Alle mit der Grundfläche parallel laufende Durchſchnitte ſind einander gleich (Ar. §. 61. 3.)

3) Folglich alle Prißmata Gleichdicke Körper (Z. 2. und §. 187.)

4) Alle Seitenflächen ſind

a) Parallelogramme (§. 23.)

b) Ihre Anzahl gleicht der Zahl der Seiten der erzeugenden Fläche.

c) Im ordentlichen Prißma ſind alle Seitenflächen gleiche Parallelogramme (§. 21. 2.)

d) Das ordentliche Prißma iſt ein ordentlicher Körper im weitläuftigern Verſtand (§. 185.)

5) Jedes Prißma läßt ſich in ſo viel 3eckigte zerſchneiden, als ſeine Grundfläche Seiten hat, weniger 2. (§. 103. Bew.)

§. 190.

Wenn die erzeugende Fläche ein □, der Richtungs ∠ = 90°, und die Richtungslinie = der Seite der erzeugenden Fläche iſt, ſo entſteht ein Cubus oder Würfel.

Zuſatz.

Alle Cubi ſind in 6 gleiche Quadrate eingeſchloſſen (§. 23. und §. 21. 2.)

§. 191.

Iſt die erzeugende Fläche ein Parallelogramm, ſo erhält das Prißma den Namen Parallelepipedum. Diß iſt ſenkrecht oder ſchief, je nachdem der Richtungs ∠ ein rechter oder ſchiefer ∠ iſt. Auch hier iſt, wie §. 190.

Zuſätze.

1) Die erzeugende Fläche der Grundfläche gleich und ähnlich (Ar. §. 61. Z. und §. 67.)

2) Alle mit der Grundfläche parallel laufende Durchſchnitte ſind Parallelogramme und einander ſowohl ſelbſt, als jeder der Grundfläche gleich und ähnlich (Ar. §. 61. Z. und §. 67.)

3) Seine Seitenflächen ſind Parallelogramme und immer die ſich gegenüberſtehende gleich (§. 21. 2.)

4) Folglich Grund- und Seitenflächen ▭, wenn das Parallelepipedum ſenkrecht und die erzeugende Fläche ein ▭ iſt.

§. 192. T. VI.

Man ſetze §. 189. in die Stelle der erzeugenden Fläche einen Cirkel, ſo entſteht ein Cylinder und zwar F. 118. ein ſenkrechter, wenn der vom Diameter des erzeugenden Cirkels und der Richtungslinie gemachte ∠ = 90°; iſt dieſer Richtungs ∠ ſchief F. 119, ſo giebts einen ſchiefen Cylinder (Cylindrus rectus & obliquus.) In beyden heißt die gerade Linie AB oder CD, welche vom Centro der erzeugenden Fläche auf das Centrum der Grundfläche gezogen wird, die

Achſe des Cylinders. Iſt die erzeugende Fläche ein Ausſchnitt eines Cirkels F. 120, ſo entſteht ein Cylindriſcher Ausſchnitt; iſt ſie ein Abſchnitt vom Cirkel F. 121, ein Cylindriſcher Abſchnitt: Beyde können, wie die Cylinder ſelbſt, ſenkrecht oder ſchief, nach Beſchaffenheit des Richtungs ∠ ſeyn.

Zuſätze.

1) Alle Cylinder ſind Prißmata von unendlich vielen Seitenflächen (§. 132. Z. 1. und §. 189.) Was daher von dieſen bewieſen wird, gilt auch von jenen.

2) Alle mit der Grundfläche parallele Durchſchnitte ſind Cirkel, welche unter ſich ſelbſt und der Grundfläche gleich ſind (§. 189. Z. 1. 2.)

3) Eben ſo paſſen die übrigen Zuſätze (§. 189.) mit weniger Abänderung hieher.

4) Wenn die Achſen zweener Cylinder einerley ∠ mit dem Diameter ihrer Grundflächen machen und einerley Verhältnuß zu denſelben haben, ſo ſind die Cylinder ähnlich (Ar. §. 40.)

5) Ein ſenkrechter Cylinder würde auch erzeugt, wenn T. VI. F. 118. ſich ein ▭ AD oder ein □ um eine ſeiner Seiten AB im Kreiß herum bewegte.

§. 193. Tab. VI. F. 122.

Ein Kegel (Conus) entſteht, wenn ſich ein unendlich kleiner Cirkel, abwärts, nach der durch ſein

Centrum gehenden Richtungslinie, immer mit ſich ſelbſt parallel bewegt und ſein Diameter in jedem Augenblick nach einer arithmetiſchen Progreſſion wächſt. Iſt der Richtungs ∠ des Diameters ein ∟ F. 122, ſo entſteht ein ſenkrechter (rectus) wo nicht, und wenn die erzeugende Fläche eine Ellipſe iſt, ein ſchiefer (obliquus) Kegel F. 123. Jener heißt auch Gleichſeitig (æquilaterus) dieſer ungleichſeitig (ſcalenus.) Die Achſe des Kegels iſt eine von ſeiner Spitze in das Centrum der Grundfläche gezogene gerade Linie, z. E. AC oder BD. Seine Seite CE iſt F. 122. eine aus der Spitze C auf die Tangente der Grundfläche in den Berührungspunkt E gezogene ſenkrechte Linie. Und wenn ſich F. 124. Ein in A und D rechtwinklichtes Paralleltrapez ABCD um ſeine ſenkrechte Seite AD im Kreiß herum bewegte, ſo entſtünde ein ſenkrechter abgekürzter Kegel (Conus truncatus.)

Zuſätze.

1) Alle mit der Grundfläche des Kegels ∥ Durchſchnitte ſind Cirkel und jeder iſt < die Grundfläche.

2) Folglich ſind dieſe Durchſchnitte ſowohl als die Grundfläche ſelbſt, Vielecke von unendlich vielen Seiten (§. 132. Z. 1.)

3) Die Seitenfläche eines jeden Kegels beſteht aus unendlich vielen Triangeln, welche alle unendlich kleine Grundlinien haben und im ſenkrechten Kegel alle gleich, gleichſchenklicht ſind, auch einerley

Höhen, nemlich die Seitenlinie ihres Kegels haben. Folglich iſt die Seitenfläche eines Kegels einem Sector gleich, deſſen Bogen = der Peripherie der Grundfläche und deſſen Radius = der Seite des Kegels (§. 132. Z. 2.)

4) Kegel ſind ähnlich, ſobald ihre Achſen einerley ∠ mit ihren Diametern machen und einerley Verhältnuß zu ihnen haben.

§. 194.

Eine Pyramide entſteht, wenn ſich eine geradlinicht unendlich kleine Figur, nach den Richtungslinien, abwärts, immer mit ſich ſelbſt parallel bewegt und in jedem Augenblick ihre Seiten in einer Arithmetiſchen Progreſſion wachſen. Sie wird ordentlich oder unordentlich, ſenkrecht oder ſchief, drey, vier, fünf 2c. 2c. ſeitig ausfallen, je nachdem die erzeugende Figur ordentlich oder unordentlich, die Richtungs ∠∠ recht oder ſchief, die erzeugende Ebene ein Drey, Vier, Fünf 2c. 2c. Eck iſt.

Zuſätze.

1) Alle Seitenflächen der Pyramiden ſind △△, ihre Anzahl gleicht der Zahl der Seiten der Grundfläche, ſie ſind in der ordentlichen ſenkrechten Pyramide alle einander gleich und gleichſchenklicht, nicht aber in unordentlichen und ſchiefen Pyramiden.

2) In der dreyeckigten Pyramide ſind alle mit der Grundfläche parallel laufende Durchſchnitte △ △ und jeder < die Grundfläche.

3) Alle dieſe parallel mit der Grundfläche laufende Durchſchnitte, ſind, in der dreyeckigten Pyra= mide, der Grundfläche ähnlich. Oder △BGF ∽ △CDE T. VI. F. 125. indem

AB : AC = BG : CD }
|| = BF : CE } §. 68.) folglich;

1. BG : CD = BF : CE (Ar. §. 203.) Da aber auch AF : AE = BF : CE }
|| = GF : DE } §. 68.) ſo iſt

2. BF : CE = GF : DE (Ar. §. 203.) u. weil
|| = BG : CD (Nro. 1.) ſo iſt

3. GF : DE = BG : CD (Ar. §. 203.) Daher

△ BGF ∽ △ CDE (§. 66.)

4) Jede vieleckigte Pyramide, läßt ſich in ſo viel Dreyeckigte zerſchneiden, als die Grundfläche Seiten hat, weniger zwo (§. 103. Bew.)

5) Folglich ſind in jeder Pyramide, die mit der Grundfläche parallel laufende Durchſchnitte der Grundfläche ähnlich (Zuſ. 3. und §. 21. 7.)

6) Auch ein jeder Kegel iſt einer Pyramide von un= endlich vielen Seiten gleich (§. 193. Zuſ. 3.) Was alſo von dieſen bewieſen wird, gilt auch von jenen.

7) Der Begriff von abgekürzten Pyramiden fließt aus dem §. 187. gegebenen allgemeinen Begriff von den abgekürzten Körpern.

§. 195. Tab. VI. F. 125. a.

Eine Kugel entſteht, wenn ſich ein halber Cirkel um ſeinen Diameter ſo bewegt, daß er am Ende der Bewegung in ſeine anfänglich gehabte Lage kommt. Die die Kugel einſchlieſſende Fläche heißt die Kugelfläche. Der Diameter, um welchen ſich der die Kugel erzeugende halbe Cirkel bewegte, wird die Achſe der Kugel und ſeine beyde Endpunkte ihre Pole genennet. Das Centrum des erzeugenden halben Cirkels iſt das Centrum der Kugel und alle aus derſelben auf die Kugelfläche gezogene gerade Linien, Radii der Kugel.

Zuſätze.

1) Folglich ſind alle Radii der Kugel gleich (§. 21. 3.)

2) Da jeder Cirkel ein Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten iſt, ſo wird auch das um den erzeugenden Cirkel der Kugel beſchriebene Vieleck von unendlich vielen Seiten, welche alle unendlich kleine Tangenten ſind, eine unbeſtimmbare Menge von Oberflächen, lauter unendlich niedriger abgekürzter Kegel beſchreiben, deren Summe, von der Oberfläche der ganzen Kugel ſo wenig verſchieden iſt, daß man den Unterſchied für nichts anſehen kann. Es wird daher die Summe aller dieſer abgekürzten Kegelflächen der Kugelfläche gleich ſeyn.

3) Die Durchſchnittsfläche in einer Kugel, wenn ſie nach dem Diameter durchſchnitten wird, iſt ein Cirkel.

4) Alle mit ihr parallel laufende Durchſchnittsflächen ſind gleichfalls Cirkel, heiſſen Parallelcirkel und werden immer kleiner, je mehr ſie ſich von ihr entfernen T. VI. F. 126. Denn man ziehe aus dem Centro der erſtern, auf die andre eine ſenkrechte Linie BC, ingleichem die Radios der Kugel AC, CD, CE, ſo iſt

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 100.) folglich

1. $AC^2 - BC^2 = AB^2$

$CD^2 = BD^2 + BC^2$ (§. 100.) folglich

2. $CD^2 - BC^2 = BD^2$

$CE^2 = BE^2 + BC^2$ (§. 100.) Daher

1. $CE^2 - BC^2 = BE^2$

Weil aber $AC = CD = CE$ (Zuſ. 1.) u. $BC = BC$ (Ar. §. 61. 3.)

ſo iſt auch $AB^2 = BD^2 = BE^2$ und alſo auch

$AB = BD = BE$

Das iſt, der Durchſchnitt ADEF iſt ein Cirkel (§. 21. 3.) indem das nemliche von allen möglichen aus B in den Umkreiß des Durchſchnitts gezogenen Linien erwieſen werden kann. Und da AC, CD, CE immer gleich bleiben, BC aber in dem Maaſe zunimmt, wie ſich der Durchſchnitt ADEF vom Durchſchnitt GKJH entfernet, ſo müſſen auch AB^2, BD^2 und BE^2 nach

eben dieſem Maaß immer kleiner, folglich auch die Radii des Durchſchnitts, ja der Durchſchnitt ſelbſt immer kleiner werden, je mehr er ſich von dem durch das Centrum gehenden Durchſchnitt entfernt.

5) Folglich iſt die Durchſchnittsfläche der Kugel, welche nach dem Diameter geſchiehet, die gröſte und alſo der gröſte Cirkel der Kugel, die übrige aber kleinere Cirkel.

§. 196.

Ein Kugel-Abſchnitt (Segmentum ſphæricum) entſteht, wenn die Kugel durch eine, nicht durchs Centrum gehende Ebene durchſchnitten wird. Seine erhabene Oberfläche nennt man eine Kugelhaube (Calotte ſphærique.) Jeden Theil der Kugelfläche aber, welcher von zween auf ihr gezogenen Parallelcirkeln eingeſchloſſen iſt, Einen Gürtel der Kugel (Zona.) Ein Kugel-Ausſchnitt (Sector ſphæricus) T. VI. F. 127. iſt ein jedes pyramidenförmiges Stück der Kugel z. E. ABDEC, welches zur Grundfläche einen Theil der Kugelfläche ABDE hat, und deſſen triangelförmige Seitenflächen ABC, BCD und ADC ſich alle im Centro mit ihren Spitzen vereinigen. Iſt die Grundfläche, wie hier, ein Cirkel, ſo wird es ein kegelförmiger Ausſchnitt (Conus ſphæricus) ſeyn.

Zuſätze.

1) Die Grundfläche des kegelförmigen Ausſchnitts iſt immer die erhabene Oberfläche der Kugelhaube ABDE.

2) Die ganze Kugelfläche beſteht aus unendlich vielen unendlich kleinen ebenen Flächen, welche man alle unter ſich gleich denken kann, und die mit einander unendlich groſſe körperliche ∠ machen.

§. 197.

Ein Tetraedron iſt eine in 4 gleichſeitige und gleiche △ eingeſchloſſene Pyramide. Das Octaedron iſt in 8, das Icoſaedron in 20 dergleichen △, und endlich das Dodecaedron in 12 ordentliche und gleiche Fünfecke eingeſchloſſen.

Zuſatz.

Dieſe 4 Körper ſind ordentliche Körper im ſtrengſten Verſtand (§. 185.) worunter auch der Cubus oder Hexaedron (§. 190.) gehört. Man nennt ſie ſonſt auch die Platoniſche Körper. Ja man kann mit Recht die Kugel unter die ordentlichen Körper im ſtrengſten Verſtand zählen (§. 196. Z. 2. und §. 185.)

§. 198.

Es ſind nicht mehr als 6 ordentliche Körper im ſtrengſten Verſtande möglich.

Beweiß.

Jeder ordentlicher Körper im ſtrengſten Verſtand iſt in lauter ordentliche, ähnliche und gleiche Flächen eingeſchloſſen (§. 185.) und zu jedem erhabenen körperlichen ∠ werden wenigſtens 3 ebene ∠, deren Summe $< 360°$ iſt, erfordert (§. 183. Z. 1. u. 4.) Nun beſtehen die körperliche Winkel

I. 1) Des Tetraedron aus 3 ebenen ∠ ∠, deren jeder = 60° (§. 60. Zuſ. 6. und §. 197.) folglich ihre Summe = 180°.

2) Des Octaedron aus 4 dergleichen ebenen ∠ ∠ (§. cit.) daher ihre Summe = 240°.

3) Des Icoſaedron aus 5 dergleichen ebenen ∠ ∠ (§. cit.) folglich ihre Summe = 300°.

4) Wollte man 6 gleichſeitige △ in einen körperlichen ∠ zuſammen vereinigen, ſo wär' ihre Summe = 360°, folglich kann kein ordentlicher Körper, aus mehr als 5, in einem körperlichen ∠ ſich vereinigenden gleichſeitigen △ △, entſtehen.

II. Im Hexaedron iſt der körperliche ∠ von drey rechten Winkeln eingeſchloſſen (§. 190. Z. 1. und §. 23.) alſo ihre Summe = 270°. Da aber 4 ∟ = 360°, ſo iſt kein körperlicher ∠ aus 4 Quadraten möglich.

III. Im Dodecaedron ſtoſſen 3 ebene ∠, deren jeder = 108°, zuſammen, um den körperlichen ∠ zu bilden (§. 197. u. 103. Z. 2.) Ihre Summe iſt = 324°. Man ſetze 4 regulare Fünfecke in einen körperlichen ∠ zuſammen, ſo iſt die Summe der ebenen = 432°. Es iſt alſo kein ordentlicher Körper möglich, wo mehr als 3 ordentliche Fünfecke zuſammenſtieſſen.

IV. Wollte man noch andere ordentliche Körper aus ordentlichen Sechsecken zuſammenſetzen, ſo würden ſchon 3 derſelben einen körperlichen ∠ bilden,

wo die Summe der ebenen $\angle = 360°$ und bey den 7, 8 ꝛc. Ecken würde ſie immer $> 360°$ werden (§. 103. Z. 2.) Folglich laſſen ſich nur aus △ △, □ und ordentlichen Fünfecken unter denen I, II und III. bemerkten Umſtänden, ordentliche Körper im ſtrengſten Verſtande bilden,

V. Deren Anzahl, wie aus den angeführten Numern erhellt, nur 5 iſt. Hiezu kommt die Kugel (§. 197. Z.) Es ſind daher nicht mehr als 6 ordentliche Körper im ſtrengſten Verſtande möglich.

Zehender Abſchnitt.

Von der Verfertigung der ſenkrechten, ebenen wie auch der platoniſchen Körper.

§. 199.

Netze der Körper ſind ebene Flächen, auf welchen alle, einen beſtimmten Körper einſchlieſſende Flächen, ſo verzeichnet ſind, daß, durch Beugung derſelbigen nach beſtimmten Linien, der verlangte Körper daraus entſtehet.

Anmerkung.

An ſich wär jede feſte und doch beugbare Materie hiezu tüchtig. Z. E. Blech ꝛc. ꝛc. Da ſich aber, nicht allzudicker Pappendeckel, durch ſeine Wohlfeile und hinlängliche Feſte empfiehlt, auch leicht zu bearbeiten iſt, ſo wird er in der Ausübung vorzüglich gewählt. Warum ſchränkt man ſich nur auf die in der Ueberſchrifft dieſes Abſchnitts bemerkte Körper ein?

§. 200. Tab. VI. F. 128.

Das Netz zu einem ſenkrechten Prißma zu zeichnen.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man zeichne die Grundfläche des verlangten Prißma ABCD.

2) Auf eine ihrer Seiten AD das Recktangel AL, deſſen Höhe AO = der Höhe des verlangten Prißma (§. 95. Z. 3.)

3) Auf OL die nemliche Nro. 1. verzeichnete Grundfläche (§. 189. Z. 1.)

4) Verlängre AD und OL unbeſtimmt, und zeichne ſo viel Recktangel DK, EJ, FH, als die Grundfläche ABCD Seiten hat, ſo daß DE = DC, EF = BC und GF = AB, ſo iſt das Netz zum Prißma beſchrieben (§. 189.)

Zuſätze.

1) Auf die Grundfläche ABCD kommts an, ob man ein ordentliches oder unordentliches; 3, 4, 5 ꝛc. ꝛc. ſeitiges Prißma haben will oder nicht (§. 189.)

2) Wird ſtatt ABCD ein Quadrat gezeichnet und AO der Seite deſſelben gleich gemacht, ſo erhält man das Netz zum Cubus oder Hexaedron (§. 190.)

3) Und wenn die Grundfläche ABCD ein Parallelogramm iſt, ein Parallelepipedum (§. 191.)

4) Nimmt man zur Grundfläche einen Cirkel an T. VI. F. 129. und macht AB = der Peripherie dieſes Cirkels, AC aber der Höhe des Körpers, ſo iſts das Netz eines Cylinders (§. 192. Z. 1.)

§. 201. Tab. VII. F. 130.

Das Netz zu einer Pyramide zu zeichnen.

Aufloͤſung und Beweiß.

1) Man zeichne die Grundfläche der verlangten Pyramide z. E. ABF.

2) Auf eine Seite derſelben AB ein gleichſchenklicht △ ABC (§. 49.)

3) Aus C mit dem Radius AC einen Cirkelbogen, in welchen

4) BF aus B in D und AF aus D in E getragen wird.

5) Ziehe BD, DE, CD, CE aus, ſo iſt das Netz zur Pyramide fertig (§. 194. Z. 1.)

Zuſätze.

1) Je nachdem die Grundfläche ein ordentlich oder unordentliches 3, 4, 5 ꝛc. ꝛc. Eck iſt, wird man eine ordentliche oder unordentliche 3, 4, 5 ꝛc. ꝛc. eckigte Pyramide erhalten (§. cit.)

2) Wenn man GH ╫ AB, HJ ╫ BD, JK ╫ DE ziehet und auf GH eine der Grundfläche ABF ähnliche Figur zeichnet, ſo iſt GKEAF das Netz einer abgekürzten Pyramide.

§. 202. Tab. VII. F. 131.

Das Netz zu einem Kegel zu zeichnen.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man beſchreibe über AD dem Diameter der Grundfläche einen Cirkel und verlängre AD bis AC = der Seite des verlangten Kegels.

2) Meſſe AC und AD auf dem verjüngten Maasſtab und ſuche zu 2AC, AD und 360° die 4te geometriſche Proportionale (Ar. §. 220.) ſo iſt dieſe = ∠x (§. 136. Z. 5. und §. 34.)

3) Man beſchreibe mit AC aus C den Bogen AB, trage in C auf AC den gefundenen ∠x und ziehe BC.

4) So iſt DACB das Netz des Kegels (§. 193. Z. 3.)

Zuſatz.

Wenn man aus A nach G die Seite des abgekürzten Kegels trägt, mit CG aus C den α GE beſchreibt, aus GC und dem ∠x die Gröſſe des α GE findet (§. 139.) dieſe für p annimmt, den Diameter dazu ſucht (§. 137.) ihn aus G nach F trägt und einen Cirkel über GF zeichnet, ſo wird DAGFEB das Netz zu einem abgekürzten Kegel ſeyn, da DABC das Netz des ganzen und GFCE das Netz des abgeſchnittenen Kegels iſt (§. 187. und 193.)

Anmerkung.

Die Netze ſchiefer Kegel ſind kein Gegenſtand der niedern Geometrie.

§. 203.

Netze zu Tetraedris und Oktaedris zu zeichnen lehrt (M. G. §. 166. und 167.) mit vollkommener Deutlichkeit und die Beweiſſe flieſſen aus (§. 197.)

§. 204. Tab. VII. F. 132.

Ein Netz zu einem Icoſaedron zu zeichnen.

Auflöſung.

1) Man zeichne ein gleichſeitig $\triangle$ ABC und trage auf deſſen verlängerte Grundlinie BC, CD = DE = EF = GF = BC,
2) Ferner durch A, AH $\#$ BG und mache AQ = QO = OM = MK = KH = BC,
3) Aber auch AT durch A und C, RU durch Q und D, PV durch O und E ꝛc. ꝛc.
4) Endlich PS durch Q und C, NT durch O und D ꝛc. ꝛc. ſo wird die Figur das Netz des Icoſaedrons ſeyn.

Beweiß.

Es iſt blos zu zeigen, daß die 20 auf dieſe Art gezeichnete Dreyecke ABC, AQC, ARQ ꝛc. ꝛc. lauter gleichſeitige und alle einander gleiche $\triangle \triangle$ ſind (§. 197.)

Nun iſt ja AQ $\#$ BC (p. conſtr.)

$\angle o = \angle v$
$\angle n = \angle x$ (§. 57. 2.)
und AC = AC (Ar. §. 61. 3.)

$\triangle AQC \cong \triangle ABC$ (§. 43. und §. 65.)

folglich auch der $\triangle AQC$ gleichſeitig und dem $\triangle ABC$ gleich. Eben ſo zeigt man, daß $\triangle CQD \cong \triangle AQC \cong \triangle DQO$ ꝛc. ꝛc. Und da $QD \,\#\, AC$ (p. conſtr.) ſo iſt auch $RU \,\#\, AT$ (§. 61.) folglich da

$$\begin{aligned} AQ &= AQ \quad (\text{Ar. §. 61. 3.}) \\ \angle y &= \angle m \\ \angle u &= \angle o \end{aligned} \quad (\text{§. 57. 2.})$$ ſo iſt auch

---

$\triangle ARQ \cong \triangle AQC$ (§. 43. und §. 65.)

Auf die nemliche Art beweißt man, daß alle übrige $\triangle\triangle$ in der oberſten Reihe RJ ſowohl, als in der unterſten SX dem erſten $\triangle ABC \cong$, folglich lauter gleichſeitige und einander gleiche $\triangle\triangle$ ſind.

§. 205. Tab. VII. F. 133.

Das Netz zu einem Dodecaedron zu zeichnen.

Auflöſung.

1) Man zeichne ein regulares Fünfeck DEFGH (§. 106.)

2) Verlängere ſeine Diagonalen EG und DG unbeſtimmt in L und J.

3) Mache AE und CD = DE und aus A und C mit DE in B Kreuzſchnitte.

4) Ziehe AB und BC, ſo giebt ſich die Figur ABCDE.

5) Auf eben dieſe Art zeichne man die Figuren i, h, g, k, ferner auf g, die Figur e, auf e, a und auf

a; d, c, b, f. So iſt das Netz zum Dodecaedron beſchrieben.

Beweiß.

Es iſt blos zu zeigen, daß die 12 gezeichnete Vielecke, alle ordentliche Fünfecke ſind, welche alle dem erſten DEFGH gleichen (§. 197.) Nun iſt

$\angle y = \frac{\alpha EDGH}{2}$ (§. 87. Z. 2.) und dieſer

$\parallel$ des ordentl. 5ecks (§. 84. 1. u. p. conſtr.)

$\angle y = \angle F$ und aus den nemlichen Gründen

$\angle x = \angle H$ Aber auch

DE $=$ DC $=$ BC $=$ AB $=$ AE (p. conſtr.) Daher iſt

ABCDE $\cong$ DEFGH (§. 114.)

Eben diß, wird auf die nemliche Art von allen übrigen Vielecken bewieſen. Sie ſind demnach alle ordentliche dem erſten DEFGH und folglich unter ſich ſelbſt gleiche Fünfecke. Vortheile, im Praktiſchen der Zeichnung, werden im Vortrage gewieſen.

§. 206. Tab. VI. F. 128.

Verfertigung dieſer Körper aus den gezeichneten Netzen.

Aufloſung.

1) Man ſchneide nach dem Umkreiß des Netzes ABCDEFG—OH alles Ueberflüſſige nicht zum Netz Gehörige weg.

2) Leime an die Seiten des Umkreiſſes GH, KJ ꝛc. ꝛc. ſo daß immer eine, zwiſchen inne, frey bleibt,

ſchmale Streifen Papier, wie hier durch die blinde Linien angezeigt wird.

3) Durchſchneide alle innerhalb des Netzes liegende Linien AD, OL, DL ꝛc. ꝛc. aber nur ſo tief, daß ſich die Seitenflächen nach dieſen Linien biegen laſſen und doch noch hinreichend unter ſich zuſammen hangen.

4) Biege die Seiten ſo zuſammen, daß z. E. hier, CD auf DE, BC auf EF ꝛc. ꝛc. paſſen und leime ſie mit denen vorſtehenden Papierſtreifen an einander, ſo iſt der Körper verfertigt.

Anmerkung.

Die Handgriffe im Ausſchneiden und Zuſammenleimen der Netze, können und müſſen in den Vorleſungen wirklich gezeigt werden. Sehr gut handeln von vielen hier nicht beſchriebenen Netzen: Die Geometrie in Tabellen und Marpurg in ſeinen Anfangsgründen des Progreſſional-Calcul. Unwiſſende, oder Kurzſichtige, erklären dieſen ganzen Abſchnitt für ein kindiſches Spielwerk. Wenn ſie ſich angewöhnen werden, den Einfluß einer Sache auf das ganze Syſtem der Wiſſenſchaften, nicht nur in der Studierſtube, ſondern vorzüglich im menſchlichen Leben, zu unterſuchen, ſo müſſen ſie finden, daß diß anſcheinende Spielwerk

a) Die Erklärungen und Eigenſchafften der Körper, lebhaffter, deutlicher, fruchtbarer;

b) Folglich die Berechnung, ſowohl ihres Innhalts, als ihrer Oberflächen, ungemein leichter mache, wovon uns der unmittelbar folgende Abſchnitt überzeugen wird.

c) Daß es uns aber auch in den Stand ſetze: Modelle in der Mechanik, ja in allen Theilen der angewandten

Mathematik, vorzüglich in der Geographie, Artillerie, bürgerlichen und Kriegs-Baukunſt zu verfertigen, durch welche ſich in einer Stunde mehr und deutlicher, als durch bloſſe Zeichnungen in mehreren Wochen zeigen läßt.

Eilfter Abſchnitt.

Berechnung der Oberflächen ordentlicher ſenkrechter und einiger ſchiefen Körper.

§. 207.

Die Oberfläche eines jeden ordentlichen ſenkrechten Prißma zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man meſſe eine Seite der Grundfläche, multiplicire ſie mit der Anzahl dieſer Seiten, und diß Produkt mit der wahren Höhe des Prißma, ſo iſt das Produkt die Summe der Seitenflächen des ordentlichen Prißma (§. 189. Z. 4. u. §. 128.)

2) Berechne den Innhalt der Grundfläche und nehme ihn doppelt (§. 189. Z. 1.)

3) Addire die doppelte Grundfläche Nro. 2. zu der Nro. 1. gefundenen Summe der Seitenflächen. So hat man die ganze Oberfläche des ordentlichen ſenkrechten Prißma.

Zuſätze.

1) Die Oberfläche des Cubus wird gefunden, wenn man die Grundfläche mit 6 multiplicirt (§. 190. Z. 1.)

2) Wenn das Prißma unordentlich iſt, ſo muß ſtatt Nro. 1. die Summe aller Seiten der Grundfläche mit der wahren Höhe des Prißma multiplicirt werden, um die Summe aller Seitenflächen zu erhalten. Iſt dieſe gefunden, ſo verfährt man nach Nro. 2. und 3.

3) Eben ſo wird die Oberfläche eines ſenkrechten Parallelepipedum gefunden, ohngeachtet ſie ſich auch noch anders nach (§. 191. Z. 3.) finden lieſſe.

4) Im ſchiefen Prißma muß jedes einzelne Parallelogramm der Seitenfläche beſonders ausgerechnet, alle ſummirt und dann erſt die doppelte Grundfläche addirt werden.

§. 208. Tab. VI. F. 118.

Die ganze Oberfläche eines ſenkrechten Cylinders zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man meſſe den Diameter ſeiner Grundfläche und ſuche daraus die Peripherie (§. 137.) aber auch die wahre Höhe des Cylinders.

2) Multiplicire die gefundene Peripherie mit der wahren Höhe des Cylinders, ſo iſt das Produkt die Seitenfläche deſſelben (§. 192. Z. 1. u. §. 207.)

3) Suche den Innhalt der Grundfläche (§. 141.) multiplicire ſie mit 2 (§. 192. Z. 2.) und addire das Produkt zu der Nro. 2. gefundenen Sei-

tenfläche, ſo hat man die ganze Oberfläche des ſenkrechten Cylinders.

Zuſätze.

1) Beym ſenkrechten cylindriſchen Ausſchnitt T. VI. F. 120. ſucht man aus dem Radius AC und dem Ausſchnitts ∠x, den αAB (§. 139.) mißt die Höhe CG, findet hieraus den ebenen Ausſchnitt ABC (§. 143.) das ▭CK (§. 128.) und die krumme Oberfläche ABKL = αAB × BK. Multiplicirt die Grundfläche ABC mit 2, insgleichem das ▭CK, addirt dieſe, und zu ihrer Summe, ABKL, ſo iſt dieſe letzte Summe = der ganzen Oberfläche des ſenkrechten cylindriſchen Ausſchnitts. Folglich iſt ſie (αAB + 2AC) × CG + 2ABC.

2) Und wenn beym ſenkrechten cylindriſchen Abſchnitt T. VI. F. 121. aus DE und MF die Grundfläche DMEF (§. 144.) folglich auch αDFE gefunden, und die wahre Höhe des körperlichen Abſchnitts EJ gemeſſen wird, ſo iſt aus obigen Gründen ſeine ganze Oberfläche = (αDFE + DE) × EJ + 2DMEF.

§. 209. T. VI. F. 125.

Die Oberfläche einer ſenkrechten ordentlichen Pyramide zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man meſſe eine Seite der Grundfläche CDE z. E. CD und multiplicire ſie mit der Zahl der Seiten hier mit 3.

2) Ziehe in einem der Seiten △ △ ACD die Höhe AH ſenkrecht auf CD, meſſe ſie, multiplicire mit ihr das Nro. 1. gefundene Produkt und halbire es.

3) Diß letzte Produkt iſt der Summe aller Seitenflächen der Pyramide gleich, und wenn die Grundfläche CDE berechnet und dazu addirt wird, ſo iſt die Summe = der Oberfläche der ganzen Pyramide = $\underbrace{(CD \times n)\ AH}_{2}$ + CDE (§. 194. Z. 1.)

Zuſätze. Tab. VI. F. 122.

1) Im ſenkrechten Kegel iſt CD × n = p, folglich ſeine Seitenfläche = p × mit der Seite des Kegels : 2 (§. 193. Zuſ. 3.) Folglich wird ſeine Oberfläche gefunden, wenn man die Peripherie der Grundfläche, mit ſeiner Seite multiplicirt, mit 2 dividirt und die Grundfläche dazu addirt.

2) Bey unordentlichen und ſchiefen Pyramiden muß jeder △ der Seitenfläche beſonders berechnet, ihre Innhalte ſummirt und die Grundfläche addirt werden (§. 194. Z. 1.)

Anmerkung.

Die Oberflächen ſchiefer Kegel ſowohl als ſchiefer Cylinder und ihrer Theile, ſind kein Gegenſtand der Elementar-Geometrie. Man ſehe Eulern in Commentar. nov. Petropol. T. I. p. 4.

§. 210. Tab. VI. F. 124.

Die Seitenfläche eines ſenkrechten abgekürzten Kegels iſt, wenn man den Diameter der kleinen Grund-

fläche BE = d, den Diameter der gröſſern CF = D, folglich ihre Peripherien p und P, auch die Seitenlinie EF, α nennet = $\frac{(p+P)}{2}\alpha$ und ſeine ganze Oberfläche = $\frac{(p+P)}{2}\alpha + \frac{pd}{4} + \frac{PD}{4}$.

Beweiß. Tab. VI. F. 124. a.

1) Denn man finde aus D, P und mache AB = P, richte in A eine ſenkrechte Linie AD = der Seitenlinie EF = α auf, ziehe DC ‡‡ AB, mache ſie der aus d gefundenen p gleich und ziehe BC. So iſt ABDC = der Seitenfläche des abgekürzten Kegels FEBC. Da aber ABDC ein Parallel-Trapez iſt (§. 23.) ſo iſt auch ABDC = $\frac{(p+P)}{2}\alpha$ (§. 129.) folglich die Seitenfläche des ſenkrechten abgekürzten Kegels = $\frac{(p+P)}{2}\alpha$. W. Z. E. W.

2) Da ferner die kleine Grundfläche = $\frac{pd}{4}$ und die gröſſere = $\frac{PD}{4}$ (§. 132. Z. 1.) die Summe von dieſen beyden aber mit der Seitenfläche die ganze Oberfläche des Kegels ausmacht, ſo iſt dieſe = $\frac{(p+P)}{2}\alpha + \frac{pd}{4} + \frac{PD}{4}$.

Zuſatz.

Folglich läßt ſich aus dieſen beyden erwieſenen Formeln, ſowohl die Seitenfläche, als die ganze Oberfläche des abgekürzten ſenkrechten Kegels leicht berechnen.

Zwölfter Abſchnitt.

Grund- und Lehrſätze von der Gleichheit gleich-dicker und zugeſpitzter Körper.

§. 211.

Wenn zween Körper einerley Ausdehnung haben, ſo ſind ſie einander gleich, folglich auch, wenn ſie gleichviel und gleich groſſe Theile haben.

§. 212.

Wenn zween Körper einerley Höhe und in jedem Punkt der Höhe gleichgroſſe, mit ihren Grundflächen parallel laufende, Durchſchnittsflächen haben, ſo haben ſie einerley Ausdehnung.

§. 213.

Wenn zween Körper auf einerley Art erzeugt werden, und das, woraus ſie erzeugt werden, in beyden gleich iſt, ſo ſind ſie gleich. Iſt das Erzeugende und die Art der Erzeugung in beyden Körpern ähnlich, ſo ſind die Körper ſelbſt ähnlich.

Beweiß.

Dieſer fließt zwar aus (§. 21. Nro. 2. und 7.) Es erhellt aber auch daraus, weil ſie im erſten Fall einerley Ausdehnung erhalten (§. 211.) und im 2ten durch nichts als die Gröſſe unterſchieden werden können. (Ar. §. 40.)

Zuſatz.

Körper, welche in gleichviele und ähnliche Flächen, die einerley Lage haben, eingeſchloſſen ſind, ſind ähnliche Körper, und umgekehrt.

§. 214. Willkührlicher Satz.

Um in der Folge uns ſo kurz als möglich ausdrücken zu können, ſoll künftig (wo es nicht ausdrücklich bemerkt wird) b die Grundfläche, a aber die Höhe eines jeden Körpers anzeigen.

§. 215.

Alle Parallelepipede, in welchen b = b u. a = a, ſind einander gleich.

Beweiß.

1) Bey ſenkrechten Parallelepipeden iſts aus (§. 213. und §. 191.) klar, da ſie auf einerley Art aus Gleichem erzeugt werden.

2) Nun ſetze man zwiſchen zwo parallel laufende Ebenen T. VII. F. 134. UR und MN 3 Parallelepipeden, ein ſenkrechtes OP und zwey ſchiefe QR u. ST. Dieſe haben einerley Höhe (§ 181.) Man mache ihre Grundflächen A = B = C, ſo ſind auch ihre erzeugende Flächen D = E = F (§. 191. Z. 1.) Man durchſchneide alle 3 durch die mit der Ebene MN ‡‡ laufende Ebene KL, ſo iſt folglich in

QR und OP, desgleichen im OP und TS

$$\begin{array}{ccccccc} F & = & E & & E & = & D \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ J & = & H & \text{Daher (§. 212.)} & H & = & G \\ \hline QR & = & OP & \text{und} & OP & = & TS \text{ total.} \\ \hline & & & QR = TS & & & \end{array}$$

Denn diß, was im Durchſchnitt KL, von den Flächen G, H und J eben bewieſen wurde, kann, von allen möglichen parallelen Durchſchnitten, eben ſo bewieſen werden.

Zuſätze.

1) Daher ſind auch alle Prißmata, wenn ſie einerley Grundflächen und Höhen haben, einander gleich, indem der nemliche Beweiß vollkommen auf ſie paßt.

2) Aber auch alle Cylinder, wenn b = b und a = a, werden einander gleichen (§. 192. Z. 1.)

§. 216. Tab. VII. F. 135.

Wenn ein Parallelepiped nach ſeiner Diagonalfläche BD durchſchnitten wird, ſo entſtehen 2 gleiche dreyeckigte Prißmata ABEDFG = BEHCDF.

Beweiß.

Denn AH = GC (§. 191. Z. 1.) folglich auch $\frac{AH}{2} = \frac{GC}{2}$. Nun iſt

$$\begin{array}{ccccccc} ABE & = & BEH & \text{und} & GDF & = & CDF \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ \frac{AH}{2} & & \frac{AH}{2} & & \frac{GC}{2} & & \frac{GC}{2} \end{array}$$

(§. 95.) allein Daher iſt

ABE = GDF und BEH = CDF, alſo die beyde Körper ABEDFG und BEHCDF nicht nur Prißmata (§. 189.) ſondern auch gleiche Prißmata (§. 215. Z. 1.)

§. 217. Tab. VII. F. 136.

Alle ebene zugeſpitzte Körper, in welchen b = b und a = a ſind einander gleich.

Beweiß.

Denn man lege mit der Ebene LMN eine andre Ebene AB parallel, und ſetze zwiſchen dieſe beyde Ebenen die dreyeckigte Pyramiden CLMN u. DLMN, ſo, daß ſie auf einerley Grundfläche LMN ſtehen und mit ihren Spitzen C und D die Ebene AB berühren. So haben ſie einerley Höhe (§. 181.) Nun durchſchneide man beyde, durch die Ebene EFJK parallel mit ihrer Grundfläche LMN, ſo iſt (§. 194. Z. 3.) $\triangle EGF \backsim \triangle LMN$ und $\triangle HJK \backsim \triangle LMN$, daher

---

$\triangle EGF : \triangle LMN = \triangle HJK : \triangle LMN$ u. (Ar. §. 217.)

$\triangle EGF : \triangle HJK = \triangle LMN : \triangle LMN$ Da aber
1 : 1 = || ſo iſt (Ar. §. 203.)

$\triangle EGF : \triangle HJK = 1 : 1$ das iſt $\triangle EGF = \triangle HJK$
Da nun diß von allen möglichen parallel mit der Grundfläche laufenden Durchſchnitten, bewieſen werden kann, ſo iſt auch die Pyramide CLMN = der Pyramide DLMN (§. 212.) und nach (§. 194.

Z. 4. und 5.) alle Pyramiden, folglich auch alle Kegel (§. 194. Z. 6.) und alſo überhaupt alle zugeſpitzte Körper, in welchen b=b und a=a einander gleich.

Zſatz.

Da ſich der nemliche Beweiß auch bey abgekürzten Körpern anbringen läßt, ſo iſt dieſer Satz auch von ihnen wahr.

§. 218. Tab. VII. F. 137.

Alle ebene zugeſpitzte Körper ſind $\frac{1}{3}$ von allen gleichdicken, ſobald in beyden b=b und a=a.

Beweiß.

Denn, wenn die dreyeckigte Pyramide ABCF $\frac{1}{3}$ vom dreyeckigten Prißma AFCEBD iſt, ſo wird jeder zugeſpitzte Körper, unter obiger Bedingung, $\frac{1}{3}$ von jedem gleichdicken Körper ſeyn (§. 194. Z. 4. und 6. §. 189. Z. 5. und §. 192. Z. 1.) Es iſt aber das erſte richtig, denn: Man ziehe im Prißma AE die Linien AB, BC und DC ſo entſtehen, wenn es nach dieſen Linien durchſchnitten wird, drey Pyramiden ABCF, DECB und ADBC, welche alle einander gleich ſind, da ſie einerley Grundflächen und Höhen haben (§. 217.) Sind nun alle 3 zuſammen dem ganzen Prißma gleich, ſo muß eine, z. E. hier ABCF, $\frac{1}{3}$ von demſelbigen ſeyn.

Anmerkung.

Keine einfache Zeichnung iſt fähig, die letzte Pyramide ADCB, dem Auge deutlich vorzuſtellen. Der Beweiß muß

daher im mündlichen Vortrag, durch ein wirklich zerſchnittenes Prißma, erſt ſeine volle Klarheit erhalten. Eine Bemerkung, welche faſt auf alle Stereometriſche Sätze paßt. Siehe (§. 206. Anm.)

Dreyzehender Abſchnitt.

Von der Kugel,

I. Und zwar Ihrer Oberfläche und deren Theilen.

§. 219.

Wenn man den Diameter einer jeden Kugel d und ſeine Peripherie p nennt, ſo iſt die Kugelfläche = pd, oder ſie wird gefunden, wenn man den Kugeldiameter mit ſeiner Peripherie multiplicirt.

Beweiß. T. VIII. F. 138.

1) Man ziehe eine von denen unendlich kleinen Kugel-Tangenten CD, deren halbe Summe der halben Peripherie AFB gleich iſt (§. 195. Z. 2.) und aus dem Berührungspunkt F, auf die Achſe AB die ſenkrechte Linie FP, aber auch aus den Endpunkten der Tangente C und D, auf die nemliche Achſe, die ſenkrechte Linien CH und DT, ferner aus F den Radius OF und aus C auf DT die ſenkrechte Linie CS.

2) Nun iſt CF = DF (§. 112.) und da PF ‡‡ DT (§. 62.) ſo iſt auch EF ‡‡ DS, folgl. $\triangle$CEF ∽ $\triangle$CDS (§. 68.) Daher CF : DF = CE : ES und weil CF = DF auch CE = ES und da HP = EC und PT = ES (§. 95. Z. 1. und §. 23.) folglich

3) CH und DT gleichweit von PF entfernt. Wenn ſich aber das Paralleltrapez CDTH um die unbewegliche Achſe AB in die Ründung bewegt, ſo beſchreibt es einen abgekürzten Kegel (§. 193.) und die Tangente CD ſeine Seitenfläche, die ſenkrechte Linien CH, FP und DT aber, werden parallele Cirkel beſchreiben, von welchen ſie Radii ſind. Dieſe ſollen, Kürze halben, durch P(CH), P(FP), P(DT) vorgeſtellt werden.

4) Es iſt alſo die P (FP) gleichweit von P (CH) und P(DT) entfernt, welche die Grundflächen des beſchriebenen abgekürzten Kegels ſind. Da aber die Seitenfläche dieſes abgekürzten Kegels =

$\underbrace{P(CH) + P(DT) : 2} \times CD$ (§. 210.) und
||
P(PF) (Ar. §. 214.) ſo iſt auch

$P(PF) \times CD$ = der Seitenfläche des nemlichen abgekürzten Kegels.

5) Nun iſt ferner $\llcorner o = \llcorner x$ (p. conſtr.) und da $\angle u = \angle m$ (§. 57. 3.) $\angle m$ aber $= \angle y$ (§. 87.) ſo iſt auch $\angle u = \angle y$ (Ar. §. 62.) folglich der $\triangle CDS \backsim \triangle FOP$ Daher

6) CD : CS = FO : FP allein da
||
HT ſo iſt

CD : HT = FO : FP und weil (§. 136. 3.6.)
P(FO) : P(FP) = = = || ſo iſt auch (Ar. §. 203.)

CD : HT = P(FO) : P(FP) Daher

$CD \times P(FP) = HT \times P(FO)$

7) Weil aber CD × P(FP) = der Seitenfläche, des, Nro. 3. beſchriebenen, abgekürzten Kegels (Nro. 4.) ſo muß auch HT × P(FO) = dem Innhalt der nemlichen Seitenfläche ſeyn (Nro. 6.)

8) Sie wird alſo gefunden, wenn die p eines größten Cirkels der Kugel (§. 195. Z. 5.) mit der Höhe des unendlich niedrigen abgekürzten Kegels multiplicirt wird.

9) Nun läßt ſich das nemliche, eben ſo, von allen Seitenflächen aller abgekürzten Kegel, deren Summe = der Kugelfläche (§. 195. Z. 2.) beweiſen. Allein die Summe ihrer Höhen iſt = AB = d, folglich iſt die Kugelfläche = pd.

Zuſätze.

1) Man beſchreibe um die Kugel einen Cylinder AB T. VII. F. 139, ſo iſt ſein Diameter AC ſowohl als die Höhe AD = dem Diameter der Kugel, folglich alle 3 = d und die Grundfläche des Cylinders wird dem größten Durchſchnittscirkel der Kugel gleichen. Nun iſt die Seitenfläche des Cylinders = pd (§. 208. Nro. 2.) aber auch die Kugelfläche = pd. Es iſt folglich die Kugelfläche der Kugel, der Seitenfläche des um ſie beſchriebenen Cylinders gleich.

2) Und da der größte Durchſchnittscirkel der Kugel $= \frac{pd}{4}$ (§. 132. Z. 1.) ſo verhält ſich die Kugelfläche zum größten Durchſchnittscirkel der Kugel $= pd : \frac{pd}{4} = 4pd : pd = 4 : 1$.

3) Die ganze Oberfläche, des um die Kugel beſchriebenen Cylinders, verhält ſich zur ganzen Kugelfläche = 3 : 2. Denn die erſtere iſt = pd + $\frac{pd}{2}$ = $\frac{3pd}{2}$ (§. 208.) die letztere = pd folglich iſt S. Cyl : S. S = $\frac{3pd}{2}$: pd = 3pd : 2pd = 3 : 2 (Ar. §. 217.)

4) Und die erhabene Oberfläche einer Kugelhaube T. VII. F. 140. CED iſt = p × EF (Nro. 8.) ſie wird alſo gefunden, wenn man die p eines größten Cirkels der Kugel mit der Höhe der Kugelhaube multiplicirt.

5) Da AEGB = p × EG und CEFD = p × EF (Zuſ. 4.) allein AEGB — CEFD = ACDB oder dem Gürtel der Kugel, ſo iſt die Oberfläche dieſes Gürtels = p × GF oder ſie wird gefunden, wenn man die p eines größten Cirkels der Kugel mit der Höhe des Gürtels multiplicirt.

6) Der Kugelausſchnitt HJLK iſt = dem ſenkrechten Kegel HJMK + dem Kugelabſchnitt JMKL, folglich ſeine ganze Oberfläche = $\frac{P(JK) + JH}{2}$ + p × LM (§. 209. Z. 1. und vorhergehender Z. 4.)

Anmerkung.

Dieſe Berechnungen haben vorzüglich in der Artillerie bey den Minen ihren Nutzen. Siehe Belidors vermiſchte Werke, ſo wie die Formel pd den Beweiß für (M. G. §. 175.) enthält, woſelbſt eine artige Anwendung davon gemacht wird.

§. 220.

Die Oberflächen ähnlicher Körper verhalten ſich wie die Quadrate ihrer gleichnamigten Seiten.

Beweiß.

Denn ſie beſtehen aus lauter ähnlichen Flächen (§. 213. Z. 1.) Dieſe aber verhalten ſich wie die Quadrate ihrer gleichnamigten Seiten (§. 136.) Folglich verhalten ſich auch die Oberflächen ähnlicher Körper, wie die Quadrate ihrer gleichnamigten Seiten.

Zuſatz.

Kugeln ſind ähnliche Körper (§. 213.) und ihre Diameter gleichnamigte Linien, daher verhalten ſich zwo Kugelflächen wie die Quadrate ihrer Diameter. Oder $S.S : s.s = D^2 : d^2$. Diß erhellt noch überzeugender auf folgende Art:

$S.S : s.s = PD : pd$ (§. 219.) aber auch (: 4

$S.S : s.s = \frac{PD}{4} : \frac{pd}{4}$ (Ar. §. 217.) Nun iſt
$D^2 : d^2 = ||$ (§. 136. Z. 4.) Daher (Ar. §. 203.)

$S.S : s.s = D^2 : d^2$

Ein Satz, der in der Artillerie, bey Berechnung der Bewegung der Kugeln und des Widerſtands, den ſie von der Lufft leiden, merkwürdig wird.

II. Vom körperlichen Innhalt der Kugel und ihrer Theile.

§. 221.

Die Kugel iſt einer Pyramide gleich, deren Grundfläche $= pd$ oder der Kugelfläche und deren Höhe $= r$.

Beweiß.

Beyde haben, unter dieſer Bedingung, gleich viel und gleich groſſe Theile (§. 211.) Gleich viele Theile, denn man durchſchneide nach unzähligen Richtungen die Kugel durchs Centrum, ſo entſtehen unendlich viele unendlich kleine Pyramiden, deren Grundflächen zuſammen = der Kugelfläche ſind und von welchen jede r zur Höhe hat. Nun zeichne man ein ▭, deſſen Grundlinie = p, und deſſen Höhe = d, ſo iſt das ▭ = pd. Auf dieſem können alle Pyramiden, in welche die Kugel zerſchnitten würde, ſtehen, und wenn man ihnen zur Höhe r giebt, ſo iſt jede einzeln, jeder aus der Kugel genommenen einzelnen Pyramide, folglich auch alle zuſammen, der ganzen Kugel gleich. Allein ihre Summe gleicht der groſſen Pyramide, welche pd zur Grundfläche und r zur Höhe hat, folglich iſt auch dieſe ganze Pyramide der ganzen Kugel gleich.

Zuſätze.

1) Die Kugel iſt folglich $\frac{1}{3}$ von einem Cylinder, deſſen Grundfläche = pd oder der Kugelfläche und deſſen Höhe = r oder dem Radius der Kugel (§. 218.)

2) Der Kegelförmige Ausſchnitt der Kugel ADEC T. VII. F. 141. iſt einem Kegel gleich, deſſen Grundfläche = der Grundfläche der Kugelhaube ABDEF und deſſen Höhe = r oder dem Radius der Kugel.

3) Der Kugelabſchnitt JMKL iſt dem Ausſchnitt T. VII. F. 140. weniger dem Kegel gleich, der mit dem Abſchnitt einerley Grundfläche, und zur Höhe, r — ML, oder den Radius der Kugel, weniger der Höhe des Abſchnitts, das iſt, HM hat.

4) Wenn der Gürtel ABON von einem größten und kleinern Cirkel der Kugel eingeſchloſſen iſt, ſo iſt ſein körperlicher Innhalt = der halben Kugel weniger dem zu ihm gehörigen kleinern Abſchnitt AEBG. Iſt er aber von zween kleinern Cirkeln CD und AB eingeſchloſſen, ſo iſt er = der ganzen Kugel weniger dem gröſſern und kleinern ihm zugehörigen Abſchnitt.

§. 222. Tab. VIII. F. 142.

Die Kugel iſt $\frac{2}{3}$ vom Cylinder, wenn des Letztern Grundfläche = der Fläche des größten Durchſchnittscirkels der Kugel und ſeine Höhe = dem Radius.

Beweiß.

Man zeichne eine halbe Kugel AFBC und über ihrem Diameter AB, einen Cylinder, deſſen Höhe AE = AC dem Radius der Kugel. Der Cylinder heiſſe C, die Kugel S, die Seitenfläche von C = S. C, die Kugelfläche = S. S. Man ziehe CE und CD und nenne den Kegel EFDC = Con. Nun ziehe man aus C unendlich viele Radios auf die Kugelfläche, ſo entſtehen unendlich viele Pyramiden, welche, zur Summe aller ihrer Grundflächen, die Kugelfläche, und zur gemeinſchaftlichen Höhe den Radius AC haben. Man

verlängere die zwiſchen AH und BG liegende Radios, bis in die Seitenfläche des Cylinders, ſo entſtehen eben ſo viele Pyramiden als in der Kugel liegen und die Summe ihrer Grundflächen, wird der Summe der Grundflächen der in der Kugel enthaltenen Pyramiden gleichen, indem ja S. C = S. S. (§. 219. Z. 1.) Sie werden aber auch einerley Höhe AC mit demſelbigen haben, folglich alle auf S. C ſtehende Pyramiden, zuſammen genommen, allen auf S. S. ſtehenden Pyramiden gleich ſeyn. Das iſt AECBD = der S. AFBC. Da nun

$$C = C$$ (Ar. §. 61. Z.)

$$Con = \frac{C}{3}$$ (§. 218.) ſo iſt auch

$$C - Con = \frac{2C}{3}$$ (Ar. §. 63.) allein da

$$C - Con \;||\; AECBD = S$$ (p. dem.) ſo iſt

$$S = \frac{2C}{3}$$

Und da ſich die Ganze wie die Hälften verhalten, ſo iſt auch die ganze Kugel $\frac{2}{3}$ vom Cylinder, deſſen Grundfläche = der Fläche des größten Durchſchnittscirkels der Kugel und deſſen Höhe = dem Radius derſelben.

Anmerkung.

Dieſen herrlichen Satz erfand Archimed, wovon das Mehrere in der Geſchichte der Geometrie.

Vierzehender Abſchnitt.

Vom Stereometriſchen Maas und wirklicher ausübender Ausmeſſung der Körper.

§. 223.

Der Maasſtab zum Ausmeſſen der Körper muß ſelbſt ein Körper ſeyn (§. 28.) Dieſer wird folglich zur Einheit angenommen, und die Zahl, welche beſtimmt, wie oft dieſer Maasſtab in einem Körper enthalten ſeye, iſt der Innhalt des gegebenen Körpers. Mit Grund wählte man hierzu den Cubus, da eine einige Linie oder die Seite ſeiner Grundfläche ſeine ganze Ausdehnung beſtimmt (§. 190.) Eine Cubikruthe iſt alſo ein Cubus, deſſen Seite eine Ruthe iſt, Ein Cubikſchu, deſſen Seite = 1′, Ein Cubikzoll, deſſen Seite = 1″ ꝛc. ꝛc.

§. 224.

Wenn man den Innhalt eines Parallelepipeds zu finden wüßte, ſo wär es leicht, den Innhalt aller übrigen bisher erklärten Körper zu finden.

Beweiß.

Denn alle gleichdicke Körper, in welchen b = b und a = a, ſind einander gleich (§. 215. mit ſeinen Zuſätzen) und alle zugeſpitzte Körper, ſind, von gleichdicken, welche mit ihnen gleiche Grundflächen und Höhen haben, $\frac{1}{3}$ (§. 218.) Ferner iſt der Innhalt der Kugeln und ihrer Theile in Beziehung auf den Cy-

Ander beſtimmt (§. 222.) Folglich lieſſe ſich der Innhalt aller gleichdicken Körper, wie der Innhalt eines Parallelepipeds, der Innhalt aller zugeſpitzten und Kugeln aber, nach §. 215. und 222. finden.

§. 225. Tab. VII. F. 135.

Der Innhalt eines ſenkrechten Parallelepipeds wird gefunden, wenn man ſeine Grundfläche mit ſeiner Höhe, oder ſeine 3 ungleiche Seiten in einander multiplicirt, d. i. er iſt = ab oder cdm.

Beweiß.

Es ſeye GK eine Seite des kleinen Cubus GM, ſo iſt klar, daß ſo viele gleichgroſſe Cubi nebeneinander auf der Linie GF ſtehen können, ſo vielmal GK in GF enthalten iſt. Und an GD laſſen ſich gleichfalls ſo viele eben ſo groſſe Cubi ſetzen, ſo vielmal GK in GD ſteckt. Folglich wird die Zahl der Cuborum, welche auf der Grundfläche GC ſtehen können, gefunden, wenn man DC = GF mit CF = GD multiplicirt, ſie wird cd ſeyn (§. 128.) Da ſich ferner der Cubus GM eben ſo oft an die Linie AG ſetzen läßt, als GN = GK in AG enthalten iſt, und das Parallelepiped unter die Claſſe der gleichdicken Körper gehört (§. 187. und §. 191.) ſo wird die, mit der Seite GK gemeſſene Linie AG, beſtimmen, wie vielmal die, auf der Grundfläche GC enthaltene Anzahl von Cubis, in dem ganzen Parallelepiped GH enthalten ſeye, und man wird ihre Summe finden, wenn GC mit AG multiplicirt wird (Ar. §. 50.) Es wäre alſo

$$GC \times AG = \text{dem Innhalt von } GH \ (\S. 223.)$$
aber auch || ||
b a folglich iſt

$$ab = \text{dem Innhalt des Parallelepipeds } GH$$

und da $b = cd$ (§. 128.) $a = m$ (§. 186. u. §. 16.) ſo iſt auch $ab = HG = cdm$.

Zuſätze.

1) Daß ſich der nemliche Satz auf den Cubus anwenden laſſe, erhellt aus dem Begriff deſſelbigen. Da aber auch in dieſem $c = d = m$ (§. 190. Z.) ſo iſt ſein Innhalt $c \times c \times c = c^3$

2) Folglich iſt, da in der Decimal-Cubickruthe $c = 10'$, die Anzahl der Schuhe der Cubickruthe $= 1000'$. Ein Cubickſchuh $= 1000''$, ein Cubickzoll $= 1000'''$. Im 16ſchuhigen Maas wird die Cubickruthe 4096', im 12ſchuhigen 1728', im 6ſchuigen 216' halten (§. 32. und 127.) Es Es hat aber auch in dieſen 3 Arten von gemeinem Maas, der Schuh immer 1728'', der Zoll 1728''', die Linie 1728'''' ꝛc. ꝛc. nur im franzöſiſchen Maas wird die Linie 1000'''' enthalten (§. 28.)

3) Die Begriffe der Cubickmeilen und Cubickſtunden flieſſen aus (§. 223.) Daß auch hier Decimal- und gemeines Cubickmaas ſtatt finde, je nachdem die Seite des Cubus mit Decimal- oder gemeinem Maas gemeſſen wird, erhellt aus (Z. 2.)

4) Folglich verhalten ſich auch die verſchiedene Cubickſchuhe, wie die Cubickzahlen ihrer (§. 29.)

beſtimmten Längen Schuhe, und der Geometer wird ſich hier, des (§. 30.) angegebenen Vortheils um ſo mehr bedienen, um immer mit dem bequemen Decimalmaas zu arbeiten, je unerträglicher in kleinen Theilen die Berechnungen nach gemeinem Maas ſind.

5) Da ſich, wenn ſonſt keine Umſtände entſcheiden, unmöglich beſtimmen läßt, ob 385° oder $930''$ Längen, Flächen oder Cubickmaas ſind, ſo drücke man ſich, wenn es Cubickmaas iſt, in zweiffelhafften Fällen alſo aus: $385^{\circ c}$ u. $930''^{c}$.

6) Alle hieher gehörige Regeln vom Decimal-Cubikmaas, ſiehe (M. G. §. 150. und 151.) Hier gründen ſich:

a) Gröſſere Sorten in kleinere
b) Kleinere — — gröſſere
c) Verſchiedene — eine
} zu verwandlen auf Zuſ. 2.

d) Addition und
e) Subtracktion
} verändern auch hier das Maas nicht.

f) In der Multiplikation
g) Und Diviſion iſt

I. Entweder ein Faktor, oder der Diviſor eine unbenannte Zahl, dann geben das Produkt und Quotient das vorige Maas (Ar. §. 113. und 114.)

II. Oder es wird □ Maas mit Längenmaas multiplicirt, ſo erhält man Cubickmaas, nach dem Beweiß des gegenwärtigen §. 225. Folglich iſt $l \times q = lq = c$.

III. Daher iſt $\frac{lq}{l} = q$ und $\frac{lq}{q} = l$.

h) Und da $\sqrt[3]{c^3} = c$, ſo iſt auch die Cubickwurzel, aus Cubickmaas, Längenmaas.

i) Das gemeine Maas wird nach (Ar. §. 169. und folg.) verbunden mit Zuſ. 2. behandelt. Von der wirklichen Ausübung mündlich.

§. 226.

Auch hier fließt aus (§. 225.) folgende bequeme Tabelle, von welcher I. die Verhältnüſſe der vier uns wichtigſten Cubickruthen, Schuhe ꝛc. ꝛc. II. aber, die Verhältnüſſe, der uns wichtigſten Cubickſchuhe, in Decimaltheilen, enthalten.

I. Decimalruthen.	Sechzehnſchuh. Ruthe.
1°.	1°.
1000′.	4096′.
1000000″.	7077888″.
1000000000‴.	12230690464‴.
1000000000000^{IV}.	21134633121792^{IV}.
I. Zwölfſchuige Ruthe	Sechsſch. franz. Ruthe.
1°.	1°.
1728′.	216′.
2985984″.	373248″.
5159780352‴.	644972544‴.
8916100448256^{IV}	644972544000^{IV}
II. Pariſer Schuh.	Londner Schuh.
2985984000000.	2468585365875.
II. Rheinländ. Schuh	Durl. Unterl Schuh.
2693161239497.	1913089213944.

Zuſatz.

Alle §. 32. gemachte Folgerungen, paſſen mit ſehr kleinen Abänderungen, auch hieher. Nur verſteht ſich von ſelbſt, daß die Verwandlungen des Decimal- in gemeines Maas, und umgekehrt, nach (Ar. §. 220.) und M. G. §. 152.) vorgenommen werden.

§. 227.

Den Innhalt eines jeden gleichdicken Körpers zu finden.

Aufloͤſung und Beweiß.

1. Man ſuche ſeine Grundfläche (§. 145. u. 131.)
2. Aber auch ſeine Höhe (§. 37. und §. 75.)
3. Multiplicire die erſte mit der letztern, ſo iſt das Produkt der Innhalt des gleichdicken Körpers (§. 224. und 225.)

Zuſätze.

1) Hierauf beruht (M. G. §. 171.) ingleichem (§. 172. 1. 2. 3. 7.)

2) Der Innhalt des Cubus wird gefunden, wenn man ſeine Seite mißt und zur dritten Dignität erhebt (§. 225. Z. 1.)

3) Und der Innhalt des Parallelepipeds, wenn man ſeine drey ungleiche Seiten mißt und in einander multiplicirt (§. 225.)

4) Im Cylinder iſt $b = \frac{pd}{4}$ folglich $ab = \frac{apd}{4} = \frac{a}{4} \times pd = a \times \frac{pd}{4} = ap \times \frac{d}{4} = ad \times \frac{p}{4}$ worauf ſich (M. G. §. 172. 4.) gründet.

§. 228.

Den Innhalt eines jeden zugeſpitzten Körpers zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man berechne ihn wie einen gleichdicken Körper (§. 227.)

2) Dividire dieſen Innhalt mit 3, ſo iſt der Quotient der Innhalt des zugeſpitzten Körpers (§. 218.)

Zuſätze.

1) Folglich der Innhalt aller zugeſpitzten Körper $= \frac{ab}{3}$

2) Im Kegel iſt $b = \frac{pd}{4}$ folglich hier $\frac{ab}{3} = \frac{apd}{12}$ oder $\frac{a}{12} \times pd = a \times \frac{pd}{12} = ap \times \frac{d}{12} = \frac{a}{3} \times \frac{pd}{4}$ ꝛc. ꝛc.

3) Folglich iſt die Kugel $= pd \times \frac{r}{3}$ (§. 221. Z. 1. und hier vorgehender Zuſ. 2.) und da $\frac{r}{3} = \frac{d}{6}$ ſo iſt $S = \frac{pd^2}{6}$

4) Wem der §. 222. vorgetragene Beweiß des Archimedäiſchen Lehrſatzes zu ſchwer iſt, der kann ihn nun aus (Zuſ. 3. und §. 227. Z. 4.) ſpielend erweiſen. Denn da $S = \frac{pd^2}{6}$ und in C, $b = pd$, $a = d$, ſo iſt $C = \frac{pd^2}{4}$ folglich

$$S : C = \frac{pd^2}{6} : \frac{pd^2}{4}$$

$$S : C = \frac{4pd^2}{24} : \frac{6pd^2}{24} \text{ (Ar. §. 132.)}$$

$$S : C = 4pd^2 : 6pd^2 \text{ (Ar. §. 123. Nro. 18.)}$$

$$S : C = 4 : 6 \text{ (Ar. §. 217.) u. : 2)}$$

$$S : C = 2 : 3$$

§. 229.

Wenn man bey abgekürzten Körpern (§. 187.) nur die Höhe des ganzen Körpers wüßte, ſo lieſſe ſich aus der gegebenen Höhe des abgekürzten und ſeinen beyden Grundflächen, ſein Innhalt ohne Mühe finden. Er wäre allezeit = dem ganzen Körper, wovon der abgekürzte ein Theil iſt, weniger dem abgeſchnittenen. Diß führt uns auf die Aufgabe: Aus den gegebenen Radiis der groſſen und der kleinen Grundfläche eines abgekürzten Kegels und ſeiner Höhe, die Höhe des ganzen Kegels, wovon der erſtere ein Theil iſt, und die Höhe des abgeſchnittenen Stücks zu finden.

Aufloſung. T. VIII. F. 143.

I. Es ſeye im ſenkrechten abgekürzten Kegel EFHJ, DF = r, CE = R und man ziehe GF ſenkrecht auf CE, ſo iſt GF = CD = der Höhe des abgekürzten Kegels = a, auch CG = DF = r, EG = R — r und endlich die Höhe des abgeſchnittenen Kegels BD = α, auch BC die

Höhe des ganzen Kegels = A. Nun iſt △EFG ∽ △BCE (§. 68.) weil GF ⌗ BC (§. 62.) Daher iſt gewiß

EG : GF = EC : BC oder da
‖ ‖ ‖ ‖
R—r : a = R : A folgl. auch (A. §. 220.)

$$\frac{aR}{R-r} = A$$

Folglich wird im abgekürzten ſenkrechten Kegel die Höhe des ganzen Kegels gefunden: Wenn man den Radius der groſſen Grundfläche mit der Höhe des ſenkrechten abgekürzten Kegels multiplicirt und mit der Differenz des groſſen und kleinen Radius dividirt. Und da

A = a + α auch a = a ſo iſt

A—a = α, oder die Höhe des abgeſchnittenen Kegels wird gefunden, wenn man von der gefundenen Höhe des ganzen Kegels die gegebene Höhe des abgekürzten abzieht.

II. Es ſeye im ſchiefen abgekürzten Kegel FEKL T. VIII. F. 144. der kleine Radius BE = r, der groſſe Radius CF = R, die kleinſte Seite des abgekürzten = a und die kleinſte Seite des abgeſchnittenen = α, die kleinſte Seite des ganzen Kegels = A = a + α; die Höhe des abgekürzten EG = JH = h; die Höhe des abgeſchnittenen DJ = c, die Höhe des ganzen Kegels DH = H = h + c, ſo iſt, weil △CFD ∽ △BDE (§. 68.) Da BE ⌗ CF)

$CF : BE = DF : DE$ aber auch (Ar. §. 217.)

$CF - BE : BE = DF - DE : DE$

|| || || || Daher

$R - r : r = a : \alpha$ folgl. (Ar. §. 220.)

$\frac{ar}{R-r} = \alpha$ folglich $A = a + \alpha$ bekannt.

Es iſt aber auch $\triangle EFG \backsim \triangle DFH$ (weil $EG \# DH$ §. 62. und 68.) folglich

$EF : EG = DF : DH$ und weil

|| || || || ſo iſt

$a : h = A : H$ Daher (Ar §. 220.)

$\frac{Ah}{a} = H$ und $c = H - h$

Es wird demnach die Höhe des ganzen ſchiefen Kegels gefunden, wenn man die kleinſte Seite des ganzen Kegels, mit der Höhe des abgekürzten multiplicirt, und mit der kleinſten Seite des abgekürzten dividirt. Und die Höhe des abgeſchnittenen ſchiefen Kegels wird gefunden, wenn man von der gefundenen Höhe des ganzen Kegels die Höhe des abgekürzten abzieht.

§. 230.

Den Innhalt eines jeden abgekürzten Kegels zu finden.

Auflöſung und Beweiß. T. VIII. F. 143.

1) Man ſuche aus den gegebenen R, r und a; A und α (§. 229.)

2) Aus dieſen die Innhalte des ganzen Kegels EBJ und des abgeſchnittenen BFH (§. 228.)

3) Ziehe den abgeſchnittenen Kegel vom ganzen ab, ſo bleibt der Innhalt des abgekürzten Kegels EFHJ übrig (§. 229.)

Zuſätze.

1) Da nun im ſenkrechten Kegel

$$B = \frac{PR}{2} \text{ und } b = \frac{pr}{2} \quad (\S. 141.)$$

$$A = A \; . \; . \; a = \alpha \quad \text{ſo iſt}$$

$$\frac{AB}{3} = \frac{APR}{6} \; ; \; \frac{ab}{3} = \frac{\alpha pr}{6} \quad \text{folglich}$$

der ſenkrechte abgekürzte Kegel $= \frac{APR}{6} - \frac{\alpha pr}{6}$

2) Folglich der ſchiefe abgekürzte Kegel T. VIII. F. 144. FEKL $= \frac{HPR}{6} - \frac{cpr}{6}$

3) Bey abgekürzten Pyramiden, läßt ſich die nemliche Methode, wie §. 229. und 230. mit einigen kleinen Abänderungen, anwenden, wovon mündlich.

Anmerkung.

In dem §. 229. und 230. liegt der Beweiß von der M. G. §. 174. angegebenen 2ten Art, den Innhalt abgekürzter Körper zu finden. Vor der erſten unrichtigen hat ſchon Käſtner §. cit. gewarnet nnd diß in ſeinen Anfangsgründen 1. Theil p. 335. 2te Ausgabe bewieſen. Kürzere Methoden für die Ausübung, dergleichen Häſeler T. II. §. 366. und 368. und noch kürzer De la Chapelle Inſtitut. de Geom. T. II. §. 388. vortragen, ſind, in Rückſicht auf die Beweiſſe, für diß Lehrbuch zu weitläuftig.

§. 231.

Den Innhalt einer Kugel zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man meſſe den Diameter.

2) Suche aus dieſem dieſem die Peripherie (§. 137.)

3) Multiplicire das Quadrat des Diameters mit der Peripherie und dividire diß Produkt mit 6, ſo iſt der Quotient der Cubick-Innhalt der Kugel (§. 228. Z. 3.) Wie d im kleinen und groſſen zu finden, mündlich.

§. 232. Tab. VII. F. 140.

Den Innhalt eines Pyramidenförmigen Kugelausſchnitts zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man meſſe den Radius JH und den ∠ JHK.

2) Zeichne aus dieſen den Ebenen Ausſchnitt JHKL und ziehe JK, um ML, die Höhe der Kugelhaube meſſen zu können.

3) Suche aus JH die Peripherie des gröſten Cirkels der Kugel (§. 137.)

4) Hieraus und aus ML die erhabene Oberfläche der Kugelhaube JMKL (§. 219. Z. 4.)

5) Multiplicire dieſe mit dem Radius JH und dividire das Produkt mit 3, ſo iſt der Quotient der

Cubick-Innhalt des Pyramidenförmigen Kugel-Ausſchnitts (§. 221. Z. 2.)

Anmerkung.

In der Ausübung muß man auf bequeme Arten, die hier verlangten Data genau zu finden, ſinnen, wozu oft sehr viel Anwendung der Geometrie und Trigonometrie erfordert wird.

§. 232. a. Tab. VII. F. 140.

Den Cubick-Innhalt eines Kugelabſchnitts zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man meſſe den Diameter der ebenen Grundfläche des Abſchnitts JK und die Höhe des Abſchnitts ML.

2) Suche daraus den Radius HL des ebenen Ausſchnitts JHKL nebſt dem ∠ JHK (§. 144. 1. 2. 3 4.) wie auch HM = HL — ML.

3) Ferner den Pyramidenförmigen Kugelausſchnitt JHKL (§. 232.)

4) Ingleichem den Kegel JMKH (§. 228.)

5) Ziehe dieſen Nro. 4. gefundenen Kegel von dem Nro. 3. gefundenen Ausſchnitt ab, ſo iſt der Reſt der Kugelabſchnitt JMKL (§. 221. Z. 3.)

Zuſatz.

Wenn der Abſchnitt (F. 145.) ABCDE gröſſer als $\frac{S}{2}$ iſt, ſo ſucht man zuerſt den Innhalt der ganzen

Kugel, wovon er ein Stück iſt (§. 231.) alsdann den Innhalt des kleinern Abſchnitts AGEF, zieht dieſen von S ab, ſo bleibt der verlangte Abſchnitt ABCDE.

§. 233. Tab. VII. F. 140.

Aus dem gegebenen Radius der Kugel EH = HN; den Diametern CD und AB des körperlichen Gürtels ABCD, ſeiner Höhe GF, und GE der Höhe des Abſchnitts, wovon der Gürtel ein Stück iſt, den Cubick-Innhalt deſſelben zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Man finde aus EG und GF die Höhe EF = EG — GF.

2) Den Abſchnitt ABDEC und } §. 232. a.
3) Den Abſchnitt CED }

4) Ziehe den leztern vom erſtern ab, das iſt ABDEC — CED, ſo bleibt der körperliche Gürtel ABCD (§. 221. Z. 4.)

§. 234. Tab. VIII. F. 146.

Wenn zwo Kugeln von verſchiedenen Diametern AD und BC = D und d; ein gemeinſchafftliches Centrum E haben, ſo heißt der körperliche Kranz, welcher die kleinere Kugel umgiebt eine ſphäriſche Krone. Da er nun dem Unterſchied beyder Kugeln gleich iſt, ſo iſt ſein Innhalt $\frac{PD^2}{6} - \frac{pd^2}{6}$. Eine Berechnung,

welche die Theologen nöthig haben, welche die Allgemeine Ueberſchwemmung der Erde durch die Sündfluth annehmen und gegen die Einwürfe vertheidigen wollen. Siehe Lilienthals Gute Sache der Göttlichen Offenbarung T. V.

§. 235.

Den Cubick-Innhalt der 6 ordentlichen Körper im ſtrengſten Verſtand (§. 198.) zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

1) Wie der Innhalt der Kugel zu finden ſeye, lehrt §. 231. und die Berechnung des Cubus oder Hexaedron ſahen wir (§. 227. Z. 2.)

2) Das Tetraedron iſt eine Pyramide, und wird nach (§. 228.) berechnet.

3) Das Octaedron beſteht aus 2 gleichen Pyramiden, welche ein □ zur gemeinſchafftlichen Grundfläche haben. Daher wird ſein Innhalt gleichfalls nach (§. 228.) gefunden.

4) Und wenn vom Centrum des Dodecaedron in alle Spitzen ſeiner körperlichen ∠ ∠ gerade Linien gezogen werden, ſo entſtehen 12 gleiche Pyramiden (§. 217.) deren Grundflächen die ≌ Fünfecke ſind, worein es eingeſchloſſen iſt, die Höhe aber = der halben geraden Linie, welche vom Centrum eines dieſer Fünfecke ins Centrum des ihm gerade gegenüberſtehenden gezogen wird. Man kann folglich den Innhalt von einer dieſer Pyramiden nach (§. 228.) finden, und wenn

man ihn mit 12 multiplicirt, ſo hat man den Innhalt des ganzen Dodecaedron.

5) Nimmt man beym Icoſaedron das nemliche vor, was beym Dodecaedron Nro. 4. geſchehen, ſo entſtehen 20 gleiche Pyramiden (§. 217.) deren Grundflächen ≌ △ △ ſind, worein es eingeſchloſſen iſt. Die Höhe und Innhalt von einer, wird, wie Nro. 4. gefunden, und dieſe mit 20 multiplicirt, giebt den Innhalt des ganzen Icoſaedron.

§. 236.

Den Innhalt eines jeden unordentlichen Körpers zu finden.

Auflöſung.

Man verwandle den unordentlichen Körper in einen ordentlichen und berechne dieſen nach den vorhergehenden Aufgaben. Das Erſtere, geſchieht am bequemſten auf folgende Art:

1) Man berechne den Innhalt der innren Grundfläche eines vollkommen ordentlichen hohlen Parallelepipeds (§. 128.) welches auf allen Fall Waſſer hält, und ſtell' es horizontal, durch Hülfe der Bleywage.

2) Man lege den zu berechnenden Körper hinein und übergieſſe ihn, nach Beſchaffenheit deſſelben, mit Waſſer oder feinem Sand, bis an eine innerhalb der Seitenflächen mit der Grundfläche gezogene Parallele.

3) Man hebe den Körper vorſichtig heraus, und bemerke, wie viel Schuhe, Zolle ꝛc. ꝛc. das Waſſer, oder der abermal horizontal geebnete Sand, ſich geſetzt hat.

4) Mit dieſer Höhe multiplicire man die Nro. 1. gefundene Grundfläche, ſo iſt das Produkt der Cubick-Innhalt des unordentlichen Körpers.

Beweiß.

Denn der Raum, um den ſich das Waſſer oder der geebnete Sand ſetzt, iſt dem Raum, welchen vorhin der unordentliche Körper einnahm, gleich.

Anmerkung.

Wäre der unordentliche Körper unbeweglich, ſo richte man um ihn herum ein Parallelepiped von Brettern auf, füll' es, wie vorhin, mit Sand, zerlege das Parallelepiped, doch ſo, daß kein Sand verloren gehe, füge es aufs neue zuſammen und ſchütte den vorigen Sand hinein, ſo kann man nach Nro. 4. wie vorhin verfahren. Diß alles ſoll der mündliche Vortrag in der wirklichen Ausübung deutlich machen.

§. 237.

Den Innhalt eines jeden hohlen Körpers, inſofern er Körper iſt, zu berechnen.

Auflöſung und Beweiß.

1) Iſt er ordentlich, ſo

a) Berechne man den ganzen Körper, als wenn er nicht hohl wäre.

b) Aber auch den Innhalt ſeiner Höhlung allein.

e) Ziehe den 2ten Innhalt vom erſten ab, ſo hat man den Innhalt des hohlen Körpers, als Körper betrachtet.

2) Iſt er unordentlich, ſo

a) Fülle man ſeine Höhlung mit Waſſer oder feinem Sand.

b) Gieſſe das Waſſer oder Sand in das (§. 236.) beſchriebene Parallelepiped und berechne, nach der dort angegebenen Methode, deſſen Innhalt.

c) Endlich nach (§. 236.) den Innhalt des ganzen Körpers, deſſen Höhlung gegen das Eindringen des Waſſers oder Sands verwahrt worden.

d) Ziehe den Nro. b. gefundenen Innhalt, von dem Nro. c. gefundenen ab, ſo iſt der Reſt der Innhalt des unordentlichen hohlen Körpers.

Funfzehender Abſchnitt.

Von der Aehnlichkeit und Verhältnuß der Körper.

§. 238.

Aehnliche Körper ſind in gleichviel und ähnliche Flächen eingeſchloſſen (§. 213.) Daher ſind in ihnen

1) Alle gleichnamigte körperliche $\angle\,\angle$ einander gleich.

2) Länge, Breite und Höhe haben einerley Verhältnuß.

3) Alle ordentliche Körper, im ſtrengſten Verſtand, von einerley Art, ſind einander ähnlich.

Beweiß.

1) Denn ſie werden immer aus gleichen, gleichvielen und in einerley Ordnung liegenden ebenen ∠∠ beſtehen, folglich gleich ſeyn (§. 183. Z. 2. u. 3.) W. D. E. W.

2) In ähnlichen Flächen haben die übereinſtimmende Seiten einerley Verhältnuß (§. 116.) folglich iſt Tab. VII. F. 135. im Parallelepiped EF und PS

GF : CF = OP : PQ
und GF : BF = OP : PR aber auch (Ar. §. 217.)

GF : OP = CF : PQ
und GF : OP = BF : PR Daher auch (A. §. 203.)

CF : PQ = BF : PR W. D. A. W.

3) In allen ordentlichen Körpern, im ſtrengſten Verſtand, von einerley Art, finden ſich gleich viele, ähnliche, in einerley Ordnung liegende Flächen (§. 185. und 197.) ſie müſſen folglich einander ähnlich ſeyn (§. 213. Z.) W. D. D. W.

§. 239. Tab. VIII. F. 147.

In ähnlichen Cylindern und Kegeln verhalten ſich die Achſen, wie die Radii ihrer Grundflächen, machen einerley ∠∠ mit denſelben, und die Höhen verhalten ſich auch wie die Radii ihrer Grundflächen.

Beweiß.

1) Die beyden Cylinder ſind (p. hyp.) ähnlich, folglich muß das in ihnen übereinſtimmen, wo=

durch ſie, ohne die Gröſſe, unterſchieden werden könnten (Ar. §. 40.) Sie könnten aber, in dieſem Fall, bloß durch das Verhältnuß; CD : BD und EF : FH und durch die ∠ ∠ x und y unterſchieden werden, daher iſt in beyden ähnlichen Cylindern AM und JL

CD : BD = EF : FH u. ∠x = ∠y. W. D. E. W.

2) In ſenkrechten Cylindern, ſind die Höhen den Achſen gleich (§. 24. und 192.) folglich müſſen ſich auch in dieſen, wenn ſie ähnlich ſind, die Höhen wie die Achſen, das iſt, wie die Radii der Grundflächen verhalten (Nro. 1.) Und da in ſchiefen ähnlichen Cylindern △BMG ∽ △HKL (§. 65.) ſo iſt auch

MG : LK = BM : HL allein da
|| || || || ſo iſt

A : a = CD : EF und da
BD : FH = || N°. 1. ſo iſt (Ar. §. 203.)

A : a = BD : FH W. D. A. W.

3) Da ſich der nemliche Beweiß bey ſenkrechten und ſchiefen Kegeln anwenden läßt, ſo wird dieſer Satz auch von den Kegeln wahr ſeyn.

§. 240.

Alle gleichdicke Körper ſtehen in einem zuſammengeſetzten Verhältnuß ihrer Grundflächen und Höhen.

Beweiß.

Es ſey der eine gleichdicke Körper = K, ſeine Grundfläche = B, ſeine Höhe = A; der andre = k, ſeine Grundfläche = b, ſeine Höhe = a, ſo iſt

Das Verhältnuß beyder Grundflächen $B : b$ und
" " " " . Höhen $A : a$ Daher

$$K : k = AB : ab \text{ (§. 227.)}$$

folglich ſtehen K und k in einem zuſammengeſetzten Verhältnuß ihrer Grundflächen und Höhen (Ar. §. 206.)

Zuſätze.

1) Wenn daher $A = a$, ſo iſt $K : k = B : b$ und wenn $B = b$, ſo iſt $K : k = A : a$. Oder gleichdicke Körper, welche einerley Höhen haben, verhalten ſich wie ihre Grundflächen, und wenn ſie einerley Grundflächen haben, ſo verhalten ſie ſich wie ihre Höhen.

2) Folglich verhalten ſich, zwey Parallelepipede, wie die Produkte ihrer ungleichen Seiten c, d, m und C, D, M, das iſt, wie $cdm : CDM$ (§. 225.)

3) Zween Cubi hingegen, wie $c^3 : C^3$ (§. 225. Z. 1.) oder wie die Cubickzahlen ihrer Seiten.

4) Zween Cylinder C und c verhalten ſich wie $AB : ab$, folglich $C : c = AB : ab$ und wenn $A = a$

$$C : c = B : b \text{ (Z. 1.) Da aber hier}$$
$$D^2 : d^2 = || \text{ (§. 136. Z. 4.) folglich}$$
$$C : c = D^2 : d^2 \text{ (Ar. §. 203.)}$$

Oder zween Cylinder, welche gleiche Höhen haben, verhalten ſich, wie die Quadrate der Diameter ihrer Grundflächen.

5) Endlich läßt ſich hieraus ein ſehr artiger Beweiß T. VIII. F. 148. für den Archimedeiſchen Lehrſatz

(§. 222.) herleiten Man zeichne einen Cylinder EF, deſſen Diameter der Grundfläche EG und deſſen Höhe EH = dem Diameter einer Kugel, ſo hat dieſer mit der Kugel einerley Grundfläche und Höhe (§. 222.) Man nenne ſeine ganze Grundfläche = b und die Höhe EH = A. Man zeichne ferner einen andern Cylinder CD, deſſen Grundfläche B = der Kugelfläche und deſſen Höhe, A = dem Radius der Kugel. Nun iſt, wenn die Kugel = S geſetzt wird

B : b = 4 : 1 (§. 219. Z. 2.)
und a : A = 1 : 2 (§. 21. Nro. 5.)

aB : Ab = 4 : 2 (Ar. §. 225.) Da aber
|| || (§. 221. Z. 1. und §. 227.) ſo iſt

3S : C = 4 : 2 und (Ar. § 217.)

S : $\frac{C}{3}$ = 4 : 2 und (Ar. §. cit.)

S : C = 4 : 6 folglich (Ar. §. cit.)

S : C = 2 : 3

§. 241.

Wenn zween gleiche gleichdicke Körper Ab und aB ungleiche Grundflächen und ungleiche Höhen haben, ſo iſt A : a = B : b, folglich auch b : B = a : A. Oder es verhält ſich die Höhe des erſten zur Höhe des andern, wie die Grundfläche des andern zur Grundfläche des erſtern, und umgekehrt.

Beweiß.

Denn da Ab = aB, ſo iſt auch (Ar. §. 216. Z.)

A : a = B : b und (Ar. §. 217.)

b : B = a : A

Zuſatz.

Sobald alſo drey von dieſen 4 Stücken A, a, B und b gegeben ſind, ſo läßt ſich das 4te fehlende immer nach (Ar. §. 221. Nro. 3.) finden.

§. 242.

Aus der gegebenen Seite eines Cubus, die Seite eines Cubus zu finden, der doppelt ſo groß als der erſtere iſt.

Auflöſung.

Man multiplicire die Seite des gegebenen Cubus mit der durch Annäherung geſuchten Cubickwurzel von 2 (Ar. §. 174.) ſo hat man die Seite des doppelten Cubus. Es ſey z. E. die Seite des gegebenen Cubus 6″, ſo iſt die durch Annäherung bis auf 10 Millionſtel geſuchte Cubickwurzel von 2 = 1,2599205, folglich die Seite des doppelten Cubus =

$$7'',\ 5''' \ 5^{IV}\ 9^{V}\ 5^{VI}\ 2^{VII}\ 3^{VIII}\ 0^{IX}.$$

Beweiß.

Es ſey der kleinere gegebene Cubus = C, ſo iſt der doppelte = 2C, die Seite des erſtern = a des geſuchten = x. Nun iſt (§. 240. Z. 3.)

$$C : 2C = a^3 : x^3$$ folglich (Ar. §. 220.)

$$\frac{2C \times a^3}{C} = x^3$$ oder kürzer ausgedrückt

$$2a^3 = x^3$$ und (Ar. §. 167.)

$$\sqrt[3]{2a^3} = x = a\sqrt[3]{2}$$ (Ar. §. 193. Z.)

Zuſatz.

Es iſt alſo die Seite des doppelten Cubus die erſte von 2 mittlern Proportional-Linien, zwiſchen der Seite des gegebenen Cubus und einer doppelt ſo groſſen Seite, das iſt, zwiſchen a und 2a. Denn

$$a : a\sqrt[3]{2} = a\sqrt[3]{2^2} : 2a \text{ indem (Ar. §. 215.)}$$

$$2a^2 = a\sqrt[3]{2} \times a\sqrt[3]{2^2} \text{ weil (Ar. §. 196.)}$$

$$a\sqrt[3]{2} \times a\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2a^3} \times \sqrt[3]{2^2a^3} = \sqrt[3]{8a^6} = 2a^2$$

(Ar. §. 193.)

Anmerkung.

Diß iſt das berüchtigte Deliſche Problem, wovon in der Geſchichte der Geometrie ein Mehrers. Hier bemerke man nur, daß die, durch Hülfe der Buchſtaben-Rechnung, ſo leichte Auflöſung deſſelben, den Alten, welche ſie blos geometriſch auflöſen mußten, ſehr ſchwer fiel, welches hier nicht erklärt werden kann, indem es höhere Geometrie vorausſetzt.

§. 243. Tab. VII. F. 137.

Aehnliche Körper verhalten ſich wie die Cubickzahlen ähnlicher an oder in ihnen gezogenen Linien. Das iſt $AE : GH = AF^3 : GJ^3$ oder $= AB^3 : GK^3$.

Beweiß.

1) $AE : GH = ACF \times BF : GLJ \times KJ$ (§. 240.)

Da nun $ACF : GLJ = AF^2 : GJ^2$ (§. 136.) ſo iſt

$AE : GH = AF^2 \times BF : GJ^2 \times KJ$ u. da ferner

$BF : KJ = AF : GJ$ (p. hyp. §. 238.)

$$\text{ſo iſt } AE : GH = \underline{AF^2 \times AF} : \underline{GJ^2 \times GJ}$$

$$AE : GH = AF^3 : GJ^3 \text{ W. D. E. W.}$$

2) Da ferner $AE : GH = AF^2 \times AF : GJ^2 \times GJ$ allein
$AF : GJ = AB : GK$ (p. hyp.)

$$\text{ſo iſt } AE : GH = \underline{AB^2 \times AB} : \underline{GK^2 \times GK}$$

$$AE : GH = AB^3 : GK^3$$

Zuſatz.

Folglich verhalten ſich auch ähnliche zugeſpitzte Körper, wie die Cubickzahlen der ähnlichen an oder in ihnen gezogenen Linien (§. 218.) indem ſich die Drittheile gewiß wie die Ganze verhalten (Ar. §. 205.) Ja es werden überhaupt alle, vom Verhältnuſſe der gleichdicken Körper in dieſem Abſchnitt bisher erwieſene Sätze, auch von den zugeſpitzten, aus dem eben angeführten Grund wahr ſeyn.

§. 244.

Wenn der Kegel mit einer Kugel gleiche Höhe und zur Grundfläche den größten Durchſchnittscirkel der Kugel hat, ſo verhält ſich $S : Con = 2 : 1$.

Beweiß.

Denn $S : Cyl. = 2 : 3$ (§. 222.) folglich iſt

Da $\frac{Cyl.}{3} = Con.$ (§. 218.) $\times 2$

$\frac{2\,Cyl.}{3} = 2\,Con.$ (Ar. §. 63.) Da aber
$\|$ ſo iſt auch (Ar. §. 62.)

$S = 2\,Con.$ folglich (Ar. §. 63.) : 2

$\frac{S}{2} = Con.$ oder

$S : Con. = 2 : 1$

§. 245. Tab. VII. F. 139.

Wenn ein Cylinder mit der Kugel gleiche Höhe, und zur Grundfläche den gröſten Durchſchnitts-Cirkel der Kugel hat, ſo iſt: $Cyl : d^3 = 785 : 1000$.

Beweiß.

Es ſeye $d = 100$ ſo iſt $Cyl. = \frac{pd^2}{4} = 785000$ (§. 227. Z. 4.) und $d^3 = 1000000$ folglich iſt

$Cyl : d^3 = 785000 : 1000000$ und

$Cyl : d^3 = 785 : 1000$ (Ar. §. 217.)

§. 246. Tab. VII. F. 139.

Eine jede Kugel verhält ſich zum Cubus ihres Diameters, wie 157 : 300.

Beweiß.

Es ſeye der Diameter der Kugel $= d$, ſo iſt ihr Innhalt $= \frac{pd^2}{6}$ (§. 228. Z. 3.) und der Cubus des Diameters $= d^3$. Folglich iſt, wenn C. D der Cubus des Diameters iſt,

$$S : C.D = \frac{pd^2}{6} : d^3 \text{ oder } (\times 6)$$

$$S : C.D = pd^2 : 6d^3 \text{ (Ar. §. 217.)}$$

$$S : C.D = p : 6d$$

$$S : C.D = 314 : 600 \text{ und (Ar. §. 217.)}$$

$$S : C.D = 157 : 300.$$

Zuſätze.

1) Man kann alſo den Innhalt der Kugel, ohne die Peripherie zu ſuchen, finden. Da 300 : 157 = C.D : S, ſo darf man nur aus dem gemeſſenen Diameter der Kugel den Cubus machen, und nach (Ar. §. 220.) den Innhalt der Kugel daraus finden.

2) Eben ſo leicht findet ſich nun aus dem Innhalt der Kugel ihr Diameter. Denn da

$$157 : 300 = S : CD$$

ſo finde man zu 157, 300 und S oder dem Innhalt der Kugel, die 4te geometriſche Proportionalgröſſe. Dieſe iſt der Cubus ihres Diameters. Man ziehe aus dieſem die $\sqrt[3]{}$ (Ar. §. 169.) ſo iſt ſie der Diameter ſelbſt, indem $\sqrt[3]{d^3} = d$.

§. 247.

Die Kugeln verhalten ſich wie die Cubi ihrer Diameter.

Beweiß.

Es ſeyen zwo Kugeln S und s und ihre Diameter D und d, ſo iſt C.D = D³ und c. d = d³ folglich da

$$S : D^3 = 157 : 300 \quad (\S. 246.)$$
$$s : d^3 = \| \quad \text{ſo iſt (Ar. §. 203.)}$$
$$S : D^3 = s : d^3 \quad \text{und (Ar. §. 217.)}$$
$$S : s = D^3 : d^3$$

Zuſatz.

Wenn alſo $D = 4$ und $d = 2$ ſo iſt S nicht 2mal ſondern 8mal ſo groß als s, denn $D^3 = 64$ und $d^3 = 8$, folglich $S : s = 64 : 8 = 8 : 1$.

§. 248.

Die Oberfläche eines groſſen Körpers iſt, verhältnußmäſſig gegen den Cubick-Innhalt betrachtet, kleiner als die Oberfläche eines kleinern Körpers.

Beweiß.

Es ſeyen die beyde ähnliche Körper K und k; zwo ähnliche Seiten von ihnen L und l, ſo iſt, wenn ihre Oberflächen = S und s

$$K : k = L^3 : l^3 \quad (\S. 243.) \text{ und}$$
$$S.K : s.k = L^2 : l^2 \quad (\S. 220.)$$

Wäre nun $L = 6$ und $l = 2$ ſo iſt

$$L^3 : l^3 = 216 : 8 \text{ und}$$
$$L^2 : l^2 = 36 : 4 \text{ folglich wäre}$$

K 27mal gröſſer als k, da hingegen S.K nur 9mal gröſſer als s.k iſt.

§. 249.

Aus dem gegebenen Innhalt eines Körpers, und der Höhe oder Grundfläche eines andern bestimmten ordentlichen Körpers, auch im weitläuftigen Verſtand, die Höhe oder die Grundfläche des andern, nebſt den Abmeſſungen dieſer Grundfläche zu finden.

Auflöſung.

1) Iſt der verlangte Körper ein Cubus, ſo zieht man aus dem gegebenen Innhalt die $\sqrt[3]{}$ und erhält alſo die Seite des Cubus, folglich auch die Seite der Grundfläche (§. 225. Z. 1.)

2) Sollte der gegebene Körper in eine Kugel verwandelt werden, ſo ſieht man ſeinen Innhalt als den Innhalt einer Kugel an und ſucht ihren Diameter (§. 246. Z. 2.)

3) Soll der gegebene Innhalt des Körpers in einen gleichdicken Körper verwandelt werden und es wäre die Grundfläche gegeben, ſo dividirt man mit der Grundfläche in den Innhalt, und nun iſt der Quotient die geſuchte Höhe eines Prißma, Parallelepipeds oder Cylinders (§. 227.)

4) Verlangt man die Höhe eines zugeſpitzten Körpers, ſo müßte der Nro. 3. gefundne Quotient noch mit 3 dividirt oder die Grundfläche vorhin mit 3 multiplicirt werden (§. 228.)

5) Wäre die Höhe des Körpers gegeben, zu welchem die Grundfläche gefunden werden ſoll, und

man wollte den gegebenen Innhalt in einen gleich⸗dicken Körper verwandeln, ſo dividirt man mit der Höhe in den Innhalt, und der Quotient iſt die Grundfläche. Iſt aber der verlangte Körper zugeſpitzt, ſo müßte nur mit dem 3ten Theil der Höhe darein dividirt werden (§. 227. und 228.)

6) Dieſe Grundfläche wird

a) Wenn man ein Parallelepiped oder 4eckigt Prißma von einer ordentlichen Grundfläche verlangt, in zween beliebige Faktoren zer⸗legt, um die Grundlinie und Höhe der Grund⸗fläche zu erhalten (§. 128.)

b) Beym 3eckigten Prißma geſchieht das nem⸗liche, nur muß alsdann, einer von den ge⸗fundenen Faktoren, noch mit 2 multiplicirt werden (§. 128. Z. 1. und 2.)

c) Und wenn es ein vieleckigt Prißma ſeyn ſoll, ſo wird überdiß, der mit 2, nach (Nro. b.) multiplicirte Faktor, noch mit der Anzahl der Seiten des Vielecks dividirt, um die Gröſſe einer Seite des Vielecks zu bekom⸗men (§. 132.)

d) Will man einen Cylinder oder Kegel haben, ſo wird aus der Nro. 5. gefundenen Grund⸗fläche der Diameter geſucht (§. 142. Z. 3.)

Anmerkung.

Diß iſt nur ein Fingerzeig auf die Verwandlung der Körper in andere, welche in der Ausübung unendlich durch

den Gebrauch des Proportional-Cirkels erleichtert wird. Sehr viele zu einer Verfertigung und Gebrauch nöthige Haupt-Beweißgründe liegen in dieſem Abſchnitt. Sie weiter auszuführen, verbietet Raum und Abſicht. Wer ſie ſich aber vollſtändig bekannt macht, wird ſehr leicht, das ſchöne praktiſche Buch: Michel Scheffelts Inſtrumentum Proportionum, ingleichem ſeinen Pes mechanicus artificialis verſtehen, beweiſen und anwenden können, wenn er ſich noch überdiß mit unſern Anfangsgründen der Trigonometrie bekannt gemacht hat.

Sechszehender Abſchnitt.

Von den Viſirſtäben.

§. 250.

Ein Viſirſtab iſt ein Maasſtab, den Innhalt der Körper, nicht in gewöhnlichem Cubickmaas, ſondern nach dem in einer beſtimmten Gegend üblichen Wein- Fruchtmaas und Gewicht zu finden. Folglich hat man dreyerley Hauptarten von Viſirſtäben:

1) Für flüſſige Körper, und da dieſe gewöhnlich in Fäſſern aufbehalten werden, ſo heißt die Wiſſenſchaft, den Innhalt der Fäſſer, in dem üblichen Maas dieſer flüſſigen Körper, zu finden, Pithometrie (Pithometria, ſtereometria doliorum.)

2) Für den Innhalt der Getraidehaufen. Dieſe Wiſſenſchafft könnte man Sitometrie (Sitometria) nennen.

3) Für die Erfindung des Gewichts der Kugeln. Dieſe nennt man Caliberſtäbe (Regula calibræ)

und die Wiſſenſchafft, durch ſie das Gewicht der Kugeln zu finden, könnte Sphärobarometrie (Sphærobarometria) heiſſen.

Anmerkung.

1) Wenn man den cubiſchen Innhalt einer Maas, eines Simri, eines Pfundes, nach einem beliebigen Maasſtab, nach Anleitung des 14ten Abſchnitts berechnet hat, ſo lieſſe ſich der Innhalt der Fäſſer, Fruchthaufen und Kugeln, in Wein, Getraide-Maas und Gewicht, auch ohne Viſirſtäbe finden. Man dörfte ſie nur nach dem eben angeführten Abſchnitt, nach dem gewöhnlichen geometriſchen Maas ausrechnen, und mit dem Innhalt einer Maas, eines Simri oder Pfundes darin dividiren. Da aber dieſe Methode wirklich etwas weitläuftig in der Ausübung iſt, und die Perſonen, welche Fäſſer, Fruchthaufen und Kugeln zu berechnen haben, nicht immer die hiezu gehörige Wiſſenſchaft aus der Geometrie und Rechenkunſt beſitzen, ſo verfiel man auf dieſe Arten von Maasſtäben, welche die Berechnung ſehr abkürzen und erleichtern.

2) Unter dieſen 3 Arten von Viſirſtäben, ſind die erſten unſtrittig der wenigſten geometriſchen Schärfe fähig. Die, wegen der Feſtigkeit, in der Mitte nothwendig erhabene Figur der Fäſſer, iſt äuſſerſt unbeſtimmt, nie cylindriſch und wegen der überdiß ſehr zufälligen Krümmung der Dauben, noch viel weniger aus zween abgekürzten Kegeln zuſammengeſetzt. Und geſetzt, ſie würden von neuem, mit möglichſtem Fleiß als Cylinder oder andere ordentliche Körper verfertigt, ſo würde doch die Feuchtigkeit das Holz alle Augenblick verändern.

3) Daher ſahen einige das Faß als das Mittel zwiſchen zween Cylindern an T. VIII. F. 149. welche beyde, mit dem Faß einerley Länge AE haben, wo der Diameter der

Grundfläche des Gröſſern CD, des kleinern aber AB iſt. Andre hielten die Figur ABCD und CEFD für abgekürzte Kegel. Noch andere hielten die Krümmung der Dauben AC für Theile von krummen Linien aus der höhern Geometrie. Keine von dieſen Vorausſetzungen iſt der Schärfe nach wahr (Anm. 2.) Doch fehlt die zwote am meiſten, die erſte faſt eben ſo viel, obſchon etwas weniger, und die letzte kommt der Wahrheit am nächſten.

4) Da nun eine theoretiſch und zugleich ausübende genaue Abhandlung dieſer Viſirſtäbe

a) Sätze vorausſetzt, welche in dieſem Lehrbuch unmöglich vorgetragen werden können,

b) Eigene Abhandlungen und beſondere Vorleſungen erforderte;

ſo werd' ich, blos die Gründe, der von Malern im 17ten Kapitel vorgetragenen Aufgaben, mit unſern Stereometriſchen Sätzen in Verbindung bringen, um die Beweiſe davon zu geben; wo es nöthig iſt die Vorſchrifften berichtigen, und für das Viſiren voller Fäſſer diejenige Methode angeben, welche unter allen dermalen bekannten die leichteſt und richtigſte iſt.

§. 251.

Es gründen ſich alſo in Malers Geometrie

§. 182. auf unſre (§. 225. und Ar. §. 168. und 169.)

§. 183. — — (§. 243. und Ar. §§. cit.)

§. 184. — — (§. 243.)

§. 185. N. 1. auf unſren (§. 227.)

Nro. 2. zwote Art — (§. 230.) denn die erſte iſt nach §. 230. Anm. unrichtig. Uebrigens bemerke man, daß der Innhalt dergleichen Bocken ein wirklicher abgekürzter Kegel iſt, da bey ihnen die

Dauben gerade und nicht, wie bey den Fäſſern, gekrümmt ſind.

Nro. 3. Iſt ſehr fehlerhafft (§. 250. Anm. 3.) Die Verbeſſerung ſoll beſſer unten angegeben werden.

Nro. 4. Noch weit fehlerhaffter (§. cit.)

Nro. 5. Gründet ſich auf Betrachtungen der höhern Geometrie, welche nicht hieher gehören.

Nro. 6. auf unſern §. 243.

§. 252.

Wenn auf einem Viſirſtab ſowohl die Diameter der Grundflächen cylindriſcher Gefäſſe, als auch die Höhen der nemlichen Gefäſſe aufgetragen ſind, ſo nennt man ihn einen cylindriſchen Viſirſtab.

1) Seine Verfertigung zeigt M. G. §. 186. und ſie gründet ſich auf §. 240. Z. 1. u. 4. und §. 150.) Die 2te Methode hingegen auf (§. 249. und die eben angeführte §§.)

2) Sein Gebrauch M. G. §. 188. gründet ſich auf (§. 250. Anm. 3.) woraus zugleich die Unzuverläſſigkeit dieſer Methode erhellet, wie Lambert in ſeinen Beyträgen I. Theil II. Abhandl. p. 325. ſehr ſchön beweiſet. Wo er durch Hülfe einer, aus vorher erwieſenen Gründen hergeleiteten, aber durch eine etwas weitläuftige Differentialrechnung gefundenen Formel zeigt: Daß dieſe gemeine Methode, wenn der Unterſchied des groſſen und kleinen Diameters dem 4ten Theil des groſſen Diameters gleichet, auf 12 Maas immer

1 Maas fehle. Seine richtigere angegebene Methode iſt folgende:

a) Man meſſe die nemliche Data, wie in der gemeinen Art T. VIII. F. 149.

b) Multiplicire CD mit AE und das Produkt mit 2.

c) Multiplicire, wenn AB = EF, AB mit AE.

d) Addire die Produkte von b und c.

e) Dividire die Summe mit 3, ſo iſt der Quotient der Innhalt des Faſſes.

Es ſeye z. E. CD = 79, AB = EF = 65, AE = 97, ſo iſt $2(CD \times AE) = (79 \times 97) \times 2 = 15326$
$AB \times AE = 65 \times 97 = 6305$ Daher

$$\frac{2(CD \times AE) + AB \times AE}{3} = \frac{21631}{3} = 7210\tfrac{1}{3}$$ Maas.

Da nun nach der gemeinen Methode der Innhalt = 6984 Maas wäre, ſo hätte man nach derſelben $226\frac{1}{3}$ Maas zu wenig gefunden.

Zuſatz.

Iſt AB und EF ungleich, ſo giebt Lambert loc. cit. folgende Regeln:

a) Man multiplicire CD mit 4, und addire zum Produkt AB + EF.

b) Dieſe Summe dividire man mit 6.

c) Und den Quotienten multiplicire man mit AE.

Es ſeyen z. E. die vorigen Data nur AB = 65 und EF = 64, ſo iſt

$$CD \times 4 = 79 \times 4 = 316$$
$$AB + EF = 65 + 64 = 129$$ Daher

$$\frac{4CD + AB + EF}{6} = \frac{445}{6}$$ und nun

$$\frac{445}{6} \times 97 = \frac{43165}{6} = 7194\tfrac{1}{6}$$ Maas.

Wie CD durch Hülfe des Senkbleyes, ingleichem AB, EF und AE, in der Ausübung, ſo viel möglich genau zu meſſen, mündlich.

§. 253. Tab. VIII. F. 149.

Kreutz-Viſirſtäbe nennt man diejenige, welche, wenn ſie durch das Spundloch C bis an den einen Boden B geſchoben werden, durch die auf ihnen verzeichnete Zahlen, von welchen eine auf C trifft, den Innhalt der Fäſſer ohne alle Berechnung angeben. Seine Verfertigung lehrt M. G. §. 189. und 190. Die Beweißgründe liegen (§. 225. §. 245. §. 100. §. 73. §. 243.)

Anmerkung.

Da die Vorausſetzung, daß ABCD = CEDF in der Ausübung nichts weniger als wirklich iſt, die Oeſterreichiſchen Fäſſer, nach Wolfens Zeugnuß Element. Geom. §. 593. ausgenommen; ſo ſieht man leicht, wie vielen Fehlern das Viſiren der Fäſſer mit dem Kreutz-Viſirſtab ausgeſetzt iſt.

§. 254.

Das in M. G. §. 191. gelehrte Viſiren der Ovalfäſſer gründet ſich auf die höhere Geometrie und kann hier nicht bewieſen werden. Der §. 192. hingegen, läßt ſich aus unſerm §. 243. beweiſen. Doch ſetzt er

die Aehnlichkeit aller Fäſſer voraus, welches gewiß nicht allgemein wahr iſt.

§. 255.

Der Innhalt nicht voller Fäſſer iſt ungleich ſchwerer und weitläuftiger zu erfinden als der vollen. Selbſt die von Lamberten, Beyträge T. I. Abhandl. II. p. 330 u. f. angegebene Vorſchrifften ſind zwar, ſo genau und richtig als es immer die Natur dieſes Gegenſtands erlaubt, aber auch noch immer für unſer Lehrbuch zu ſchwierig und weitläuftig. Daher bleibt für die erſte Anfänger nichts als M. G. §. 193. übrig, welcher abermal vorausſetzt, daß alle Fäſſer einander ähnlich ſeyen. Da nun diß nicht iſt, ſo läßt ſich leicht auf die Genauigkeit dieſer Methode ſchlieſſen. Sollte jemand in die Nothwendigkeit geſetzt werden, ſehr oft, nicht volle Fäſſer, ſo genau als möglich, zu viſiren, den wird Lambert in der angeführten Stelle am beſten befriedigen.

§. 256.

Wie Viſirſtäbe zum Getraide zu machen, lehrt M. G. §. 194. und der Beweiß fließt aus unſerm (§. 225.) Nur bemerke man, daß die Fruchthaufen als abgekürzte Pyramiden anſehen und berechnen, die äuſſerſte Unrichtigkeiten veranlaſſen muß, daher die Einfaſſung mit Brettern unendlich vorzuziehen.

§. 257.

Die Verfertigung eines Cubiſchen Viſirſtabes, um das Gewicht der Körper zu finden, lehrt M. G.

§. 195. und die Beweißgründe ſind die nemlichen, welche §. 251. Nro. 1. u. 3. angegeben wurden. Den eigentlichen Caliberſtab zu machen ſehe man M. G. §. 196. und die Gründe, diß Verfahren zu beweiſen, werden wir (§. 247.) finden.

Siebenzehender Abſchnitt.

Etwas von der Mark-Scheidekunſt.

§. 258.

Die Mark-Scheidekunſt (Geometria ſubterranea) iſt eine Anwendung der Geometrie, welche lehrt, die unter der Erde gemachte Gänge (Gruben-Gebäude) auszumeſſen, in Grund zu legen, durch Modelle vorzuſtellen und die in der Zeichnung oder Modellen angegebene Gänge unter der Erde anzulegen. Oder ſie iſt eine Wiſſenſchafft, die Vorſchrifften der Meßkunſt, hauptſächlich auf den Bergbau geſchickt anzuwenden.

Anmerkung.

Sie wird alſo nicht nur bey Bergwerken, ſondern aller Orten, wo Gänge unter der Erden angelegt werden müſſen, ſehr wichtigen Einfluß haben, wohin vorzüglich in der Artillerie die Lehre von den Minen gehört.

§. 259.

Da die Bergleute

1) Ein eigenes Maas, ſowohl für Längen und Flächen als auch für die Winkel haben,

2) Bey ihnen beſondere Kunſtwörter oder Benennungen eingeführt ſind,

3) Ihre Werkzeuge, wegen den mancherley in den Gebäuden vorkommenden Hindernuſſen, zum Theil, von denen geometriſchen ziemlich verſchieden ſind;

4) Wenn man nicht in gewaltige Weitläuftigkeiten verfallen will, auſſer den geometriſchen Sätzen, ſehr oft die Trigonometrie zu Hülfe genommen werden muß,

5) Eine vollſtändige theoretiſch und praktiſche Ausführung, ſtarke Kenntnuſſe, des Bergbaues ſelbſt ſowohl, als auch der angewandten Mathematik vorausſetzt, ſo ſieht man leicht ein, daß die reine Mathematik der Ort nicht iſt, wohin eine ſolche Abhandlung gehört, wenn ſie anders vollkommen und brauchbar ausfallen ſoll. Ich werde ſie daher hier nicht weiter behandlen, ſondern den Anfänger auf das 19te Kapitel der Maleriſchen Geometrie verweiſen, worinnen, ſoviel ſich davon ſagen ließ, mit möglichſter Deutlichkeit und Kürze geſagt wurde. Die Beweiſſe der vorkommenden Aufgaben, kann ſich ein jeder, welcher das bisher Vorgetragene ernſtlich durchgearbeitet hat, aus unſern Sätzen leicht bilden. Und wer weiter gehen will, dem wird die Geſchichte der Geometrie die beſten Quellen bekannt machen, welche die Markſcheidekunſt in eigenen Schriften abhandlen.

Achtzehender Abſchnitt.

Geſchichte der Geometrie und die wichtigſte Schriftſteller.

§. 260.

Daß Egypten das Vaterland der Geometrie ſeye, daran läßt uns das einſtimmige Zeugnuß der Alten und faſt aller Neuern nicht zweiflen. Ob aber der jährlich austrettende Nil; oder Seſoſtris, vielleicht auch des Moeris, allgemeine Theilung des Königreichs; oder, nach Ariſtotels Muthmaſung, der auſſerordentliche Müſſiggang der Priſter, welche dem Staat doch etwas nützen ſollten, Gelegenheit zur Erfindung und Verfeinerung unſrer Wiſſenſchafft gegeben haben — iſt nicht zu entſcheiden. Vermuthlich wirkten alle dieſe Umſtände vereint zum Vortheil der Geometrie. Wenigſtens erläutern ſie die Urſache ihres heutzutag ſehr unvollſtändigen Namens. Diß iſt gewiß: Die berühmteſte älteſte griechiſche Weiſen holten ihre geometriſche Känntnuſſe in Egypten. Aber eben das Frolocken dieſer Männer, über verſchiedene von ihnen erfundene ſehr einfache Sätze, das Staunen des Amaſis, als Thales die Pyramiden maaß, beweiſſen, daß die Meßkunſt ſich damals in ihren Kindheitsjahren befunden habe.

§. 261.

Es iſt wahr: Euphorb, ein Phrygier, erfand die Zeichnung der Dreyecke, ehe Griechenlands Weiſe in Egypten ſtudirten. Ein Enkel des Dädalus ſoll Cirkel und Linial, und, nach des ältern Plins Zeugnuß, Theodor von Samus, einer von den Bau-

meiſtern des Epheſiſchen Tempels, Winkelmaas und Bleywage erfunden haben. Allein diß waren, wie in Egypten, blos praktiſche Bemühungen und erſt Thales von Milet erweckte den wahren Geiſt der Geometrie unter den Griechen. Er verließ im Alter ſein undankbares Vaterland, ſtudirte bey den Egyptiſchen Prieſtern, den einzigen Beſitzern der Wiſſenſchafften, Meßkunſt; maaß, auſſer den Pyramiden, ſoviel man weiß, zuerſt, unzugangbare Gröſſen, durch Hülfe der Dreyecke; die Entfernung, zweyer, weit vom Ufer entlegener Schiffe, und bearbeitete, durch dieſe Veranlaſſung, vorzüglich die Lehre von den Triangeln. Ihm haben wir den §. 41. 47. und 84. 3. und wie man ſagt, die Götter für die Erfindung des letzten, das Opfer eines Ochſen zu danken. Er wurde gegen 640 Jahr V. C. G. gebohren und ſtarb im 547ten V. C. G. Unter ſeinen Schülern zeichnen ſich, Anaximander, der erſte geometriſche Schriftſteller, und Anaxagoras, der noch im Gefängnus, an der Quadratur des Cirkels arbeitete, rühmlich aus.

§. 262.

Aber noch weit mehr erhob ſich Pythagoras, ein Schüler des nemlichen Thales und Pherecyds von Sciros. Er fand, durch die Empfehlung des Thales an den Amaſis, in Egypten die beſte Aufnahme, ſtudirte die Säulen des Sothis, brachte zuerſt den Namen Mathematick auf und erfand, unter andern, die §. 60. und 100. erwieſene Sätze, unter welchen der letztere von ihm den Namen erhalten. Ueber die Umſtände dieſer Erfindung und ſein den Göttern dafür gebrachtes Opfer, wird vieles, zum Theil widerſprechendes erzählt, das aber keinen Einfluß auf die Sache ſelbſt hat. Er ſoll 608, nach Andern 507 Jahr V. C. G. gebohren und im 466ten J. V. C. G. geſtorben ſeyn.

§. 263.

Plato, 429 Jahr V. C. G. gebohren ſtarb im 348ten V. C. G. und ihm hat die Geometrie noch weit mehr zu danken. In Egypten, Italien und Cyrene, nützte Er den Philolaus, Timäus, Archytas und Theodor; nahm keinen in der Geometrie Unwiſſenden in ſeine philoſophiſche Lehrſtunden auf, wovon ſein bekanntes: ἀγεωμέτρητος οὐκ εἰσίτω zeuget; führte zuerſt die herrliche ältere analytiſche Lehrart ein, erklärte täglich ein bis zwo geometriſche Aufgaben und höchſt wahrſcheinlich war er der Apoll, welcher der Pythia die Antwort eingab: „Die Athenienſer ſol„len meinen Altar verdoppeln, dann wird die „Peſt bey ihnen aufhören.“ Dieſe veranlaßte die Auflöſung des Deliſchen Problems (§. 242.) und ſetzte alle Geometer in Bewegung. Plato ſelbſt löſte es mechaniſch auf, die Bemühungen der übrigen aber erzählt Eutoccius ad Arch. l. II. de Sph. & Cyl. Archyt, Eudox, Eratoſthenes, Menechmus, Hippokrates von Chius, wie auch nachher Diokles, Pappus, Nikomed und Dinoſtrates verewigten dadurch ihre Namen. Ja es arbeitete Hippokrates an der Quadratur des Cirkels und erfand wirklich die geometriſche Berechnung, des von ihm ſo genannten Hippokratiſchen Monds (§. 146.) Ueberhaupt aber ſuchte die Platoniſche Schule in das Höhere der Geometrie einzudringen und beſchäfftigte ſich unter andern mit der Triſſecktion des Winkels.

§. 264.

Dreyhundert Jahr V. C. G. ſtund Euklid auf, und ſchrieb, als der erſte offentliche Lehrer der Mathematick, ein geometriſches Lehrbuch, wodurch er ſich unſterbliche Verdienſte, einen ewigen Namen machte,

welchem die gröſste Schärfe im Beweiſen, die ſchönſte Verbindung der gewählteſten fruchtbarſten Sätze, den, nun über 2000 Jahre behaupteten, entſchiedenen Rang geben, welchen ihm die gröſsten Meſskünſtler willig zugeſtehen. Es enthält die Anfangsgründe der Geometrie und Arithmetick, deswegen es auch den Namen ςοιχεια, Elemente, bekommen. Nur die 13 erſten Bücher ſind Euklids eigene Arbeit und Hypſikles von Alexandrien ſetzte (nach dem Vorbericht des 14ten Buchs) das 14 und 15te hinzu, um die im 13ten entworfene Lehre, von den ordentlichen Körpern, auszuführen. De Foix de Candalle, vergröſſerte ſie noch mit 3 Büchern, die aber ſehr entbehrlich ſind. Euklids Vaterland iſt ſchwer zu beſtimmen. Wahrſcheinlich ſtudirt' Er in Athen unter Platons Schülern, folgte dem ſehr gnädigen Ruf Ptolomäus des Erſten nach Alexandrien, verlor aber auch am Hof nicht ſeinen trefflichen Charakter, ſonſt hätt' er gewiſs mit ſeinem: Non eſt regia ad Mathematicam via, zurückgehalten. Niemand wird ihn mit dem zänkiſchen Euklid von Megara, der 100 Jahr früher unter dem Sokrates lebte, verwechſeln, wenn man ſeinen liebenswürdigen Charakter im Pappus lieſet. Den Langen des Alterthums, die ſeine Lehrart tadelten — angriffen, antworten: Ptolomäus, Proklus, Naſſir Eddin, Wallis, Barrow, Clavius, Savjle, Saccheri, in Euclide ab omni nævo vindicato, und David Gregory aufs gründlichſte. Sehr vollſtändige litterariſche Nachrichten von den Original-Ausgaben, Ueberſetzungen und Commentaren Euklidens, liefern: Boſe in Sched. litter. de variis Euclidis editionibus Lipſ. 1737. 4to und vorzüglich Hr. Profeſſor Scheibel in ſeiner Einleitung zur mathematiſchen Bücherkänntnus 1ten Stück 1ten Abſchnitt. Wir bemerken: Einen Theon von Alexandrien, Proklus, Eneas von Hierapolis,

den Araber Thebith ben Corah im 9ten und den Perſer Naſſir Eddin von Thus im 13ten Jahrhundert, deſſen ſchöner Commentar 1594 in Rom arabiſch gedruckt wurde. Ins Lateiniſche wurden dieſe Elemente zuerſt vom Engelländer Athelard und vom Italiäner Campanus von Novarra überſetzt. Die Arbeit des Letztern ließ Lucas de Burgo, 1482 und ſeine eigene Ueberſetzung 1489 drucken. Die beſte unter den erſten Original-Ausgaben lieferten: Die berühmten Herwagen in Baſel, 1530, wodurch der Weg zu beſſern Ueberſetzungen und Erklärungen gebahnt wurde, unter welchen ſich Commandin und Clavius auszeichnen. Von allen häufigen Ausgaben nenn' ich nur zwo. Die ſchönſte: Ἐυκλείδȣ τὰ σωζόμενα &c. &c. Oxoniæ, 1703. fol. von David Gregory, und die wohlfeilſte: Euclidis Elementorum libr. XV. ad græci contextus fidem recenſiti &c. &c. 8v. Lipſ. 1743. und neu 1769. Sehr oft findet man nur die 6 erſte Bücher, wie in der lateiniſchen Koppenhagner 1740. und der 1773. in Halle herausgekommenen deutſchen Ausgabe.

§. 265.

Archimed, der groſſe Geometer und Mechanikus, ein Verwandter des Königs Hieron, wurde 287 J. V. C. G. in Syrakus gebohren. Seine Hauptbemühung war, das Gebiet ſeiner Wiſſenſchaft zu erweitern. Wie glücklich er darinnen geweſen, ſagt uns Walliſens Zeugnus: Vir erat ſtupendæ ſagacitatis, qui prima fundamenta poſuit inventionum ferè omnium, de quibus promovendis ætas noſtra gloriatur. Von ſeinen vielen Schrifften und Entdeckungen, führ' ich nur die hauptſächlichſte hieher gehörige an; 1) Seine zwey Bücher über die Kugel und den

Cylinder, worinnen der berühmte, §. 222. vorgetragene Lehrſatz, zuerſt vorkommt; der, wie er wünſchte, durch Unterſtützung des Marcellus, auf ſeinen Grabſtein geſetzt wurde, und woran Cicero nachmals das Grab dieſes groſſen Mannes erkannte. Quæſt. Tuſcul. libr. V. 2) Sein Buch von der Ausmeſſung des Cirkels, als ein Supplement des erſtern, worinn er zu erſt (wie §. 120. das Aehnliche geſchehen) durch Hülfe eines 96 Ecks bewieß: daß d : p = 1 : $3\frac{1}{7}$. Er legte zuerſt die Gründe und bediente ſich des Methodi limitum oder Exhauſtionis, wie, unter andern, vorzüglich ſchön, Mac Laurin in ſeinem Werk von den Fluxionen zeiget.

Die Ruhmvolle Vertheidigung ſeiner Vaterſtadt, die von ihm dazu erfundene Maſchinen und das Ende dieſes groſſen Manns, der mitten im Studiren von dem ungeſtümmen Römer 212 J. V. C. G. erſtochen wurde, findet man: im Plutarch. in Marcello; Tit. Liv. Dec. III. libr. 4to und in der Geſchichte des Polybs, aus Folards franzöſiſcher Ausgabe überſetzt, 6tem Theil 3ten Kap. Die Tittel ſeiner Werke ſammlete ſehr ſorgfältig Fabricius in Biblioth. Græca, wo aber freylich die Kritick, die untergeſchobene, von den ächten abſondern muß. Eutoccius erläuterte die Nro. 1. und 2. angeführte Werke. Im Jahr 1643 erſchienen ſeine ſämtliche Schrifften griechiſch und lateiniſch in Baſel, Borelli gab ſie 1685 heraus und Barrow leiſtete das nemliche. Sein beſter Biographe iſt: Der Graf Maria Mazuchelli in Notizie hiſt. intorno alla vita, alli ſcritti, e invenzioni d'Archimede. 1735. fol.

§. 266.

Archimeds berühmte Zeitgenoſſen waren: Eratoſthenes, Apollonius von Pergen, Conon von Samus, Doſitheus und vielleicht auch Nikomed,

Apollons 8 Bücher von den Kegelſchnitten, brachten ihm den Namen, des groſſen Geometra. Unter den Alten erläuterten ihn: Pappus von Alexandrien, Hypathia die Chatelet des Alterthums, und Eutoccius von Askalon. 830 J. N. C. G. ließ ihn der Calife Abdalla Almamon ins Arabiſche überſetzen. Im 13ten Jahrhundert verſah ihn Naſſir Eddin mit Anmerkungen und Abdolmelec aus Schiras zog ihn ins Kurze. Erſt in der Mitte des 15ten Jahrhunderts lernt' ihn der Occident kennen. Regiomontan wollte ſeine Schrifften herausgeben, ſtarb aber zu frühe. Memmius, ein venetianiſcher Edelmann, lieferte 1537 die erſte lateiniſche Ausgabe, der 1566 die Commandiniſche mit des Eutoccius und Pappus Erklärungen folgte, aber immer nur die 4 erſte Bücher, bis endlich Golius unter vielen arabiſchen Handſchrifften, auch die 7 erſte Bücher des Apollons (denn wahrſcheinlich iſt das 8te auf immer verlohren) aus dem Orient brachte, die Borelli 1658 in der Mediceiſchen Bibliothek fand, ſie mit Hülfe des Abraham Excellenſis ins Lateiniſche überſetzte und 1661. herausgab. Ueber ſeine Abhandlung De Sectione determinata ſehe man: Roberti Simſon Opera quædam reliqua. Glasguæ 1776.

§. 267.

Unter vielen berühmten Geometern vor C. G. (denn alle haben hier nicht Raum) muß, Theodoſius, dem ſeine Sphärick einen bleibenden Namen machte, der kurz V. C. G. lebte, nicht vergeſſen werden. Im erſten Jahrhundert N. C. G. ſchien die Mathematik zu ſchlafen, doch erholte ſie ſich wieder in den 4 folgenden. Menelaus ſchrieb 6 Bücher von den Sehnen, und 3 von den ſphäriſchen Dreyecken, welche ſehr ſelten ſind. Heron, Iſidor, Hypſikles von Alexandrien, Perſeus,

Philon von Thiane, Demetrius von Alexandrien und Ericemus lebten in dieſer Periode.

§. 268.

Mit dem Anfang des fünften Jahrhunderts verſchwanden in Europa die Eroberer im Reiche der Mathematick und vom 6ten bis ans 14te herrſchten die Zeiten der faſt allgemeinen Unwiſſenheit. Doch zeichneten ſich noch vortheilhaft aus: Pappus ein Montucla ſeiner Zeit, von deſſen Collectan. Mathematicis eine lateiniſche Ausgabe 1582. erſchien, die 1660 vermehrt herauskamen. Aller Orten fehlen die 2 erſten Bücher, ein kleines Fragment vom 2ten ausgenommen, welches man Walliſen zu danken hat. Theon und Hypathia (§. 264 und 265.) Proklus (§. 264.) Marin von Neapel, der eine Einleitung zu Euklids Datis ſchrieb, Iſidor von Milet, und Eutoccius (§§. cit.) welche gegen 527. N. C. G. lebten. Diokles, der hauptſächlich in der höhern Geometrie arbeitete, Sporus und ſein Lehrer Philon von Gadara. Endlich gab im J. C. 621. die Einäſcherung der Alexandriniſchen Bibliothek, welche Philopons Bemühungen, vor des bigotten Califen Wuth nicht retten konnten, den Wiſſenſchafften in den dortigen Gegenden den Herzſtoß. Doch machten ſich der Mönch Barlaam, und Argyrus durch ſeine Geodäſie bekannt.

§. 269.

Hingegen hatte bey den Arabern, die Mathematik, unter dem Califen Almamon, der von 814 — 831. regierte, ihr goldenes Jahrhundert. Dieſer Zögling eines chriſtlichen Arztes Jo. Mesva, ließ durch Achmed Ben = Muſa = Ben = Shacer, den Euklid, Theodos Hypſikles, Menelaus, die 4 erſten Bücher des Apollons und durch Thebith Ben = Corah die 3

folgende überſetzen. Naſſir Eddins Verdienſte ums Jahr 1250 ſiehe (§. 264. und 266.)

§. 270.

Bey den ſtolzen Chineſern, war, vor der Ankunft der Europäer, die Geometrie ein bloſſes und dazu ſehr elendes praktiſches Feldmeſſen. Sie kannten den pythagoriſchen Lehrſatz 1000 Jahr früher als die Griechen (Du Halde Hiſt. de la Chine T. III.) und doch blieb er unter ihren Händen unfruchtbar, ja ſie erhielten erſt im 13ten Jahrhundert einige Känntnuſſe, von der ſphäriſchen Trigonometrie, welche doch, in der ihnen angenehmen Aſtronomie, unentbehrlich iſt.

§. 271.

Daß Rom die Weltbeherrſcherinn nicht würdig geweſen wäre, des von ihm unterjochten Athens wiſſenſchafftliche Magd zu ſeyn, iſt bekannt, kein Geometer iſt darinnen merkwürdig, bis im Anfang des 6ten Jahrhunderts der berühmte Conſul Boethius den Nikomachus, Ptolomäus und Euklid frey ins Lateiniſche überſetzte. Gerbert (Ar. §. 293.) brachte auch Geometrie aus dem Orient nach Europa, Jordan Nemorarius, Robert Groß head Biſchof von Lincoln, ſein Bruder Adam Marsh und Jo. de Sacro Boſco (Ar. §. cit.) machten ſie in Europa bekannter und des Letzten Abhandlung von der Sphäre, wurde nachher von Clavius erläutert. Auch theilte Flavio Gioia, 1302. dem Occident, den, den Chineſern weit früher bekannten Gebrauch der Magnetnadel mit. Ein Umſtand, der wegen (§. 115. V.) hieher gehört.

§. 272.

Purbach und Regiomontan waren im 15ten Jahrhundert wahre Wiederherſteller der Mathematick. Ihr beſter Biograph iſt Gaſſendi, ihr Hauptfeld Trigonometrie und Aſtronomie. Von der erſtern unten. Georg Purbach wurde 1423 gebohren, ſtudirte in Wien unter Jo. Gmünden, that beträchtliche Reiſen, ſchlug die ihm in Bologna und Padua angetragene Profeſſuren aus und erhielt die Stelle ſeines Lehrers. Ihm hat man die Einrichtung der Quadranten zu danken. Auf Zureden des Cardinal Beſſarion wollte Er 1461 mit ſeinem Schüler Regiomontan nach Italien reiſen, um vollſtändig Griechiſch zu lernen, ſtarb aber unmittelbar vorher.

Jo. Regiomontan (oder Jo. Müller von Königsberg in Franken) legte ſich ſchon im 14ten Jahr ſehr ernſtlich auf die Mathematick, gieng mit Beſſarion nach Italien, lernte Griechiſch und ſtudirte die Werke der alten groſſen Meßkünſtler. Seine Ueberſetzungen von des Ptolomäus Almageſt, nebſt Theons Commentar, des Menelaus und Theodoſius Sphärick, Apollons Kegelſchnitte, Seren vom Cylinder und Archimeds, ſollen noch gröſtentheils im Mſpt. in der Nürnbergiſchen Bibliothek vorhanden ſeyn. Er commentirte Archimeden, wo Eutoccius geſchwiegen hatte, vertheidigte Eukliden gegen den Campan, widerlegte des Cardinal de Cuſa 1440 vermeynt erfundene Quadratur des Cirkels, kam zuerſt auf den herrlichen Gedanken, die Algebra mit der Geometrie zu verbinden, gieng 1475 auf Einladung Sixtus V. noch einmal nach Rom, um an der Verbeſſerung des Calenders zu arbeiten, ſtarb aber dort im Julius 1476 und wurde ſehr prächtig im Pantheon begraben. Zu dieſen ſetze man noch, den Venetianiſchen Prof. der Mathem. Lucas Paccioli de Burgo Sti Sepulcri

(Ar. §. 298. 2.) deſſen Summa de Arithmetica & Geometria, in ſeinen Gegenden; ſo wie unter andern, Albert Dürrers Inſtitutiones Geometriæ, die Meßkunſt in Teutſchland bekannter machte.

§. 273.

Die ſchon im 15ten Jahrhundert erfundene Buchdruckerkunſt, erleichterte das Studium der griechiſchen Sprache, in welcher damals allein, die wichtigſte Schätze der aus dem Orient verjagten Gelehrſamkeit beſchrieben waren und verſchaffte nun im 16ten, allen Wiſſenſchafften, vorzüglich der Mathem. den glücklichſten Fortgang. Richtige, häufige Ueberſetzungen, machten, die Känntnuſſe der alten Mathematicker gemein, und nun konnte man wieder auf Erfindungen für die Welt denken. Man erhielt Original-Ausgaben vom Euklid, Archimed und Apollon, durch Zamberti, die Herwagens, Memmius, Maurolyc, Tartaglia, Commandin, Baroccius, Pelletier von Mans, de Candalle, Herlin, Daſipod, Rheticus, Scheibel, Dee, Scarborough, Billingsley und Clavius, vorzüglich aber beſſere Ueberſetzungen, im Lateiniſch Italiäniſch, Franzöſiſch und Deutſchen. Platon von Tivoli und Jo. Pena lieferten, jener 1518, dieſer 1557, Theodoſens Sphärick griechiſch. Maurolyc von Meſſina, ein wahres geometriſches Genie, der, in den Kegelſchnitten, ſelbſt einige Entdeckungen machte, welche nachmals ſogar de la Hire nützte, gab 1558. den Menelaus und Theodos heraus. Sein ſchöner, von ihm mit Anmerkungen bereicherter Archimed aber, erſchien erſt nach ſeinem Tod 1572 und 1685. Nicol. Tartaglia ein Breſcianer, mußte ſich durch unendliche Schwierigkeiten durchkämpfen, bis Er Prof. der Mathem. in Venedig wurde, die er in ſeinen Quæſiti è invenzioni diverſe

ſelbſt erzählt. Er lieferte: Einen beträchtlichen Theil des Archimeds 1543, Euklids Elemente 1557; Ein ziemlich groſſes Werk Di numeri è miſure, erfand die Berechnung eines Dreyecks aus den 3 Seiten, ohne die Perpendikulare zu ſuchen und wandte die Algebra ſehr vortheilhaft in der Geometrie an. Er ſtarb 1557.

Friderich Commandin, Arzt und Mathematiker, geb. 1509. in Urbino, geſt. 1575, gab: Einen lateiniſch und italiäniſchen Euklid mit Theons Commentar, 1575; Archimeds geometriſche Werke mit Erläuterung der ſchweren Stellen, lateiniſch 1558; Apollons 4 Bücher von den Kegelſchnitten mit den Erklärungen des Pappus und Eutoccius 1566; Mehmeds von Bagdad ſchöne Geodäſie, und die Ueberſetzung der mathematiſchen Collectaneen des Pappus heraus. Die leztern vollendete er kurz vor ſeinem Tod, und ſeine Erben lieſſen ſie 1588. drucken. Des Jeſuiten Clavius Euklid mit ſeinen Erklärungen, erſchien 1571, wurde 1603 und 1607 neu aufgelegt und hat einen entſchiedenen Werth, ſo wie ſein Buch De Aſtrolabio, Rom. 1593. 4to. ſehr gut iſt. Pelletier von Mans machten ſeine, mit Clavius, über den Berührungswinkel geführte Streittigkeiten bekannt (Clavii Euclid. libr. III. propoſ. XXVIII.) welche in der Mitte des vorigen Jahrhunders Leotaud gegen Gregor von St. Vincent und Walliſen erneuerte, wobey Wallis, Pelletiers und Gregors Parthie nahm. Vielleicht hat der berühmte Karſten in der §. 85. Z. 1. angeführten Stelle am beſten entſchieden.

§ 274.

Petrus Ramus (De la Ramée, geb. zu Cuth in der Piccardie 1515.) verdient, wegen ſeinem Eifer geſunde Weltweisheit und Mathematick empor zu bringen, ein Angedenken. Sein Proemium mathem.

ſeine Scholæ mathemat. Francofurt. ad Moen. opera Lazari Schoneri 1599. 4to. ingleichem Arithmet. libr. duo Geometr. ſeptem & viginti ib. eod. 4to. machen ihn merkwürdig, ohngeachtet er ſeine Abſicht: Eukliden zu verdrängen, wie natürlich, nicht erreichte. Er ſtarb in Paris, mit vielen andern Proteſtanten, 1572. Siehe Saverien Hiſt. des Philoſoph. mod. T. III. p. 30.

Viets Lebensumſtände ſiehe (Ar. §. 295.) Er war ein groſſer Kenner der Geometrie der Alten, verband die Algebre genauer mit derſelben, da er auch bekannte Gröſſen durch allgemeine Zeichen ausdrückte und die geometriſche Conſtrucktionen der Gleichungen einführte, ſtellte den Apollonius de tactionibus wieder her, machte in ſeinem Canon mathem. groſſe Entdeckungen für die Theilung der Cirkelbögen, fand das Verhältnus von d : p bis auf 10 Decimalſtellen und entdeckte Joſ. Scaligers Blöſſe in ſeiner vermeynten Cirkel-Quadratur.

§. 275.

Peter Nunnez, der als Prof. der Mathem. zu Coimbra 1577. geſtorben, ſoll, nach einigen, den erſten Grund, zur bequemen Eintheilung der Winkelmeſſer in Min. und Secunden, in ſeinem Werk De crepuſculis 4to. Olyſſipone 1542. gelegt haben. Eine Eintheilung, welche auch bey geraden Linien brauchbar iſt, und noch heutzutag von vielen Nonius genennt wird. De la Lande und Käſtner machen ihm diß ſtreitig, wovon unten. In Engelland beſchäfftigten ſich Robert Reccard, Leonhard und Thomas Digges mit der Geometrie, doch ohne ſonderlichen Erfolg, hingegen Eduard Wrights Errores in navigatione enthalten feine geometriſche Bemerkungen.

§. 276.

Deutſchland aber hat um dieſe Zeit mehr Geometer als irgend eine Gegend, die ſich aber mehr mit dem unmittelbar nützlichen als dem höhern der Geometrie, mit Arbeiten beſchäfftigten, die unüberwindliche Geduldt erforderten. Werner in Nürnberg, geb. 1468, geſt. 1528, hob ſich über alle, ſchrieb über die Kegelſchnitte, ſtark in der Analyſe der Alten, ſuchte er in ſeinem Tractatus analyticus Euclidis datorum pediſſequus den Apollon De ſectione rationis wieder herzuſtellen, und leiſtete auch der Trigonometrie in ſeinen 5 Büchern von den Triangeln wichtige Dienſte. Jobſt Byrge, Wilhelm des IV. von Heſſen-Caſſel Hof-Aſtronom, erfand den Proportionalcirkel (S. Levini Hulſii Tractatus tres ad Geodæſian ſpectantes) folglich iſt Galiläi nicht allein Erfinder deſſelben, ohngeachtet er ſich daſſelbe Tom. III. Opp. gegen Balthaſar Capra anmaſſet. Man bemerke über dieſe: Andreas Stiborius, Jo. und Lazarus Schoner, Vater und Sohn, Peter Appian, Gemma Friſius, den einige zum Erfinder des Meßtiſchgeus machen wollen; Sebaſtian Münſters Anfangsgründe der Geometrie, oder Rudimenta mathemat. Erasmus Reinholds Geometr. ſubterranea, der, nach Georg Agricola, der erſte Schriftſteller von der Markſcheidekunſt iſt. Von den mühſamſten Verdienſten der Teutſchen unten in der Trigonometrie.

§. 277.

Zur Erweiterung vorzüglich der reinen Mathematick, trug das 17te Jahrhundert mehr als alle vorhergehende bey. Ich werde aber das die höhere Geometrie Betreffende, meinem Zweck gemäß, blos berühren. Dieſer Periode haben wir: Die Logarithmen, Cavallier's Methode des Untheilbaren, Carteſen, Fermat,

Walliſen, Gregory und Barrowen die immer glückslichere Anwendung der Algebre auf die Geometrie, und dem letztern vorzüglich den Saamen der herrlichen Differential- und Integralrechnung zu danken, welche Leibnitz und Newton beyde erfanden, und die ältern Bernoulli zur Vollkommenheit ausarbeiteten. Lucas Valerius, Prof. der Mathem. zu Rom, erweiterte in ſeinem Werk De Centro gravitatis ſolidorum Bonon. 1641. 4to. die Theorie des Schwerpunkts und wandte ſie in der höhern Geometrie an. Peter Metius, der Vater des Adrian Metius, hatte, bey Gelegenheit der, von einem gewiſſen Simon van Eick angegebenen Quadratur des Cirkels, das §. 120. angegebene Verhältnus erfunden, Adrian Metii Geom. pract. P. I. Cap. 10. Adrian Romanus fand es bis auf 17, Ludolph von Ceulen bis auf 35 Decimalſtellen. Man ſehe ſein Werk De circulo & adſcript. Lugdun. Bat. 1619. 4to. ingleichem Fundamenta Arithm. & Geometr. ib. 1615. 4to. beyde von Snell ins Lateiniſche überſetzt und Zetemat. Geometr. Epilogism. Zet. 2. p. 92. Nach Snells Cyclometricus p. 55. verlangte von Ceulen: Man ſollte diß von ihm gefundene Verhältnus, auf ſein Grabmal ſetzen, welches auch geſchehen ſeyn ſoll. Seine und Romanus Schrifften ſind etwas ſelten und Snells Cyklometrie iſt dabey unentbehrlich, da ſie durch zween Lehrſätze, das Verhältnus von d : p, weit ſchneller, als Archimed und Ceulen finden lehret.

§. 278.

Während der Zeit, da Engelland die Logarithmen ausbrütete und erzog (Ar. §. 303.) legte in Teutſchland, Keppler (gebohren zu Weil im Würtembergiſchen den 15. Dec. 1571, geſt. 1630. den 5. Nov.) in ſeiner Stereometria doliorum, Linz 1615. Fol.

die erſte Gründe zur Geometrie des Untheilbaren ja zur Rechnung des Unendlichen. Hier finden wir zuerſt unſern §. 132. Z. 1. §. 194. Z. 6. und im 2ten Theil dieſes Werks, die ſchönſten Anlagen zum Grundſatz des Größten und Kleinſten. Gegen ihn ſchrieb Alexander Anderſon ſeine Vindicias Archimedis 1616. Guldin, geb. in St. Gallen 1577, geſt. 1643. ein Jeſuit und Prof. der Mathem. in Rom, wandte die Theorie des Schwerpunkts vorzüglich zu Berechnung des Innhalts der Figuren und Körper an. Man ſehe ſein Werk: De Centro gravitatis unà cum tabulis numer. quadrat & cubicorum decies millium. Wien 1635. und 1640. Fol. Freylich waren ſeine meiſte Beweiſſe Inducktionen und wo Schärfe erfordert wurde, verunglückte er oft, wie diß Cavallieri in Exercit. Geom. 1. und 2. deutlich zeiget. Dieſer Bonaventura Cavallieri geb. in Mayland 1598, geſt. 1647, trug zur Erweiterung und Erleichterung der Geometrie ungleich mehr bey. Er wurde ein Hieronymite, ſtudirte in Piſa unter Benedickt Caſtelli, einem Schüler des Galiläi, Mathematick, erhielt 1629. gleich nach der Erfindung ſeines Grundſatzes des Untheilbaren, in Bononien, an Magins Stelle den mathem. Lehrſtuhl, wo ihn ſeine Geometria indiviſibilibus continuorum nova ratione promota, Bonon. 4to. 1635. Unterſuchung der Kegelſchnitte in Speculo Uſtorio, 4to. 1632. und Exercitat. Geometricæ, 1643. berühmt machten. Leicht verleitet dieſe Methode, wenn ſie nicht ſehr behutſam nach dem Geiſt der Alten vorgetragen wird, zu ſtarken Irrthümern. Z. E. Daß Flächen aus der Zuſammenſetzung vieler Linien, Körper aus der Zuſammenſetzung vieler Flächen entſtehen, daß die Oberfläche zweener Körper, welche gleiche Baſen und Höhen haben, der eine aber lothrecht, der andere ſchief iſt, einander gleich ſeyen, S. unter andern La Chapelle Inſtitut. de Geometr.

T. II. p. 335. Wer ſie daher anwenden will, muß D'Alemberts ſchöne Erinnerung in ſeinem Traité de Dynamique 1743. p. 36. ja nicht vergeſſen.

§. 279.

Vorzüglich aber hatte, wie ſchon gemeldet wurde, die höhere Geometrie in dieſem Jahrhundert eine reiche Erndte. Fermat, Roberval, de Cartes, Merſenn, Galiläi, Torricelli, Pascal, Wallis, Laloubere, Chriſtoph Wren, Huygens, Leibnitz, Newton, Jacob und Jo. Bernoulli die ältern, arbeiteten darinnen. Eben ſo ernſtlich bearbeiteten die Geometrie nach dem Sinn der Alten: Mydorge, Deſargues, Paſcal, Gregor de St. Vincentio (deſſen Quadratura circuli & Hyperbolæ, Antwerp. 1647. Fol. ſehr ſchätzbar iſt) Huygens (Seine Erfindungen, die Logarithmiſche Linie betreffend, verſah Grandi mit Beweiſſen) Jacob Gregory, Stephanus de Angelis, Michael Angel. Ricci, Viviani Galiläi's Schüler, und auf deſſen Veranlaſſung, Leibnitz, Jac. Bernoulli, de L'Hoſpital, Wallis, David Gregory, Guido Grandi, Jo. Ceva in der Geometria motus, 1692. und De lineis rectis ſe invicem ſecantibus ſtatica conſtructione. Mediolani 1678. 4to. Carteſens Geburt und Tod ſiehe (Ar. §. 295.) Er wandte vorzüglich die algebraiſche Analyſe auf die höhere Geom. an, lehrte Gleichungen vom 3ten, 4ten, 6ten Grad conſtruiren, bemerkte den Unterſchied zwiſchen den mechaniſch und geometriſchen (nach Leibnitzen; algebraiſch und tranſcendentiſchen) krummen Linien, gab eine ſinnreiche Methode für die Tangenten an, und bediente ſich derſelben zur Beſtimmung des größten und kleinſten, wie auch der Aſymptoten. Seine Geometrie erſchien 1637 franzöſiſch, und wurde

von Franz von Schooten ins Lateiniſche überſetzt, mit weitläuftigen Erklärungen, Amſterdam 1659. 4to. herausgegeben. Hier wandte de Cartes, Harriotts Calcule, eben ſo in der höhern Geometrie an, wie Oughtred in ſeinem Clave und Marin Ghebald Libr. V. de reſolutione & compoſitione mathem. Rom. 1630. Fol. die Vietiſche auf die Elementargeometrie angewendet haben. Sein beſter Commentator iſt, nebſt Schooten, Claudius Rabuel in den Commentaires ſur la Geometrie de Mſr. de Cartes, Lyon 1730. 4to. An Fermat, Roberval, und Paſcal dem Vater, hatte er ſtarke Gegner, an Mydorge, Deſargues, Hardy, Beaune, de Witt, Schooten, Huygens, Hudde, Van-Hevraet und Sluſe Vertheidiger und Freunde.

Fermat, Parlamentsrath zu Touloufe, gebohren 1590, geſtorben 1664, that in gewiſſer Art noch mehr für den Calcul und die höhere Geometrie als Cartes. Er erfand die Methode vom Größten und Kleinſten, leitete aus ihr die Lehre für die Tangenten her, und war immer der Vorläufer der Rechnung des Unendlichen. Man findet ſeine Werke De tactionibus ſphæricis, ſeine Arbeiten über Apollons 2 Bücher Des lieux plans, ſeine Bemühungen um die Ciſſoide, Conchoide und die Quadratur vieler Hyperbeln ꝛc. in ſeinen ſämtlichen zu Touloufe 1692. in 2 Fol. Bänden, unter dem Tittel: Opera mathematica, herausgekommenen Schrifften. War (wie Kästner) ein eben ſo ſchöner als gründlicher Geiſt, der treffliche lateiniſche, franzöſiſche und ſpaniſche Gedichte machte und das Gebiet der reinen Mathem. ſehr erweiterte. Seinen herrlichen, in denen mit Carteſen geführten Streitigkeiten, gezeigten Charackter, ſiehe: Saverien Hiſt. des Philoſoph. modern. T. V. p. 125.

Chriſtian Huygens, geb. im Haag den 14ten April 1629, geſt. den 8ten Jun. 1695, ſtudirte in Leyden unter Schooten 1645. Mathematick, widerlegte die 1647. herausgekommene angebliche Quadrat. Circ. & Hyperb. des Gregor von St. Vincent in ſeiner Exetaſi Quadr. Circ. P. Gregor. à St. Vincentio, 1651. 4to. Schrieb ſelbſt: De Circ. & Hyperb. Quadratura, ingleichem De Circuli Magnitudine inventa, 1654, wo er die Annäherungsmethoden erklärt. Seine ſämtliche Werke kamen in 4 Quartbänden, die 2 erſten unter dem Tittel: Chriſt. Hugenii Opera varia, die letzten: Chriſt. Hugenii Opera poſthuma heraus.

§. 280.

Jo. Wallis, geb. zu Ashford in der Grafſchafft Kennt, den 23ten Octob. 1616, geſt. 1703 den 28. Octob. wurde 1649 Prof. der Mathem. zu Oxford. Seine ſämtliche Schrifften kamen, 1699. in Fol. unter dem Tittel: Jo. Walliſii Opera mathem. in 3 Theilen heraus. Er wandte in ſeiner Rechenkunſt des Unendlichen, die 1655 erſchien, den Calcul genauer auf Cavallieri's Methode an, wodurch er, als Annäherung, für den Cirkel fand, daß:

$$d^2 : \frac{dp}{4} = 1 : \frac{2.\ 16.\ 36.\ 64.\ \text{ꝛc.}\ \text{ꝛc.}}{3.\ 15.\ 35.\ 63.\ \text{ꝛc.}\ \text{ꝛc.}}$$

und hiedurch den Grund zu manchen Erfindungen Newtons, Neils, Wrens, Brounkers und des teutſchen Merkators legte. Sein berühmter Zeitgenoſſe war

Iſaac Barrow, geb. in London gegen 1630, geſt. 1678, wurde 1660 zu Greßham und 1668 zu Cambridge Prof. der Mathem. Seine Notæ in Elem. Euclid. Cantuar. 1655. 4to. Euclid. data ſuccincte demonſtr. ib. 1659. 4to. Lect. Opticæ & geometr. 1669. Archim. Opp. Apollon. Conica ac Theo-

doſ. Sphærica meth. nov. demonſtr. Londin. 1675. 4. Lect. mathem. Cantuar. 1684. 8vo. erwarben ihm einen deſto bleibendern Ruhm, da ſeine vorgetragene Methode, für die Tangenten, und ſein Triangulum characteriſticum den allernächſten Grund zur Differentialrechnung legten, welche Leibnitz und Newton, einer ſo gut als der andere nützen konnten. Sein beſter engliſcher Biograph iſt Abraham Hill; doch findet man ſchon in The lives of the Profeſſors of Gresham College. London 1740, nicht nur von ihm, ſondern auch von Güntern, Gellibrand, Wren, Machin, Brigg ꝛc. ꝛc. ſchöne Nachrichten.

§. 281.

Der groſſe Newton (geb. zu Woolſtrop in Lincoln 1642 den 25ten Dec. A. St. geſt. den 20ten Merz 1726) kam im 12ten Jahr nach Grantham, faßte Euklids, Carteſens, Repplers (Optick) und Walliſens Schrifften mit einem Blick und machte, während dem Leſen derſelben, die wichtigſte Entdeckungen. Barrow verſchaffte ihm, die von ihm verlaſſene Profeſſur der Mathem. zu Cambridge in ſeinem 17ten Jahr und wenige Jahre darauf, hatte er ſchon die herrliche Erfindungen über das Licht und den Fluxionencalcul gemacht, die er beyde, unter andern, aus dem ſchönen Grunde, lang unterdrückte: Weil er ſich in ſeinem 21ten Jahr für zu jung, zu unreif für einen Schrifftſteller, einen Lehrer des Publikum hielte (Newt. Epiſt. in commerc. epiſt.) da er doch in Kenntnuſſen ein Neſtor gegen unſre ſchreibſelige Jünglinge war. Man kennt in Ihm den Erfinder des Calculi fluxionum oder der Differentialrechnung, des allgemeinen Theorem. Binom. und der Reihe für die Peripherie des Cirkels. Von ſeinen übrigen wichtigen Entdeckungen ſehe man Montucla und Save-

rien, wo zugleich Nachrichten von ſeinem faſt königlichen Leichenbegängnus und die ihm geſetzte ſchöne Grabſchrifft zu finden. Von ihm ſchrieb Young:

Schau herunter auf das Grab und dann nach des Himmels Höhen —
Um das Maas von ſeinem Leib und von ſeinem Geiſt zu ſehen.

Und Voltaire:

Confidents du Très-Haut, ſubſtances éternelles,
Qui brûles des ces feux, qui couvrez de vos ailes
Le trône où Votre Maitre eſt aſſis parmi Vous;
Parlez, du Grand Newton, n'etiez-vous point jaloux?

Seine ſämtliche Schrifften (die Principia philoſ. nat. mathem. Arithm. univerſalis und Optick ausgenommen) findet man in: Iſaaci Newtoni Opuſcula in tres tomos diſtributa, Lauſannæ & Genevæ 1744. Tom. I. acceſſit commentariolus de vita auctoris.

Teutſchlands Newton, der den Engelländer in vielem noch übertraf, Gottfried Wilhelm von Leibnitz wurde zu Leipzig 1646 den 23. Jun. A. St. gebohren und ſtarb den 14ten Novemb. 1716. N. St. Könnten Polyhiſtors im ſtrengſten Verſtand exiſtiren, ſo wär Ers gewiß geweſen. Wir betrachten in ihm dißmal bloß den Mathematicker, den teutſchen Erfinder der Differential-Rechnung, die Er 1684 in den Act. Lipſ. unter der Aufſchrifft: G. G. Leibnitii Nova methodus pro maximis & minimis itemque tangentibus. ac ſingulare pro his calculi genus, zuerſt bekannt machte. Sein Name ſteht vor den tiefſinnigſten Aufgaben, welche zu ſeiner Zeit aufgelöſet wurden, und Er hat Theil an allem, was die neuere Geometrie Groſſes und Schweres hervorgebracht hat. Offt nahm er ſich vor, Differential- und Integral-Rechnung unter dem Tittel: De ſcientia infiniti, herauszugeben, und nur ſeine unendliche Beſchäfftigungen

hielten ihn ab, wobey er oft ſagte: Er ſehe gern in fremden Gärten Pflanzen wachſen, wozu Er die Saamen verſchafft hätte. Auf ſeine Vorſtellungen errichtete 1701. Friedrich I. die Akademie der Wiſſenſchafften in Berlin. Vollſtändige Nachrichten von dem Leben und Schrifften des unſterblichen Manns findet man in den Act. Lipſ. 1717. Fontenells Lobſchrifft (ſiehe die Theodicee Hannov. und Leipzig 1763.) vorzüglich in Käſtners Lobſchrifft auf ihn, Altenburg 1769. 8vo, wo Seite 19 — 21 aufs gründlichſte gezeigt wird: Daß Er eigener Erfinder der Differential-Rechnung geweſen, und vorzüglich die Geſchichte des berühmten Newtoniſchen Scholions, Princip. philoſ. mathem. libr. II. 1687, welches ſich noch in den Ausgaben von 1713 und 1714 findet, aber in der Ausgabe 1726 (wahrſcheinlich ohne Newtons Wiſſen) weggelaſſen wurde, herrlich entwickelt wird. Man ſehe überdiß: Jo. Jac. Meyen, De Fluxione fluxa, ſive de Leibnitio primo calculi infiniteſimalis auctore, Stettin 1777. 4to.

§. 282.

Zeitgenoſſen dieſes groſſen Manns waren: Philipp de la Hire, geb. in Paris 1640, geſt. 1718. Er ſtudirte, auf der Reiſe durch Italien, ſtatt der Alterthümer, die er aufſuchen wollte, ſeine Geometrie aus dem Apollon, woraus ſich ſeine Neigung zur ſynthetiſchen Lehrart, die er der neuern Analyſe ſo ſehr vorzog, begreiffen läßt. Von ihm haben wir die Sectiones conicæ in novem libros diſtributæ 1685. Fol. wie auch Ecole des Arpenteurs 1689 und 1692.

Den beyden ältern Bernoulli war die Ehre, den neuerfundenen Calcul des Unendlichen vollkommen in Teutſchland und Frankreich allgemein zu machen, vorbehalten. Jacob Bernoulli (geb. in Baſel 1654.

geſt. 1705.) drang ſich, durch alle, ihm von den Seinigen in Weg gelegte Hindernuſſe, zu den Heiligthümern der Mathematick, ließ 1691. einen Verſuch von der Differential- und Integralrechnung in die Acta Erud. einrücken, legte die Aufgabe von der Kettenlinie vor und verlangte: Man ſollte die von ihm erfundene Logarithmiſche Spirale, mit der Aufſchrifft: Eadem mutata reſurgo; auf ſein Grabmal ſetzen. Seine herrliche Werke findet man beyſammen in: Jac. Bernoulli Opera, II. Tom. gr 4to. Genev. 1744. und gleich im erſten Theil ſeinen vollſtändigen Lebenslauf. Sein jüngerer Bruder, Jo. Bernoulli (geb. in Baſel 1667, geſt. 1748.) arbeitete, unter ſeiner Anführung, im nemlichen Fach, mit noch gröſſerm Erfolg; hielt 1694, da er den Mediciniſchen Doctorgrad annahm, eine Rede: De orig. & dign. medicinæ & una de utilitate matheſ. ad ſtudium medicum, wurde durch die Auflöſung der von ſeinem Bruder vorgelegten Aufgabe von der Kettenlinie, als Lehrer des Satio im Differentialcalcul, durch die Erfindung der Exponentialrechnung, wovon er den erſten Verſuch 1697 bekannt machte, und nicht weniger durch ſeinen groſſen Schüler Marquis de L'Hoſpital, der mit Varignon, den neuern Calcul in Frankreich bekannt machte, berühmt. Seine Integralrechnung, findet man, in der Sammlung ſeiner ſämtlichen Werke: Jo. Bernoulli Opera omnia in quatuor tomos diſtributa, Lauſannæ & Genev. 1742. gr. 4to. im 3ten Theil: Lectiones mathem. de calculo integralium in uſum Illuſtr. March. Hoſpitalii conſcriptæ, cum Autor Pariſiis ageret 1691 und 1692. Er wurde 1703. Prof. der Mathem. und Phyſ. in Gröningen und 1705. das nemliche in Baſel, an die Stelle ſeines verſtorbenen Bruders, wurde 1709 nach Utrecht, 1714 nach Padua und 1717 aufs neue nach Gröningen, wie-

wohl umſonſt, berufen. Sein Leben und Verdienſte ſehe man Hiſt. Acad. Scient. Paris 1748. p. 124. Hiſt. Acad. Scient. Berolin. 1747. p. 22. und 1750. p. 173. Pinacoth. Brucker. wie auch Athen. Rauricæ p. 373. Man ſetze zu dieſen beyden berühmten Brüdern den Nik. Bernoulli (geb. in Baſel 1687, geſt. 1759.) der pro magiſterio: ſeine Schrifft De ſeriebus infinitis earumque uſu vertheidigte, in Gröningen unter Jo. Bernoulli ſtudirte, in Frankreich, Caſſini und Varignon, in Engelland, Newton, Halley, Burnet und Moivre nützte, in Venedig auf Leibnitzens Empfehlung, an Hermanns Stelle, Prof. der Mathem. wurde und ſich durch häufige Schrifften berühmt machte. Man ſehe dieſe in Athen. Rauric. p. 150 und 151.

Was die Bernoulli's, Leibnitzen, waren, war Halley, Newtonen. Er wurde in London 1656 gebohren und ſtarb 1742 zu Greenwich als königl. Aſtronome, war einer der vertrauteſten Freunde Newtons, der ihn hauptſächlich zur Ausgabe ſeiner Schrifften bewog, ſie beſorgte und ſeine Erfindungen immer anwendbarer machte. Als Prof. der Geometrie zu Oxford (an Walliſens Stelle) überſetzte er: Apollonii Pergæi de ſectione rationis libr. duo, aus dem Arabiſchen und ſeine Libr. octo conicor. & Sereni Antiſſenſis de ſect. cyl. libr. duo, aus dem Griechiſchen; wurde 1713 Sekretar der Londner Akad. der Wiſſenſch. und 1720 königlicher Aſtronom zu Greenwich. Seine übrige ausnehmende Verdienſte gehören in die angewandte Mathematick und Naturlehre.

Marquis de L'Hoſpital (geb. 1661, geſt. 1704.) war ſeines groſſen Lehrers würdig. Seine Analyſe des infiniments petits 1699 (in deren Vorrede p. IX und XIV. er Leibnitzen gegen Newton Gerechtigkeit widerfahren läßt) iſt eines der herrlichſten Werke und enthält vollkommen die Grundſätze und Methoden ſei-

nes Lehrers, nur Schade, daß Er ſich in demſelben Bernoulli's nicht auch vor dem Publikum dankbarer erinnert, angezeigt hat, wie viel er demſelben zu danken hatte (S. Commerc. epiſt. Leibn. & Bern. Lauſannæ 1745. II. Tom. 4to. T. I. p. 350.) Nach ſeinem Tod erſchien 1707 der von ihm fertig hinterlaſſene Traité analytique des ſections coniques &c. welcher dem erſten Werk an Güte nichts nachgiebt. Einer ſeiner Commentatoren iſt Peter Varignon (geb. zu Caen 1654, geſt. 1722.) Ihn fachte Euklids Lektüre, auf den er von ohngefehr in einem Buchladen ſtieß, mit ſolchem Erfolg zur Mathem. an, daß er Eclairciſſement ſur l'Analyſe des infiniment petits 4to. ſchrieb, welche die von L'Hoſpitalen weggelaſſene Gründe trefflich ergänzen. Er erfand die leichteſte Berechnung des Innhalts eines Schiffs, welche P. Pezenas, älterer königl. Profeſſor der Hydrographie zu Marſeille, ſo gut, in ſeiner Theorie & la pratique du jaugeage des tonneaux des navires & de leurs ſegmens nützte. Nach ſeinem Tod gab Mr. Cochet ſeine Cahiers de Mathematiques 1731. unter dem Tittel: Elemens de Mathematiques heraus. Und endlich gab

P. Reynau dem L'Hoſpitaliſchen Werk an vielen Orten volles Licht und deſſen Beweiſen gehörige Strenge, in ſeiner Analyſe demontrée, worinn er den Calcul des Unendlichen ſo ſchön vorträgt, daß ihn Fontenelle den Euklid der höhern Geometrie nennt. Er wurde gebohren 1656 und ſtarb 1728. Doch leiſtete noch ſehr viel mehr: Mac Laurin (geb. zu Kilmoddan 1698, geſt. 1746.) der ſein Vaterland als ein 2ter Archimed rühmlich gegen die Rebellen vertheidigte. Diß groſſe Genie, baute, in ſeinem Treatiſe of fluxions die Rechnung des Unendlichen, auf die ſicherſte Gründe der ſtrengſten Geometrie und vermied

alles, was dieſe herrliche Erfindung, bisher, noch manchen, hatte unrichtig oder doch ungewiß ſcheinen laſſen. Auch er ſtieß von ohngefehr auf den Euklid und ſtudirte die 6 erſten Bücher, ohne einige Anweiſung für ſich durch, erfand auch ſchon im 16ten Jahr mancherley Werkzeuge, die krumme Linien, in einem Zug, zu beſchreiben. Gegner der Differentialrechnung waren, der Abt Catelan, Michel Rolle und Nieuwentyt. Der Erſte wurde von L'Hoſpital, der Andere von Varignon, Jo. Bernoulli und Saurin, der Dritte von Leibnitzen, Jo. Bernoulli und Hermann aufs gründlichſte, ſo widerlegt, daß dieſe herrliche Erfindung ſeit 1705 allgemein angenommen und benutzt wird.

§. 283.

Aber auch die Inſtrumente gewonnen in dieſem Jahrhundert. Peter Vernier verbeſſerte ihre genaue Eintheilung in ſeinem Buch La Conſtruction & les uſages du nouveau Quadrant mathematique, Bruxelle 1631. ausnehmend, und ſein Name blieb ſeiner Erfindung. S. Käſtners Lehrbegriff der Optick p. 314. Jo. Prätorius, Prof. der Mathem. zu Altdorf (geſt. gegen 1616.) erfand, das freylich anfänglich ſehr unvollkommene Meßtiſchgen (S. Dan. Schwenters praktiſche Geometrie P. III. Nürnberg 1667. 4to.) Es folgt alſo nicht, wie Hr. Vollimhaus, in ſeiner Gründlichen Anweiſung zum Landmeſſen, 1776. 8vo, aus einer auf einem Meßtiſchgen befindlichen Jahrzahl 1609 zu ſchlieſſen ſcheint: Daß Prätorius daſſelbe nicht erfunden.

§. 284.

Nun konnten die Geometer des 18ten Jahrhunderts ſchon auf Männerſchultern tretten. Sie mußten daher, wenn ſie anders die Fähigkeiten ihrer Vorgän-

ger hatten, ungleich weiter als jene ſehen, da ſie noch über diß ihr Aug mit den trefflichſten Werkzeugen waffneten. Höchſtbeträchtlich wuchs die Geometrie in Abſicht auf die allgemeinere Ausbreitung dieſes Studiums, wozu in Teutſchland Wolf unſtreittig erſtaunend viel beytrug. Vorzüglich wurde die höhere Geometrie von dem Fürſten der Mathematicker Euler, Daniel und Jo. Bernoulli den jüngern, Lambert, Käſtner, Karſten und Segner bereichert. Siſſer, Canniver, Bird, Dollond, Ramsden und Brander erhoben die Werkzeuge zu einer faſt unglaublichen Vollkommenheit.

§. 285.

Chriſtian Freyherr von Wolf (geb. in Breßlau 1679, geſt. in Halle 1754.) hatte von Jugend an einen auſſerordentlichen Hang zum Erfinden und Beweiſſen, fand hiezu ſchlechte Hülfsmittel in der ſcholaſtiſchen Weltweisheit, hörte aber auch oft, daß Geometrie und Algebre vorzügliche Vortheile hierinnen leiſten. Diß erweckte in ihm eine unerſättliche Begierde zur Mathematick, auf die er ſich mit aller Macht legte, den Clavius und Euklid las und aus Horchii element. arithmeticæ vulgaris & litteralis einige Idee von der Algebre bekam. Doch reichten ſeine mathematiſche Känntnüſſe noch nicht hin, Tſchirnhauſens Medicinam mentis ganz zu verſtehen. Deſto eifriger hörte er, von ſeiner Vaterſtadt unterſtützt, in Jena, Albert Hambergern in der Meßkunſt und Phyſick, ſo glücklich, daß er nach Jahres Friſt ſelbſt darinn Unterricht geben konnte. Erhielt, bey einem Tſchirnhauſen abgeſtatteten Beſuch, deſſen vollen Beyfall, 1702. in Leipzig die Magiſterwürde und 1703. durch ſeine Streitſchrifft: Philoſoph. pract. univerſ. methodo mathem. conſcripta, Leibnitzens Beyfall und ſchrifftliche Aufmunterung, welcher durch ſeine Diſſert. De

rotis dentatis, und 1704. De loquela, wie auch De algorithmo infinites: differentiali und 1705, durch Diſſert. methodum ſerier. infinit. ſiſt. immer gröſſer wurde. Er bekam 1706 den Ruf als Prof. der Mathem. nach Gieſſen und Halle faſt zugleich, nahm den letztern an und machte ſich und die Akademie ausnehmend berühmt, ſtand auch daſelbſt bis 1723, wo ihn der Neid ſeines Verfolgers Joachim Langens, der den König in Preuſſen hintergangen hatte, vertrieb. Er mußte Halle binnen 2mal 24 Stunden räumen, wurde aber vom Landgrafen von Heſſen-Caſſel als erſter Profeſſor der Philoſophie, mit dem Charackter als Hofrath, nach Marburg berufen. Die Petersburgiſche Akad. der Wiſſenſch. ernannte ihn 1725. zum Profeſſor Honorarius, und einigemal ließ ihn die Kaiſerinn nach Petersburg beruffen. Er zog aber Marburg aus Dankbarkeit vor, erhielt 1733. die ausgezeichneteſten Gnadenbezeugungen vom König in Schweden, wurde Mitglied der Pariſer Akad. der Wiſſenſchafften. gegen das Ende dieſes Jahrs vom König in Preuſſen das 1te und 1739 das 2temal nach Halle, unter königlichen Anerbietungen zurückberuffen, ſchlug aber auch dieſen Ruf, aus Dankbarkeit gegen Marburg und ſeinen Beſchützer, aus; bis er endlich, vom jetzigen König in Preuſſen, gleich nach ſeiner Thronbeſteigung, aufs neue berufen wurde, der ihm auch vom König in Schweden, die Erlaubnus den Ruf anzunehmen auswirkte, worauf Er den 6ten Dec. 1740. als königl. geheimer Rath, Vicekanzler, Prorektor, Profeſſor des Nat. und Völkerrechts und der Mathem. nach Halle zurückgieng, da er kurz vorhin einen Ruf nach Utrecht ausgeſchlagen hatte. Dort wurde Er, nach Carls des VI. Tod, während dem Zwiſchenreich, vom Churfürſten in Bayern als Vicar. Imper. in den Reichs-Adelſtand erhoben und 1744 vom König zum wirklichen Kanzler ernennet. Von ſeinen häuffigen

Schrifften, nenn' ich nur einige Mathematiſche: Schediasma de inven. ſinu. anguli multipl. ex dat. ſin. ſimpl. 1707. Solutio dubii geometr. circa tetragonism. circuli 1708. Elementa aërometriæ 1709. die er zuerſt ſyſtematiſch abhandelte. Anfangsgründe der Mathem. 8vo. 1710. Seine erſte Ausgabe der Vlacquiſchen Sinustafeln 1711. (S. Trig.) Element. Matheſ. univerſ. II. Tom. 4to. 1713 und 1715. Halæ, welche ſehr vermehrt in 4 Theilen 1730, 1733, 1735 und 1736 erſchienen und endlich in 5 Theilen in Genev, gr. 4to, 1732, 1733, 1735, 1737 und 1741. gedruckt wurden (Ein Werk, von dem auch Montucla 1758. T. II. p. 156. und Saverien in Hiſt. de Philoſoph. Mod. p. 260. ganz ausnehmend vortheilhaft urtheilen) Meditatio de ſimil. figur. 1715. Lexicon Mathem. 1716 erſte, 1736 2te Auflage. Theoremata geom. nova 1717. Auszug aus den Anfangsgründen aller mathem. Wiſſenſch. 1725. Principia dynamica 1726. S. Comment. Petropol. &c. &c. Er machte die Anwendung der mathem. Lehrart allgemein, brauchte den philoſophiſchen Begriff der Aehnlichkeit, um die Lehre von der Aehnlichkeit der Triangel und der Figuren überhaupt daraus zu erweiſen. Eine Methode, welche dieſe etwas ſchwere Lehre, dem Anfänger ungemein erleichtert und den Lehrer in Stand ſetzt, manches früher zu beweiſen, als wenn ſie nach Euklids Gang vorgetragen wird.

§. 286.

Leonhard Euler, Direktor der Mathem. Claſſe der kaiſerl. Petersb. und königl. Preuſſ. Akad. der Wiſſenſch. Profeſſor der höhern Mathem. zu Petersb. und Berlin, der Mathematiſche Leibnitz unſers Jahrhunderts, wurde den 18ten April 1707 in Riechen gebohren. Sein Vater, Prediger dieſes eine Stunde

von Baſel entlegenen Fleckens, ein ehemaliger Schůler Jacob Bernoulli's, legte den Grund, zu ſeiner kůnftigen mathematiſchen Grŏſſe ſo trefflich, daß Euler, da ihm Jo. Bernoulli damals unmŏglich Privatvorleſungen halten konnte, durch eigenes fleiſſiges Studiren, der ihm geliehenen mathematiſchen Schrifften, worinn ihn Bernoulli alle Sonntag Abends průfte, und ihm das dunkel gebliebene erlăuterte, ſo weit kam, daß Er 1724 eine ſchŏne Rede De comparatione Philoſophiæ Carteſianæ & Newtonianæ hielte. Anfånglich ſollt' er Theologe werden, legte ſich aber bald, unter Anfůhrung Jo. Bernoulli, ganz auf die Mathematick, deſſen Sŏhne, Nikolaus und Dan. Bernoulli, ihm 1726. von Petersburg aus, den Lehrſtuhl der Phyſiologie daſelbſt verſchafften, worauf Er Medicin ſtudirte und 1727 dahin abgieng, um ſeine Profeſſur anzutretten. Dort bemerkte man gleich ſeine ůberwiegende Stårke in der Mathem. machte ihn zum Adjunkt in der hŏhern Meßkunſt, und 1730, als Hermann und Bůlfinger den Norden verlieſſen, zum Prof. der Dogm. und Experimental-Phyſick und 1733 nach Dan. Bernoulli's Abreiſe zum Prof. der hŏhern Mathem. und Inſpektor der geograph. Claſſe. 1735 verlohr er, durch 3 Tag und 3 Nåchte ununterbrochen fortgeſetztes Calculiren, das eine Aug, gieng 1741. als Prof. der Mathem. nach Berlin, wo er 1744. bey der Reform der Akad. der Wiſſenſch. zum Direktor der mathem. Claſſe ernannt wurde, und auch hier, bis auf ſeine Růckreiſe nach Petersburg, eine jåhrliche Ruſſiſche Penſion von 200 Rubeln genoß. Hier ůberhåufte ihn Friedrich der 2te mit Gnade, und bediente ſich ſeiner mathem. Einſichten und Rathes in vielen Fållen. 1742. hatte er die Gnade, die Wůrtembergiſche Fůrſten und die wirklich regierende Fůrſtinn von Anhalt Deſſau in der Mathem. und Phyſ. zu unterrichten, welcher letztern er auch ſeine Lettres

à une Princeſſe d'Allemagne ſur divers ſujets de Phyſique &c. 1768 zueignete. 1760 wurde bey der Eroberung Berlins auch ſein Landgut bey Lüzow geplündert, Er aber auch von Rußland kaiſerlich entſchädigt, und endlich rief ihn Catharine II. nach ſeinem 25jährigen Aufenthalt in Berlin, nach Petersb. zurück. Er folgte, ſo ungern ihn Friderich entließ, wurde daſelbſt mit kaiſerlicher Gnade und Belohnungen überhäuft, und erhielt 1771 (denn er war inzwiſchen völlig blind geworden) durch eine höchſtglückliche Operation, wieder den völligen Gebrauch ſeines einen Auges. Von ſeinem unermüdeten Fleiß und unvergleichbaren mathem. Einſichten zeugen: Seine häufige Schrifften, die erſtaunende Menge für ſo viele Akademien gelieferte Ausarbeitungen und dafür erhaltene Preiſſe, wie auch die von Engelland und Frankreich erhaltene auſſerordentliche Belohnungen. Noch jetzo iſt der groſſe Mann, in ſeinem hohen Alter, ungeachtet er wiederum faſt ganz blind iſt, unermüdet für ſeine Wiſſenſchafften, und hat ſeit 1775 mehr als 200 Aufſätze dicktirt, welche zum Druck, als ein Vorrath auf manche Jahre, für die Petersb. Akademie, fertig liegen. Keines ſeiner geringſten Verdienſte iſt der, ſeinen 3 berühmten Söhnen, Fuſſen und überhaupt 8 Profeſſoren der Ruſſiſchen Akad. ertheilte Unterricht. Die erſtern ſind: Jo. Albert Euler, Inſpektor des königl. Berliner Obſervatorium und Profeſſor der Phyſick in Petersb. (geb. Petersb. 1734.) Carl Euler, kaiſerlicher Leibarzt und Med. Ord. der Akad. der Wiſſenſchafften (geb. Petersb. 1740.) Chriſtoph Euler, Ruſſiſcher Major der Artillerie und Direktor der Gewehrfabrique zu Syſterbeck (geb. zu Berlin 1743.) Seinen höchſtwichtigen Briefwechſel mit Königen und Gelehrten vom erſten Rang, verſprach Herr Adjunkt Fuß noch in dem Jahr 1780 heraus zu geben. Genauere Umſtände und ein vollſtändiges Verzeichnus

aller ſeiner Schrifften ſiehe in Adumbratione Eruditorum Baſilienſium &c. &c. 1780. 8vo.

§. 287.

Die noch zum Ruhm Baſels lebende Herren Söhne Jo. Bernoulli des ältern (§. 282.) Daniel und Jo. Bernoulli die jüngern gehören unter die Mathem. Aldermänner, welche unſer Jahrhundert auszeichnen. Daniel (geb. zu Gröningen 1700.) studirte in Baſel, Heidelberg, Venedig und Padua, unter Nebeln, Michelotti und Morgagni Medicin und hörte in der Mathem. und Phyſik, auſſer ſeinem Vater, den Rizetti und Ricotto, ſollte Präſident einer Akad. der Wiſſenſchafften in Genua werden, zog aber den Ruf als Prof. der Phyſ. und höhern Mathem. nach Petersb. vor, wo er mit ſeinem ältern Bruder Nikolaus, der gleichfalls als Prof. der Mathem. dahin berufen war, 1725 ankam. Dieſes ſeines Bruders daſelbſt 1726 erfolgter Tod und ſeine eigene kränkliche Umſtände, lieſſen ihn 1730 ſeine Entlaſſung wünſchen. Allein die kaiſerliche Pflegerinn der Wiſſenſchafften hielt ihn noch 3 Jahr, verſtärkte ſein Gehalt, ſicherte ihm eine lebenslängliche Penſion zu und ernannte ihn zum Profeſſor Honorarius der Akademie. Hier bekam Er 1732 einen Beſuch von ſeinem jüngern Bruder Jo. Bernoulli und gieng mit dieſem 1733 über Danzig, Holland und Frankreich in ſeine Vaterſtadt zurück, wurde dorten 1733 Prof. der Anatomie und Botanick, und 1750, an ſeines Vaters Stelle, Prof. der Phyſ. mit Vermehrung des gewöhnlichen Gehalts und Beybehaltung ſeiner Stelle in der Mediciniſchen Facultät. Diß Amt verſah er bis 1777, wo er daſſelbe, mit Bewilligung der Akademie, ſeines Herrn Bruders Johannes Sohn, Daniel Bernoulli dem jüngſten Med. Doct. übertrug (welchem ſein jüngerer Bruder

Jac. Bernoulli 1780. den 14ten Febr. nachfolgte) da ihn bey ſeinem hohen Alter, nicht die Kräffte der Seele, wohl aber des Körpers verlieſſen. Die Menge ſeiner, vorzüglich den Denkſchrifften, der Akad. der Wiſſenſch. einverleibten Schrifften ſehe man: In Athen. Rauric p. 242—244. wo die beſte Hoffnung gemacht wird, daß ſeine ſämtliche Werke, ſo wie ſeines Hrn. Vaters, mit einander herauskommen werden. Sein Herr Bruder, Jo. Bernoulli der Jüngere, durch ſeinen groſſen Vater, Sich und ſeine 5 Söhne berühmt, wurde den 18ten May 1710 in Baſel gebohren. Er magiſtrirte 1724 zugleich mit Leonhard Eulern, wobey Er die Frage unterſuchte: Utrum Galli præſtent Anglis inventorum phyſicorum & mathem. laude, und wurde 1732. Doktor der Rechte. Seine tiefe Einſichten erwarben ihm die Freundſchafft eines Mautpertuis, der ſeinen Hrn. Vater öfters beſuchte, mit dem Er 1739 eine Reiſe nach Cirey machte und die groſſe Chatelet kennen lernte, der auch in ſeinem Haus in Baſel 1759 den 27ten Jul. ſtarb und dem Er, in der Geſellſchafft der Gemahlinn und Schweſter des Verſtorbenen, in der Kirche zu Dornach ein Grabmal errichten ließ. Nach ſeiner Petersburger Reiſe 1732, wurde Er 1743 Profeſſor der Beredſamkeit in Baſel, vertauſchte aber dieſe Stelle, 1748. mit dem an ſeines Hrn. Vaters Platz ernannten Prof. der Mathem. Hrn. Ramſpeck. Unter ſeinen 5 Söhnen, arbeiten: Der Erſte Jo. Bernoulli als königlicher Aſtronom in Berlin und 2 jüngere, wie gemeldet worden, als Lehrer der Phyſik in Baſel, in dieſem dem berühmten Stamm erblich gewordenen Fache. Seine ausgearbeitete Preisſchrifften und die viele Akademien der Wiſſenſchafften, worinnen dieſe berühmte Männer Mitglieder ſind, ſehe man in Athen. Rauric. p. 326 und 327.

§. 288.

Von dem berühmten 1778 in Halle verſtorbenen Herrn Geheimenrath von Segner, haben wir den Curſus mathematicus, welcher in 5 Theilen in 8vo in Halle 1756, 1758, 1761, 1763 und 1768 herausgekommen, der ſowohl Elementar= als höhere Mathem. trefflich abhandelt, freylich aber von der Integralrechnung nur den erſten Theil enthält, wie auch Seine deutliche und vollſtändige Vorleſungen über die Rechenkunſt und Geometrie; 2te verbeſſerte Auflage 4to Lemgo 1767. Sein berühmter Nachfolger iſt: Hr. Hofr. Jo. Wenzesl. Guſt. Karſten, von deſſen Lehrbegriff der geſammten Mathematick bisher 8 Theile in 8vo von 1767 bis 1777 in Greifswalde bey Röſe erſchienen.

Unentſchloſſen war die Natur, als ſie Deutſchland, Göttingens Zierde, den Hrn. Hofr. Abrah. Gotth. Käſtner ſchenkte, ob ſie uns einen Euklid oder Rabener geben wollte — Sie gab uns in Ihm beydes. Seine, noch nicht geendigte Anfangsgründe der Mathematick, wovon die erſte Ausgabe 1758, die dritte vom Verfaſſer ſelbſt beſorgte 1774 erſchienen, enthalten das Beſte aus allen deutſchen, engliſchen und franzöſiſchen Schriftſtellern, in einer äuſſerſt gedrängten Kürze, und ſind für Perſonen, welche die gehörige Vorbereitung erhalten haben, dermalen das vollkommenſte Werk in ſeiner Art. Wer damit des nemlichen berühmten Mannes Anmerkungen über die Markſcheidekunſt nebſt einer Abhandlung vom Höhenmeſſen durchs Barometer. 1775. verbindet, der wird in keinem Fall ohne Rath gelaſſen werden. Hätten dieſe 3 Männer ſonſt nichts als das hier angeführte geſchrieben, ſo würden ihre Namen der Unſterblichkeit ſo gut als eines Euklids ꝛc. ꝛc. geſichert ſeyn. Ihre übrige groſſe Verdienſte gehören nicht in dieſe kurze Geſchichte.

§. 289.

Was ſoll aber ein junger Freund der Geometrie für ſich ſelbſt leſen, wenn er ſeine Vorleſungen fleiſſig gehört hat? Hier werd ich mich ſehr kurz faſſen, oft nur auf die vorhergehende §§. beziehen können. Wir haben theoretiſch-praktiſche und blos praktiſche Schrifften.

1) Dem erſten Anfänger empfehl' ich

Jo. Frid. Häſelers Anfangsgründe der Arithm. Algebre, Geom. und Trigon. 1776 und 1777. 2 Theile 8vo, welche ausnehmend deutlich ſind.

Inſtitutions de Geometrie, par Mr. de la Chapelle. Paris 1757. 2 Tom. 8vo.

Euklids Elemente. §. 264.

Wolfii Elementa Matheſeos. §. 285.

Jacob Fridr. Malers Geometrie und Markſcheidekunſt, von Kästnern, verbeſſerte Ausgabe, 1767. 8vo. als ein bey meinen Anfangsgründen unentbehrliches Buch.

Andreas Böhms Gründliche Anleitung zur Meßkunſt auf dem Felde, 1759 und 1779. 4to. wo zugleich die Markſcheidekunſt vorkommt.

2) Der Stärkere, der für ſich weiter gehen kann und will, leſe

Heinrich Wilhelm Clemmens Mathematiſches Lehrbuch, 1768. 8vo.

Hauſens, Karſtens, Segners, Kästners Schrifften (§ 288.) oder unden mit den: Erläuterungen über die Kästneriſche Ana-

lyſis des Unendlichen, von C. C. Langs=dorf, 2 Theile, 1778 und 1780. Nebſt vielen unter Kieſen, in Tübingen, unter dem Tittel: Dilucidationes Kæſtner. gehaltenen Diſputationen.

Lamberts Beyträge zum Gebrauch der Mathematick, 3 Theile, 8vo. Berlin 1765, 1770, 1772.

Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktiſchen Geometrie, von Jo. Tobias Mayer, 2 Theile, Göttingen 1777 und 1779.

Weidleri Geometria ſubterranea, oder auch die teutſche Ueberſetzung von Niklas Fuchs=thaler, 8vo. Wien 1765.

Kästners Anmerkungen über die Markſcheidekunſt (§. 288.)

Anleitung zur Markſcheidekunſt, nach ihren Anfangsgründen und Ausübung kürzlich entworfen. Dresden, gr. 4to. 2. A. 15. B. XV. K. T. 1749 Verfaſſer iſt Herr von Oppel.

Und endlich zur Geſchichte dieſer Wiſſenſchaft:

Einleitung zur mathematiſchen Bücherkenntnus, 1tes bis 11tes Stück. Breßlau 1769—1779 von Hrn. Profeſſor Scheibel.

Hiſtoire des Mathematiques, par Mr. Montucla II. Tom. gr. 4to. Paris 1758. Chez Chr. Ant. Jombert.

Hiſtoire des Philoſophes modernes, par Mr. Saverien. Tom. III. IV. & V. Paris 1763. 1764. 1765.

Wer dieſe geleſen und verſtanden hat, der wage ſich getroſt an die Bernoulli, Euler, Newton ꝛc. ꝛc. an alles, was Er §§. præced. hiſtoriſch kennen lernte. Er wird, ohne zu ſtürzen, mit ihnen fortwandeln können, wird viele andere Werke der Alten und Neuern kennen lernen und mit Vergnügen leſen. Denn hier muthet mir niemand zu, von allen, inſonderheit von den geometriſchen Schrifften eines Klügels, Meiſters, Wilhelmi, Wilkens, Scherfers, Coriarius, Stiglers, Mayers, Vierenklees, Gerlicz, Krebs, Lamberts, Selbigers, Tönne, Macko, Schilling, Polack, Zeplichal, Brander, Suchodoletz, Hübner, Sprenger, Pollimhaus, Hogreve, Schönberg, Jugel, Funk, Zumkley, Zenneck, Bünau, Voch, Büſch, Baſedow, Unterberger, Corſonich, Müller, Wenkel, Koppelt, Helfenzrieder, Zimmermann, Arboſch, Jezze, Hellwag, Schulz, Adelbulner, Dorn, Horvath, Heſſe, Eberenz, Hellwig, Hofmann, Keferſtein, Keſaer, Metzburg, Bertrand, Ronyer, Werner, Schenmark, Schwabe, Krüger, Reinhold ꝛc. ꝛc. die ſeit 20 Jahren und drüber, herauskamen, ausführlich zu ſprechen.

§. 290.

Ueber die Geometriſche Werkzeuge will ich hier nur ſo viel ſagen, als etwa, zu einem kleinen Entwurf, beſonderer darüber zu haltenden Vorleſungen, nach meiner Abſicht nöthig iſt, denn man weiß, daß vollſtändige Abhandlungen über dieſen Gegenſtand, eigene, weitläuftige, koſtbare Werke füllen würden. Man braucht dieſe Werkzeuge

I. Im Kleinen, oder auf dem Papier, wie man ſich, obwohl etwas unbeſtimmt, ausdrückt, und da ſind ſie

1) Stifft zum Linien ziehen, wohin auch die Reiß-feder gehört.
2) Linial.
3) Winkelmaaß.
4) Cirkel.
   a) Einfache oder Handcirkel:
      a. Gewöhnliche } Cirkel.
      b. Federn } Cirkel.
      c. Taſter } Cirkel.
   b) Zuſammengeſetzte Cirkel:
      a. Haar } Cirkel.
      b. Einſatz } Cirkel.
      c. Stangen } Cirkel.
      d. Proportional } Cirkel.
      e. Cirkel mit mehr als zween Füſſen, zum Abtragen der Figuren und Theilen der Linien.
5) Verjüngter Maaßſtab.
6) Transporteur.
   a) Der Gewöhnliche.
   b) Der Engliſche Protracktor mit dem Vernier.

II. Im Groſſen oder auf dem Feld:
1) Stäbe.
2) Senkbley.
3) Meßruthen.
   a) Meßſtangen.
   b) Meßſchnüre.
   c) Meßketten.
4) Winkelkreutz oder Scheibe.
5) Bleywage oder Waſſerpaß.
6) Meßtiſchgen.
7) Scheiben-Inſtrumente.
8) Aſtrolabe:
   a) Gewöhnliche.
   b) Engliſche Theodoliten.
   c) Hadleys Quadranten.

Die Zahl der Unentbehrlichen, zur Noth, oder auch gänzlich entbehrlichen Werkzeuge, nimmt ab oder zu, je nachdem man ſich in der ausübenden Geometrie einen Endzweck vorſetzet, wovon mündlich, da die meiſten vorgezeigt, ihr Bau, Vorzüge, Fehler, Prüfung und Gebrauch angegeben werden. Ihre Beſchreibung theilen am beſten mit:

Leupold in Theatro machinarum arithmet. geometricarum.

Bion in ſeiner mathem. Werkſchule. Nürnb. 1765. 4.

C. Scherfer in Inſtitut. Geometr. P. I. & II. Vindobon. 1770 & 1771. 4to.

J. E. Helfenzrieder Abhandlung von der Geodäſie ꝛc. Ingolſtadt 1775. 4to.

Böhmens und vorzüglich Mayers praktiſche Geometrie (§. 289.)

A. G. Käſtners Aſtronomiſche Abhandlungen 6te und 7te, wo viel Schönes von den Mikrometern geſagt wird.

Brander in ſeinen kleinen Schrifften.

Vorzügliche Inſtrumente wurden, und werden zum Theil noch verfertigt von unſerm berühmten Brander in Augsburg, Canniver in Paris, Siſſer, Dollond, Bird, Ramsden in Engelland. Man ſehe J. Bird's Method of dividing aſtronomical Inſtruments und vorzüglich Deſcription of an Engine for dividing mathematical Inſtruments By Mr. J. Ramsden. London. 1777. Kleine, ſogenannte Beſtecke, verfertigten ſehr gut: Bion in Paris, Lang in Strasburg, ſo wie man ſie auch recht gut und wohlfeil in Maynz und Wien bekommen kann.

§. 291.

Noch muß ich, zum Beſchluß der Geometrie, mein (Ar. §. 805.) gegebenes Verſprechen erfüllen, zeigen, wie Nieſen, nach denen dort angeführten Schrifften, Blinde in der Geometrie unterrichtet. Alles läuft, wie begreifflich, darauf hinaus, dem Blinden die Begriffe von Linien und Flächen ꝛc. ꝛc. ingleichem die Buchſtaben, womit dieſe benennt werden, durchs Gefühl beyzubringen. Diß zu erhalten, nahm Herr Nieſen dicken Pappendeckel, zeichnete auf einen halben Bogen die geometriſche Figuren, überzog ſie mit ausgeglühetem Drath, der am End einer jeden Linie, durch den Pappendeckel durchgeſtochen, und auf der andern Seite umgeniethet wurde. Eben ſo verfertigte Er die Buchſtaben zu den Figuren, vorhin aber ein Alphabet von den Drathbuchſtaben auf ein beſonders Täfelgen, welches der Blinde auswendig lernte. Sehr richtig erinnert Herr Nieſen: Man ſoll weder Figuren noch Buchſtaben zu groß machen, weil ſonſt gar zu viel Zeit erfordert würde, ſie zu überfühlen, aber freylich auch nicht zu klein. Seinem Schüler, Herrn Weiſenburg, verfertigte Er ein ſolches Buch von 4 Blättern, welches alle Figuren der Longi- Plani- und Trigonometrie enthielte, denn in der Stereometrie, kommen ohnehin, die körperliche Vorſtellungen doppelt zu ſtatten. Man ſehe die (Ar. §. cit.) angeführte Nieſenſche Algebre für Sehende und Blinde in der Vorrede, p. XV bis XIX.

Ebene Trigonometrie.

Abkürzungs-Zeichen,

welche in der Trigonometrie vorkommen.

Zeichen	des	Sinus Recktus		—	—	S
—	—	—	Totus	—	—	ST
—	—	—	Verſus	—	—	SV
—	—	Coſinus	—	—	—	Cos.
—	der	Tangente	—	—	—	T
—	—	Cotangente	—	—	—	Cot.
—	—	Secante	—	—	—	Sec.
—	—	Coſecante	—	—	—	Coſec.

Einleitung.

§. 1.

Sobald die Geometrie ſehr groſſe Gröſſen erfinden ſoll, verlieren die Zeichnungen alle Genauigkeit. Man ſucht ſie durch bloſſe Berechnung und diß geſchieht in der Trigonometrie, welche in die ebene und ſphäriſche reine und angewandte eingetheilt wird, zu ihren Erfindungen die trigonometriſche Linien gebraucht, deren Begriffe ſie entwickelt, ihre Eigenſchafften und Gebrauch beſtimmt und ihre Gröſſe durch Hülfe der Geometrie berechnet, wobey ihr die Logarith[illegible] lich zu ſtatten kommen (A. IX. Abſchn.) [illegible] det ſie einige Hauptſätze der Geometrie näher auf die Triangel an, zeigt, wie die fehlende Stücke eines △ können gefunden werden, übt dieſe Aufgaben in mancherley praktiſchen Fällen und ſchließt ſich mit einer kurzen Abhandlung von der Geſchichte und Hauptſchriftſtellern dieſer Wiſſenſchafft.

§. 2.

Sie kann daher füglich in folgenden Abſchnitten vorgetragen werden:

1) Erklärung und Eintheilung der Trigonometrie.

2) Erklärungen der Trigonometriſchen Linien.

3) Ihre Erfindung durch Hülfe der Geometrie.

4) Anwendung der Logar. auf die Trigonometriſche Linien.

5) Hauptſätze zur Berechnung der Triangel.

6) Wirkliche Berechnung derſelben.

7) Anwendung der Trigonometrie, auf welche die ſphäriſche Trigonometrie und zum Schluß eine kurze Geſchichte der Trigonometrie, nebſt den vorzüglichſten Schrifften folgen ſoll.

Erſter Abſchnitt.

Erklärung und Eintheilung der Trigonometrie.

§. 3.

Die Trigonometrie iſt eine Wiſſenſchafft, aus drey gegebenen Theilen eines Triangels, worunter aber wenigſtens eine Seite ſeyn muß, die übrigen 3 durch Rechnung zu finden.

Zuſatz.

Sie unterſcheidet ſich alſo von der Geometrie

a) Durch ihren Gegenſtand.

b) Durch die Methode ihre Gröſſen zu finden.

§. 4.

Die ebene Trigonometrie berechnet nur die auf ebenen Flächen liegende Triangel (Trigonometria plana) die ſphäriſche (ſphærica) aber, Triangel, welche auf einer Kugelfläche beſchrieben worden. Die reine Trigonometrie (pura) betrachtet ihre Triangel als abſtrackte (Ar. §. 18.) die angewandte (adplicata) als concrete Gröſſen (loc. cit.).

Warum unter den gegebenen Stücken des △ wenigſtens eine Seite ſeyn müſſe, erhellt aus (§. 65. 66. 67. 68. G.)

Anmerkung.

Τρίγονον heißt im Griechiſchen ein Dreyeck. Hieraus flieſſen alle §. 3. und 4. gebrauchte Benennungen.

Zweyter Abſchnitt.

Erklärungen der Trigonometriſchen Linien.

§. 5.

Trigonometriſche Linien nennt man alle diejenige Linien, welcher ſich die Trigonometrie zu Erfindung ihrer Gröſſen bedient, die aber in der Geometrie gewöhnlich gar nicht vorkommen. Sie ſind: Der Sinus, Tangente, Secante, Coſinus, Cotangente, Coſecante, Sinus Totus und Sinus Verſus.

§. 6. Tr. Tab. I. F. 2.

Man zeichne einen ∠x, aus deſſen Vertex C einen Bogen AE mit einem beliebigen Radius EC, und von dem einen Ende dieſes Bogens A, auf den Radius EC, eine Perpendikulare AD, ſo iſt AD der Sinus Recktus des ∠x. Der Sinus Recktus iſt alſo eine Perpendikulare, welche vom Ende eines Bogens, der einen ∠ mißt, auf den andern Schenkel des nehmlichen ∠ gefället wird.

Zuſätze.

1) Ein jeder Sinus AD iſt daher immer die Hälffte der Sehne AB, welche einen Bogen abſchneidet, der doppelt ſo groß, als der zum Sinus AD gehörige Bogen AE iſt (G. §. 78.) Oder der Sinus eines Bogens iſt = der halben Sehne des doppelten Bogens und umgekehrt. Daher leitet Godin das Wort Sinus von S. in. d. i. Semiſſes inſcriptarum her.

2) Es iſt alſo AD oder S∠x zugleich S∠y + o oder des Bogens AHJ, das iſt: 2 benachbarte ∠ haben einerley Sinus, indem AD die Lage von AC ſowohl gegen EC als gegen CJ beſtimmt.

3) Zween oder mehrere Sinuſſe concentriſcher Bögen, welche auf einerley Radius gezogen werden, laufen parallel mit einander, oder fallen auf einander (G. §. 62.)

4) Alle Sinuſſe von 0° bis 90° ſind < R, folglich wenn man R = 1 ſetzet, Brüche von R, wachſen bis auf 90° und nehmen alsdann bis auf 180° wieder ab, wo der Sinus abermal = 0 wird. Daher führt der R = EC = AC = CH = CJ den Namen Sinus Totus.

§. 7.

Der Sinus Verſus oder Queer-Sinus iſt das Stück des R EC, welches zwiſchen dem Sinus Rectus und dem Bogen, der den ∠x mißt, liegt. Alſo hier DE.

Zuſatz.

Auch die Sinus Verſus wachſen und fallen, wie die Sinus Recktus (§. 6. Z. 4.) und auch hier iſt SV 90° = R.

§. 8.

Was zu einem Dinge fehlt, um mit demſelben ein Ganzes auszumachen, heißt ſein Complement. Nun ſind alle Sinuſſe < ST und ST = S 90° (§. 6. Z. 4.) Folglich iſt eines jeden Sinus ∠ entweder $\gtrless$ 90°. Iſt er < 90°, ſo iſt ein ∠ möglich, der mit ihm 90° ausmacht. Dieſer heißt der Complement ∠ des erſtern zu 90° und ſein Sinus, Sinus Complementi. So iſt z. E. Tr. T. I. Fig. 2. der ∠ x < 90°, folglich der ∠ y ſein Complement ∠ zu 90° und AG = Sinus Complementi des ∠ y. Wär' aber der gegebene ∠ wie z. E. y + o > 90°, ſo iſt ein ∠ x möglich, der mit ihm 180° ausmacher, und dann iſt ∠ x Complement ∠ des ∠ y + o zu 180°. Alle Sinus Complementi zu 90° heiſſen Coſinuſſe.

Zuſätze.

1) Wenn AG = Cos. ∠ x, ſo iſt auch umgekehrt AD = Cos. ∠ y.

2) Je gröſſer der S, deſto kleiner wird ſein Cos. Wäre alſo ∠ x + y = 90°, ſo iſt Cos. x + y = 0°. Daher bedarf der S ∠ x + y = CH, keinen andern Sinus um S 90° zu werden, d. i. er iſt ſelbſt ganz. Ein neuer Grund, den S 90°, ST zu nennen.

3) AG iſt = CD (S. §. 62. und §. 95. Z. 1.) Folglich iſt Cos. immer dem Stück des ST gleich, welches zwiſchen dem Vertex des ∠ und dem S liegt.

§. 8. a.

Poſitiv und Negativ in einer Figur heiſſen die der Lage nach gerade einander entgegen geſetzte Dinge. Z. E. Wenn eine Linie über der andern liegt und poſitiv genennt wird, ſo iſt die andere unter ihr liegende negativ.

Zuſätze.

1) Daher entſteht das Negative aus dem Uebergang durch das Nichts oder die Nullgröſſe.

2) Wenn alle Sinuſſe von 0° bis 180° poſitiv ſind, ſo ſind alle übrige von 180° bis 360° negativ (§. 6.)

3) Coſinus von 90° iſt = 0 (§. 8. Z. 2.) folglich ſind alle Coſinuſſe der Bögen, welche > 90°, bis auf 180° negativ. Coſinus von 180° wird wieder = R, nimmt aber auch wieder ab bis auf 180° + 90° = 270°, wird hier zum 2ten mal = 0 und von da bis 360° wächſt er abermal, ja er wird poſitiv. Daher ſind die Coſinuſſe vom 1ten und 4ten Quadranten poſitiv, die vom 2ten und 3ten negativ.

§. 9.

Wenn man in E am Ende des Radius EC eine Perpendikulare EF aufrichtet, und ſie ſo lange ver-

långert, bis ſie von dem andern verlångerten Rad. AC in F durchſchnitten wird, ſo heißt EF alsdann Tangente des α AE oder des α AHJ, folglich auch des $\angle$ x oder des $\angle$ y + o (§. 6. Z. 2.) CF aber Secante der nemlichen Bögen und Winkel. Mit der Gröſſe der $\angle$ $\angle$ unter 90° wachſen alſo auch ihre Tangenten. Die T 90° oder eines ∟ aber wird unendlich groß ſeyn, weil ſie nirgends vom andern R durchſchnitten werden kann (G. §. 9.) HL aber wird nach (§. 8.) Cotangente und CL Coſecante des $\angle$ x heiſſen.

Zuſätze.

2) Was (§. 8. Z. 1.) vom Coſinus geſagt worden, gilt auch hier mit weniger Verånderung von der Cot. und Coſ.

3) Aus den §. 8. a. angegebenen Begriffen folgt: Daß die Tangenten im 1ten und 3ten Quadranten poſitiv, im 2ten und 4ten hingegen negativ ſind.

Anmerkung.

Wir brauchen zu unſern Auflöſungen hauptſächlich die S und T des Quadranten. Daher, von den übrigen Trigon. Linien, nicht mehr als die Abſicht fordert.

Dritter Abſchnitt.

Methode, die Gröſſe der trigonometriſchen Linien, durch Hülfe der Geometrie und Arithmetick, aus dem Radius durch bloſſe Berechnung zu finden.

§. 10.

Längen und gewöhnliches Winkelmaas, folglich auch Seiten und $\angle$ der Triangel ſind heterogen, und können demnach ohnmöglich mit einander verglichen werden, wenn man nicht die $\angle$ durch Linien ausdrückt, welche ihre Gröſſe, eben ſo gut, als Grade, Min. und Secunden, beſtimmen. Diß erſtere muß aber in der Trigonometrie und zwar alles durch Berechnung geſchehen (§. 3.) folglich müſſen auch die Trigonometriſche Linien durch Zahlen ausgedrückt werden. Der Maasſtab zu ihrer Beſtimmung iſt der R oder ST, den man in 10,000000 gleiche Theile theilte, um die Gröſſe aller S, T ꝛc. ꝛc. für alle einzelne Grade, Minuten und Secunden in ſolchen Theilen zu finden. Wie diß möglich ſey, ſollen folgende Aufgaben zeigen.

§. 11. Tr. T. III. Fig. B.

Der S 30° iſt $= \frac{R}{2} = 5000000$.

Beweiß.

Man mache den $\angle x = 30°$, ſo iſt $AB = S\,30°$ (§. 6.) Man zeichne $\angle y = \angle x$, ſo iſt $y + x = 60°$, folglich $AC = R$ (G. §. 108.) Aber es iſt auch

$AB = \frac{AC}{2}$ (§. 6. Z. 1.) und da
|| || ſo iſt

$Sx = \frac{R}{2}$ Da nun
|| ſo iſt auch

$S30° = \frac{R}{2}$

§. 12. Tr. T. III. Fig. B.

Der S 45° iſt = der halben Sehne des Quadranten.

Beweiß.

Man zeichne einen $\angle x = 45°$, mache den $\angle y = \angle x$, ſo iſt $\angle y + \angle x = 90°$, folglich AB = S 45° und AC = der Sehne des Quadranten (§. 6. Z. 1.) Nun iſt S 45° = $\frac{AC}{2}$, folglich auch S 45° = der halben Sehne des Quadranten.

§. 13. Tr. T. III. Fig. A.

Der Sinus von 18° iſt = der halben Seite des regularen Zehnecks.

Beweiß.

Denn AB iſt Sehne von α AB = 36° (G. §. 103 und 109.) Daher $\frac{AB}{2}$ = S 18° (§. 6. Z. 1.)

§. 14. Zuſatz.

Folglich iſt

1) $S\,30° = \frac{R}{2} = 5000000.$

2) $S\,45° = \frac{\sqrt{2R^2}}{2} = \frac{\sqrt{(200000000000000)}}{2} =$ 7.071068.

3) $S\,18° = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} - \frac{r}{2}$ (G. §. 109.)

§. 15. Tr. T. I. F. 2.

Aus dem gegebenen S eines Bogens AD ſeinen Coſ. AG zu finden.

Aufloͤſung und Beweiß.

$$AG = CD \text{ (§. 8. Z. 3.) und da}$$

$$\begin{array}{l} AD^2 + CD^2 = AC^2 \text{ (G. §. 100.) aber auch} \\ \;\| \qquad\;\; \| \qquad\; \| \quad \text{ſo wär} \\ \hline S^2 + Cos^2 = R^2 \text{ folglich } (-S^2) \\ \hline Cos^2 = R^2 - S^2 \text{ und (A. §. 182 u. 184.)} \\ \hline Cos = \sqrt{R^2 - S^2} \end{array}$$

Zuſatz.

Dieſe Formel iſt aͤuſſerſt wichtig. Denn da man durch ſie zu jedem S den Cos. finden kann, ſo darf man alle Sinuſſe nur bis 45° wirklich berechnen, indem alle uͤbrige, Coſinuſſe der erſten ſind, folglich leicht gefunden werden.

§. 16. Tr. T. III. F. C.

Aus dem S. DE eines Bogens AD den S der Haͤlfte dieſes Bogens oder $S \propto \frac{AD}{2}$ zu finden.

Aufloͤſung und Beweiß.

1) Da AE = R — Cos. (§. 7.) ſo finde man die Sehne vom Bogen AD, ſie iſt $\sqrt{AE^2 + DE^2}$ (G. §. 100.)

2) Dieſe halbire man $\frac{\sqrt{AE^2 + DE^2}}{2}$, ſo iſt S des $\propto \frac{AD}{2}$ gefunden (§. 6. Z. 1.)

§. 17. Tr. T. III. F. D.

Aus dem gegebenen S. DG, eines Bogens DF, den S des doppelten Bogens BD, oder den S. DE zu finden.

Auflöſung.

Man ſetze folgende Proportion an:

BC : CG = BD : DE Da aber
|| || || ||

ſo iſt ST : Cos = 2S. DG : S. DE.

Beweiß.

∟x = ∟y und ∠o = ∠o (A. §. 61. Z.) folglich
△BCG ∽ △DEB daher (G. §. 65.)

BC : CG = BD : DE.

§. 18. Tr. T. III. F. E.

Aus den gegebenen Sinuſſen FG und DE der Bögen AF und AD, die nicht über 45′ von einander verſchieden ſind, alle dazwiſchen liegende Sinuſſe zu finden.

Auflöſung.

1) Man ſuche den Unterſchied der gegebenen Bogen AD — AF = DF.

2) Man ziehe den Bogen AF als den kleinern gegebenen, vom Bogen AJ, deſſen S man ſucht, ab, um FJ zu finden, ſo iſt AJ — AF = FJ.

3) Man ziehe die beyde gegebene Sinuſſe von einander ab, d. i. DE — GF = DH, und ſpreche: Die erſte Differenz verhält ſich zur 2ten Differenz wie die 3te Differenz zu JK. Oder DF : FJ = DH : JK.

4) Diß JK zum kleinern S. GF addirt giebt GF + JK = JL oder dem geſuchten S.

Beweiß.

Die Bögen DF und FJ ſind klein (p. hyp.) man kann ſie alſo, ohne Gefahr zu irren, für gerade Linien annehmen. Ferner FG ‡‡ JL ‡‡ DE (§. 6.) Man laſſe aus F auf DE die Perpendikulare FH fallen, ſo iſt HE = GF (G. §. 61.) folglich DH = DE — GF = der Differenz der gegebenen Sinuſſe. Da nun JK ‡‡ DH, ſo iſt △DFH ∽ △JFK (G. §. 68.) folglich DF : FJ = DH : JK.

§. 19. Tr. T. III. F. F.

Aus den gegebenen Sinuſſen BD und EF zweyer beliebiger Bögen AB und AF, den Sinus ihrer halben Differenz oder S. $\propto \frac{BF}{2}$ zu finden.

Auflöſung.

1) Man finde zu den gegebenen Sinuſſen BD und EF ihre Coſinuſſe BJ und FH (§. 15.)

2) Suche die Differenz der gegebenen Sinuſſe EF — BD = FK aber auch ihrer Coſinuſſe BJ — HF = BK.

3) Mache aus dieſen beyden Differenzen die Quadrate und addire ſie, ſo iſt die Summe $FK^2 + BK^2$.

4) Nun iſt $\sqrt{FK^2 + BK^2}$ = der Sehne des Bogens BF oder der ganzen Differenz der Bogen AB und AF und ihre Hälfte = dem S der verlangten halben Differenz (§. 6. Z. 1.)

Beweiß.

$BD \# EF \# CG$, ingleichem $AC \# BJ \# FH$ und die erſtern ſtehen auf AC die letztern auf GC perpendikular. Folglich $FH = KJ$ und $BD = EK$ (G. §. 61.) Nun iſt $\angle x = 90^\circ$, daher $FK = EF - BD$ und $BK = BJ - FH$ auch BFK ein $\triangle$. Folglich weil $BF^2 = BK^2 + FK^2$, ſo iſt auch $BF = \sqrt{BK^2 + FK^2}$ (G. §. 100.) und $\frac{BF}{2} = S\alpha \frac{BF}{2}$ (§. 6. Z. 1.)

§. 20. Tr. T. III. F. E.

Aus dem Sinus einer Minute oder 60″ GF, den S von einer oder mehreren Secunden MN zu finden.

Auflöſung und Beweiß.

Die Bögen AM, AF und AMF können ohne Irrthum für gerade Linien angenommen werden (§. 18. Bew.) Da nun $MN \# GF$, ſo iſt $\triangle AMN \backsim \triangle AGF$ (G. §. 68.) folglich $AF : GF = AM : MN$.

Nun ſind p. hyp. die 3 erſten Glieder gegeben, folglich läßt ſich auch das letzte finden (A. §. 220.)

Zuſatz.

Wird der Bogen AF = 1'' und der Bogen AM = ein oder etlichen Tertien angenommen, ſo laſſen ſich auch die Sinuſſe für alle Tertien auf die nemliche Art berechnen.

§. 21. Tr. T. I. F. 2.

Die T eines jeden Winkels x zu finden.

Auflöſung.

Sie iſt $\frac{R\times S}{Cos.}$ oder wenn R = 1, ſo iſt auch $T = \frac{1\times S}{Cos.}$

Beweiß.

$\triangle ADC \sim \triangle CEF$ (G. §. 68.) dann

$AD \parallel EF$ (§. 6. und 9.) und G. §. 62.) folglich

$CD : AD = CE : EF$

$\quad \| \quad\; \| \quad\; \| \quad\; \|$ Daher

$Cos : S = R : T$ folglich (A. §. 220.)

$$\frac{R\times S}{Cos.} = T$$

§. 22. Tr. T. I. F. 2.

Die Secante eines jeden ∠ x zu finden.

Auflöſung.

Sie iſt $\frac{R^2}{Cos.}$ oder auch $\frac{R\times T}{S}$

Beweiß.

$\triangle ADC \backsim \triangle CEF$ (§. 21.) alſo

$$\begin{array}{ccccccc} CD & : & AC & = & CE & : & CF \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ Cos & : & R & = & R & : & Sec. \end{array}$$ folglich

$$\frac{R^2}{Cos.} = Sec.$$ W. Z. E. W.

Es iſt aber auch zweytens

$$\begin{array}{ccccccc} AD & : & EF & = & AC & : & CF \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ S & : & T & = & R & : & Sec. \end{array}$$ und da ... ſo iſt auch

$$\frac{R \times T}{S} = Sec.$$ W. Z. A. W.

§. 23.

Die Tabellen der trigonometriſchen Linien von Secunde zu Secunde zu verfertigen.

Aufloͤſung und Beweiß.

I. Man berechne die Sinuſſe von 18°. 45°. 30°. (§. 13. 14. 12 und 11.)

II. 1) Aus dem Sinus von 18° finde man den S36° (§. 17.) Von 9°. 4°, 30′. 2°, 15′. (§. 16.) Von 54°. 72°. 81°. 85°, 30′. 87°, 45′. (§. 15. als Coſinuſſe der vorigen.) Ferner von 27°. 13°, 30′. 6°, 45′. 40°, 30′. 20°, 15′. 42°, 45′. (§. 16.) ingleichem 63°.

76°, 30′. 83°, 15′. 49°, 30′. 69°, 45′. 47°, 15′. (§. 15.) Weiter 31°, 30′. 15°, 45′. 38°, 15′. 24°, 45′. (§. 16.) noch mehr 58°, 30′. 74°, 15′. 51°, 45′. 65°, 15′. (§. 15.) Endlich von 29°, 15′. (§. 16.) und 60°, 45′. (§. 15.)

2) Aus dem S von 45° finde man den S von 22°, 30′. 11°, 15′. (§. 16.) 67°, 30′. 78°, 45′. (§. 15.) 33°, 45′. (§. 16.) 56°, 15′. (§. 15.)

3) Aus dem S von 30° und 54° finde man den S von 12°. (§. 19.)

4) Aus dem S von 12° die Sinuſſe von 6°. 3°. 1°, 30′. 45′. (§. 16.) 78°. 84°. 87°. 88°, 30′. 89°, 15′. (§. 15.) 39°. 19°, 30′. 9°, 45′. 42°. 21°. 10°, 30′. 5°, 15′. 43°, 30′. 21°, 45′. 44°, 15′. (§. 16.) 51°. 70°, 30′. 80°, 15′. 48°. 69°. 79°, 30′. 84°, 45′. 46°, 30′. 68°, 15′. 45°, 45′. (§. 15.) Aus dieſen 25°, 30′. 12°, 45′. 35°, 15′. 24°. 34°. 30′. 17°, 15′. 39°, 45′. 23°, 15′. (§. 16.) 64°, 30′. 77°, 15′. 54°, 45′. 66°. 55°, 30′. 72°, 45′. 50°, 15′. 66°, 45′. (§. 15.) 32°,

15′. 33°. 16°, 30′. 8°, 15′. 27°, 45′. (§. 16.) 57°, 45′. 57°. 73°, 30′. 81, 45′. 62°, 15′. (§. 15.) 28°, 30′. 14°, 15′. 36°, 45′. (§. 16.) und 61°, 30′. 75°, 45′. 53°, 45′. (§. 15.) 30°, 45′. (§. 16.) endlich 59°, 15′. (§. 15.)

5) Aus dem S von 15° finde man die Sinuſſe 7°, 30′. 3°, 45′. (§. 16.) 75°. 82°, 30′. 86°, 15′. (§. 15.) 37°, 30′. 18°, 45′. 41°, 15′. (§. 16.) 52°, 30′. 71°, 15′. 48°, 45′. (§. 15.) 26°, 15′. (§. 16.) 63°, 45. (§. 15.)

III. Man bringe dieſe 120 gefundene Sinuſſe, nach der angebogenen Tabelle, ſo in Ordnung, daß die Differenz zwiſchen zweyen und zweyen nie > 45′ ſeye.

IV. Suche die zwiſchen 2 und 2 fallende Sinuſſe für alle einzelne Minuten (§. 18.) und

V. Hierauf die Sinuſſe für alle einzelne Secunden (§. 20.)

VI. Endlich die Tangenten und Secanten aus den erſtern nach (§. 21. und §. 22.) ſo ſind die Tafeln der trigonometriſchen Linien berechnet.

Tabelle, die gefundene Sinuſſe

1.	0°. 45'.	21.	15°. 45'.	41.	30°. 45'.
2.	1. 30.	22.	16. 30.	42.	31. 30.
3.	2. 15.	23.	17. 15.	43.	32. 15.
4.	3. 0.	24.	18. 0.	44.	33 0.
5.	3. 15.	25.	18. 45.	45.	33. 45.
6.	4. 30.	26.	19. 30.	46.	34. 30.
7.	5. 15.	27.	20. 15.	47.	35. 15.
8.	6. 0.	28.	21. 0.	48.	36. 0.
9.	6. 45.	29.	21. 45.	49.	35. 45.
10.	7. 30.	30.	22. 30.	50.	37. 30.
11.	8. 15.	31.	23. 15.	51.	38. 15.
12.	9. 0.	32.	24. 0.	52.	39. 0.
13.	9. 45.	33.	24. 45.	53.	39. 45.
14.	10. 30.	34.	25. 30.	54.	40. 30.
15.	11. 15.	35.	26. 15.	55.	41. 15.
16.	12. 0.	36.	27. 0.	56.	42. 0.
17.	12. 45.	37.	27. 45.	57.	42. 45.
18.	13. 30.	38.	28. 30.	58.	43. 30.
19.	14. 15.	39.	29. 15.	59.	44. 15.
20.	15. 0.	40.	30. 0.	60.	45. 0.

in Ordnung zu bringen.

61.	45°. 45′.	81.	60°. 45′.	101.	75°. 45′.
62.	46. 30.	82.	61. 30.	102.	6. 30.
63.	47. 15.	83.	62. 15.	103.	77. 15.
64.	48. 0.	84.	63. 0.	104.	78. 0.
65.	48. 45.	85.	63. 45.	105.	78. 45.
66.	49. 30.	86.	64. 30.	106.	79. 30.
67.	50. 15.	87.	65. 15.	107.	80. 15.
68.	51. 0.	88.	66. 0.	108.	81. 0.
69.	51. 45.	89.	66. 45.	109.	81. 45.
70.	52. 30.	90.	67. 30.	110.	82. 30.
71.	53. 15.	91.	68. 15.	111.	83. 15.
72.	54. 0.	92.	69. 0.	112.	84. 0.
73.	54. 45.	93.	69. 45.	113.	84. 45.
74.	55. 30.	94.	70. 30.	114.	85. 30.
75.	56. 15.	95.	71. 15.	115.	86. 15.
76.	57. 0.	96.	72. 0.	116.	87. 0.
77.	57. 45.	97.	72. 45.	117.	87. 45.
78.	58. 30.	98.	73. 30.	118.	88. 30.
79.	59. 15.	99.	74. 15.	119.	89. 15.
80.	60. 0.	100.	75. 0.	120.	90. 0.

§. 24.

Dieſe ganze vom §. 10. bisher vorgetragene Lehre von der Berechnung trigonometriſcher Linien, läßt ſich kurz in folgende Formeln faſſen, deren Erläuterung in Zahlen mündlich gegeben wird.

I. $S30^\circ = \frac{R}{2}$ oder $\frac{ST}{2}$. (§. 11.)

II. $S45^\circ = \frac{\sqrt{2R^2}}{2} = \frac{\sqrt{2ST^2}}{2}$ (§. 12.)

III. $S18^\circ = \frac{\sqrt{\frac{5R^2}{4}} - \frac{R}{2}}{2}$ oder $\frac{\sqrt{\frac{5ST^2}{4}} - \frac{ST}{2}}{2}$ (§. 13.)

IV. Ein jeder $Cos = \sqrt{R^2 - S^2}$. (§. 15.)

V. Ein jeder $SV = R - Cos.$ (§. 16. 1.)

VI. Der $S\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{SV^2 + S^2}}{2}$ (§. 16.)

VII. Der $S2\alpha = \frac{Cos \times 2S}{ST}$ (§. 17.)

VIII. Wenn Fig. E. $GF = s$, $DE = S$, $JL = \sigma$ $\alpha AD - \alpha AF = \Delta$, $\alpha AJ - \alpha AF = \delta$, $S - s = D$ und $\sigma - s = d$, ſo iſt $\Delta : \delta = D : d$ (§. 18.) folglich $\frac{D \times \delta}{\Delta} = d$ und alſo $\sigma = s + d$. (§. 18.)

IX. Wenn Fig, F. $S - s = d$ und $Cos - cos = \delta$ ſo iſt $S\frac{D}{2} = \frac{\sqrt{d^2 + \delta^2}}{2}$. (§. 19.)

X. $S\,1'' = \frac{S\,60'''}{60}$ und $S\,1''' = \frac{S\,1''}{60}$. (§. 20.)

XI. $T = \frac{R \times S}{Cos}$. (§. 21.)

XII. $Sec = \frac{R^2}{Cos}$ oder $\frac{R \times T}{S}$ (§. 22.)

§. 24. a. Geom. T. VIII. F. 26.

Der Radius iſt die mittlere geometriſche Proportionale, zwiſchen der T und Cot. eines Bogens und zwiſchen dem S und der Coſec. des nemlichen Bogens. D. i. (A. §. 209. Z. 3.)

I. BE : AB = AB : CF und

II. DG : AD = AD : AF

Beweiß.

I. Da AB ‡‡ CF und AC ‡‡ BE, ſo iſt △ABE ∽ △ACF (G. §. 65.) folglich

BE : AB = AC : CF; da aber (G. §. 21. Nro. 3.)
|| ſo iſt auch

BE : AB = AB : CF

II. Da aus obigen Gründen △ADG ∽ △ACF ſo iſt
DG : AD = AC : AF und weil
|| (G. §. 21. Nro. 3.) ſo iſt

DG : AD = AD : AF

Zuſätze.

1) Folgl. iſt $\frac{R^2}{T} = Cot.$ u. $\frac{R^2}{Cot.} = T$ ferner $\frac{R^2}{S} = Cos.$

2) Da DG : BE = CF : AF (Ar. §. 217. Nro. 12. b.) das iſt S : T = Cot : Coſec. ſo iſt auch

$$\frac{T \times Cot}{S} = Coſec.$$

§. 24. b. Geom. T. VIII. F. 27.

Die Tangenten zweyer Bögen verhalten ſich umgekehrt wie ihre Cotangenten, d. i. BH : BG = CJ : CF.

Beweiß.

Da BH : AB = AB : CF } §. 24. a. ſo iſt auch
und BG : AB = AB : CJ } weil

$BH \times CF = AB^2$ und $BG \times CJ = AB^2$ (A. §. 215.)

$BH \times CF = BG \times CJ$ Daher (A. §. 216. 3.)

BH : BG = CJ : CF.

Zuſatz.

Wenn daher von 2 Bögen die t und T die Cot. und cot. gegeben ſind, ſo iſt t : T = Cot : cot. folglich auch $\frac{T \times Cot}{t} = cot.$ Oder die Cotangente des erſtern wird gefunden: Wenn man die Cotangente des andern mit der Tangente des andern multiplicirt und das Produkt durch die Tangente des erſtern dividirt.

§. 25. Anmerkung.

Die Sammlung, derer auf dieſe Art in 10 Millionſtel des Radius ausgedrückten trigonometriſchen Linien, heißt: Tabulæ ſinuum, Tangentium & ſecantium *naturalium*, zum

Unterſchied derer durch Logarithmen ausgedrückten trigonometriſchen Linien, welche Tabulæ ſinuum &c. &c. *artificialium* genennt werden, und im folgenden Abſchnitt vorkommen. Sie konnten nach der gegebenen Methode berechnet werden, und wurden auch zum Theil wirklich alſo, oder doch auf eine ähnliche Art verfertigt. Freylich zeigt die Rechnung des Unendlichen, ich möchte ſagen, unendlich kürzere Methoden. Allein dieſe wird gewöhnlicher Weiſe erſt nach der Trigonometrie ſtudirt und von wie vielen? Ich habe daher, den Anfänger, nicht ohne Grund, zum Gebrauch der trigonom. Linien anzuführen, hier die Möglichkeit ihrer Erfindung gewieſen. Dem, der bereits jene herrliche Rechnung kennt, darf ichs kaum erſt ſagen: Daß Käſtner in ſeiner Analyſis des Unendlichen §. 311—§. 317. die Möglichkeit dieſer kürzern Berechnungen, ſo wie Euler Introd. in Anal. infin. L. I. §. 134—§. 138. die Vortheile bey denſelbigen lehrt. Man ſehe überdiß: Lamberts Beyträge zweyter Theil IV. wo man Algebraiſche Formeln für die Sinuſſe von 3 zu 3 Graden findet. Wie ſind ſie eingerichtet? Wozu die Mühe, ihre Verfertigung zu erlernen, da ſie ſchon berechnet ſind? Hievon im Vortrag.

§. 26. Tr. T. I. F. 3 u. 4.

Ohngeachtet es groſſe und kleine Cirkel, Radios und trigonometriſche Linien giebt, ſo paſſen doch die berechnete Tafeln auf alle, denn die Sinuſſe ähnlicher Bogen, haben gegen ihre Radios einerley Verhältnuß. Oder wenn der $\angle x = \angle y$, ſo iſt BC : AB = EF : DE. (G. §. 77.)

Vierter Abſchnitt.

Anwendung der Lehre von den Logarithmen, auf die trigonometriſche Linien.

§. 27.

Bey dieſen, durch ſo gewaltig groſſe Zahlen, ausgedrückten trigonometriſchen Linien, ſind die Logar. (A. IXter Abſchn.) doppelt willkommen. Man berechnete auch wirklich für alle S, T und Sec. ihre Logarithmen und dieſe Sammlung der Logarithmen für die trigonometriſchen Linien, heißt: Canon ſinuum &c. &c. artificialium im Gegenſatz der (§. 25.) erklärten. Beyde ſind gewöhnlich beyſammen und zugleich die Logar. Numer. Vulgar. beygefügt, da man bald dieſe, bald jene braucht, je nachdem, Winkel oder Seiten der △, in die Rechnung kommen.

§. 28. Tr. T. I. Fig. 2.

Wie die Logarithmen für alle Sinuſſe können berechnet werden, zeigt (A. §. 285—288.) und aus dieſen finden ſich die Logar. der T und Sec. auf folgende leichte Art: Da

$$\mathrm{Cos} : \mathrm{S} = \mathrm{R} : \mathrm{T} \quad (\S.\ 21.)$$

R || ST ſo iſt logarithmiſch

$$\mathrm{lCos} - \mathrm{lS} = \mathrm{lST} - \mathrm{lT}$$ folglich (A. §. 278.)

$$(\mathrm{lS} + \mathrm{lST}) - \mathrm{lCos} = \mathrm{lT}$$

Und für die Secanten geben ſie ſich alſo:

$$\begin{array}{l} \text{Cos} : \text{ST} = \text{ST} : \text{Sec.} \ (\text{§. 22.}) \ \text{folglich} \\ \hline \text{l Cos} - \text{l ST} = \text{l ST} - \text{l Sec.} \\ \hline 2 \, \text{l ST} - \text{l Cos} = \text{l Sec.} \ (\text{A. §. 278.}) \end{array}$$

Zuſatz.

Da nun die Logar. der Sec. ſich ſo leicht finden laſſen, ſo iſts kein unverzeihlicher Fehler, wenn ſie in manchen Tafeln mangeln (§. 9. Anmerk.)

§. 29.

In den gewöhnlichen Sinustafeln iſt R=10000000 (§. 10.) Demohngeacht aber ſind die Logar. aller trigonometriſchen Linien, mehrerer Genauigkeit wegen, für den in 10 000 000 000 getheilten R berechnet. Daher die Characteriſtick ſeines Logar. = 10 (Ar. §. 281. Nro. 12.) Folglich iſt die Characteriſtick aller Logar. der trigonom. Linien in unſern gemeinen Tafeln zwar immer zu groß, allein diß hindert im Gebrauch nichts, wenn man logarithmiſch mit dieſen Linien rechnet. Denn je gröſſer alsdann ST angenommen wird, deſto genauer iſt die Rechnung. Nur muß man dieſe Logar. blos als Logar. der trigonom. Linien, aber ja nicht als Logar. der neben ihnen ſtehenden Zahlen, als gemeinen Zahlen, gebrauchen. Z. E. lS22° = 9. 5735754 und der dazu gehörige Sinus = 3746066. Hier iſt 9. 5735754 zwar lS22° aber nicht l 3746066.

§. 30.

Man bedient ſich alſo in wirklicher Berechnung der △ ſtatt der trigonometriſchen Linien, ihrer Logarithmen nach denen im IX. Abſchn. der Ar. erwieſenen Sätzen, wo nicht ganz beſondre Umſtände, den Gebrauch der trigonom. Linien ſelbſt, nothwendig machen, wovon unten Beyſpiele vorkommen werden.

Fünfter Abſchnitt.

Hauptſätze zu Berechnung aller Triangel.

§. 31. Tr. T. III. Fig. H.

In einem jeden △ verhalten ſich die S der ∠∠ wie die dieſen ∠∠ gegenüberſtehende Seiten, D. i. S∠D : S∠B = AB : AD.

Beweiß.

$$\angle D = \frac{\alpha AB}{2}$$

$$\angle B = \frac{\alpha AD}{2}$$ (S. §. 84. Nro. 1.) Daher

$$S\angle D = \frac{S\alpha AB}{2} = \frac{AB}{2}$$ (§. 6. Z. 1.)

$$S\angle B = \frac{S\alpha AD}{2} = \frac{AD}{2}$$ Daher

$\frac{AB}{2} = S\angle D$ und $\frac{AD}{2} = S\angle B$ (A. §. 61. Z.) folglich

$S\angle D : S\angle B = \frac{AB}{2} : \frac{AD}{2}$ (und × 2 A. §. 55. Z. 2.)

$S\angle D : S\angle B = AB : AD$

Zuſätze.

1) Folglich auch S∠D : AB = S∠B : AD (A. §. 217.) und da ſich der nemliche Beweiß auch für die andern ∠ und Linien in dieſem △ anwenden läßt, ſo iſt auch

S∠A : BD = S∠D : AB und
S∠A : BD = S∠B : AD.

2) Daher verhält ſich in jedem △ ein S zu der ihm gegenüberſtehenden Seite, wie der andere S zu der ihm gleichfalls entgegen geſetzten Seite.

2 a.) Wenn man alſo im Cirkel ABDE den ganzen Diameter für den ST annimmt, ſo würde auch AD=S∠B, BD=S∠A u. AB=S∠D werden.

3) Alſo verhält ſich in keinem △ Tr. T. III. F. J.

AM : AB = ∠u : ∠x oder wie αAM : αAB.

Denn man beſchreibe über dem Diameter eines Cirkels AB, ein rechtwinklicht gleichſchenklicht △ ABM, ſo daß AB Hypotenuſe werde, ſo iſt ∠u = ∠y = 45° (G. §. 60. Z. 1.) ∠x = 90° (p. hyp.) folglich α AM = α BM = 90°. Wäre nun

AM : AB = ∠u : ∠x ſo wär auch, weil
1 : 2 = = ||

AM : AB = 1 : 2 u. aus den neml. Gründen
BM : AB = 1 : 2

D. i. ein jeder Cathetus AM und BM gliche der halben Hypotenuſe = $\frac{AB}{2}$, folglich wär AM + BM = AB. Diß iſt aber unmöglich (G. §. 100.) alſo iſt auch nicht

AM : AB = ∠u : ∠x oder wie α AM : α AB.

4) Eben ſo wenig verhält ſich Tr. T. III. Fig. J. $\angle y : \angle x = BD : BG$. Denn man ziehe aus dem Centro C, ein Perpendickel CE, auf die Sehne AM und halbire αBM in D um die Sehne BD und MD zu ziehen. So iſt $\angle x = \alpha \frac{AGB}{2}$ (S. §. 84. Z. 1.) folglich BG = BM die zum $\angle x$ gehörige Sehne, auch der $\angle y = \alpha \frac{MDB}{2}$ (§. cit.) Daher MD = BD die zum $\angle y$ gehörige Sehne. Wenn ſich nun die $\angle\angle$ wie die Sehnen der Bögen, welche das Maas von ihnen ſind, verhielten, ſo wäre:

$\angle y : \angle x = BD : BG$
$\qquad\qquad\qquad\quad \|$

$\angle y : \angle x = BD : BM$ Nun iſt aber Z. 3.
$\qquad\quad \| = = 1 : 2$ folglich wär

$BD : BM = 1 : 2$

Da nun diß unmöglich (S. §. 53.) ſo iſt auch nicht $\angle y : \angle x = BD : BG$.

5) Der 3te und 4te Zuſatz bewieſen demnach aufs ſtrengſte, was (§. 10.) nur überhaupt von der Ungleichartigkeit der Seiten und $\angle\angle$ eines $\triangle$ behauptet worden iſt.

6) Der §. 31. erwieſene Lehrſatz iſt eben ſo wahr bey ſtumpfwinklicht als ſpitzwinklichten $\triangle\triangle$. Gewöhnlich ſchließt man: Da ſich um jedes $\triangle$ ein Cirkel beſchreiben läßt (S. §. 80. Nro. 3.) ſo muß dieſer Satz allgemein ſeyn. Ich will es aber dem Anfänger zu Gefallen ſchärfer beweiſſen.

Es ſeye Tr. T. III. Fig. K. AF = BH = a, FJ = d, AC = b, HL = e, CD = c, BC = f. So iſt zu zeigen, daß:

FJ : BC = HL : AC oder
d : f = e : b

△ ACD ∽ △ AFJ (G. §. 62. und 68.) Daher

I. CD : AC = FJ : AF oder
c : b = d : a und ferner

△ BCD ∽ △ BHL (G. §. cit.) folglich

II. CD : HL = BC : BH d. i.
c : e = f : a alſo (A. §. 215.)

---

ac = bd (p. I.) und
ac = ef (p. II.) Daher auch (A. §. 62.)

---

bd = ef folglich (A. §. 216. Z.)

---

d : f = e : b Nun iſt
‖ ‖ ‖ ‖ folglich

S∠A : BC = S∠B : AC

7) Was alſo (§. 6. Z. 2.) blos aus der Natur der Sinuſſe, für den Sinus eines ſtumpfen ∠ gefolgert wurde, erhält hier Zuſ. 6. einen ſtärkern Beweiß.

Anmerkung.

Auf dieſem §. und ſeinen Zuſätzen beruhen alle trigonometriſche Berechnungen. Denn nun kann man in allen △ △, worinnen 3 Stücke, unter welchen wenigſtens eine Seite bekannt iſt, gegeben ſind, alle übrige durch Berechnung finden. Nur iſt beym Anſatz, der hiezu nöthigen Regel de tri, folgender praktiſcher Vortheil wohl zu bemerken.

a) Wenn ich eine Seite finden ſoll, ſo iſt der erſte Satz der S eines bekannten $\angle$, der einer bekannten Seite entgegen ſteht. Der zweyte Satz eben dieſe bekannte Seite, welche dem erſten $\angle$ gegenüberſteht, der 3te Satz, der S des bekannten $\angle$, welcher der geſuchten Seite gegenüberliegt.

b) Soll aber ein $\angle$ gefunden werden, ſo iſt der 1te Satz: Die Seite, die einem bekannten $\angle$ gegenüber liegt. Der 2te, der S des $\angle$, welcher der bekannten Seite des 1ten Satzes entgegenſtehet, und der 3te Satz: Die Seite, welche dem geſuchten $\angle$ gegenüberſtehet.

Sechster Abſchnitt.

Wirkliche trigonom. Berechnung der Triangel.

§. 32.

Alle mögliche ebene △ △ ſind entweder recht- oder ſchiefwinklicht. In beyden iſt

Gegeben	folglich zu finden:
I. Entweder eine Seite und 2 $\angle$.	Die beyde übrige Seiten.
II. Zwo Seiten u. 1 $\angle$; dieſer iſt a) Entweder nicht von den Seiten eingeſchloſſen, folglich einer entgegen geſetzt. b) Oder er iſt von ihnen eingeſchloſſen.	Die beyde andere $\angle\angle$ und die 3te Seite.
III. Alle 3 Seiten.	Alle 3 $\angle$.

Zuſätze.

1) Sobald 2 ∠ in einem jeden △ gegeben ſind, ſo iſt auch der 3te bekannt (G. §. 60. Z. 3.)

2) Der ∟ im ◺ iſt immer bekannt und ſein S = ST (§. 8. Z. 2.)

3) Sobald ein ſpitziger ∠ im ◺ bekannt iſt, iſt auch der 2te (G. §. 60. Z. 1.) folglich alle 3 ∠ bekannt.

4) In jedem ◺ kann man die Hypotenuſe als ST und die beyde Cathetos wechſelsweiſe als S und Cos. betrachten (§. 6. und 8.) Z. E. im ◺ ADC Tr. T. I. Fig. 2. iſt AC, ST = R, AD = S und DC = Cos. Oder wenn DC = S, ſo iſt AD = Cos. (§. 8. Z. 1.)

5) In jedem ◺ kann man den einen Cathetus AB = R = ST annehmen, und dann iſt der andre Cathetus T ∠ B. Tr. T. III. Fig. L.

6) Man könnte zwar, für die Berechnung aller Dreyecke überhaupt, allgemeine Regeln angeben. Da aber die Natur der ◺◺ manche Aufgaben erleichtert, ſo ſollen dieſe zuerſt beſonders abgehandelt werden.

§. 33. Tr. T. I. F. 5.

Erſter Fall. Aus einem gegebenen Cathetus und einem ſpitzigen ∠, die Hypotenuſe und den andern Cathetus zu finden.

Auflöſung.

Gegeben — zu finden.

$\llcorner B = 90^\circ$ (§. 32. 2.) AC iſt $= 2^\circ 8' 4'' 9'''$ und
$\angle A = 47^\circ.29'$. folgl. auch AB fände ſich
$\angle C = 42^\circ.31'$. (§. 32. 3.) $S\angle A : BC = S\angle C : AB$
$BC = 2^\circ 1'$. Und nun wäre (§. 31.) ohne Logarithmen:

$$S\angle A : BC = S\angle B : AC \text{ weil aber } S\angle B = ST \text{ (§. 32. 3. 2.) ſo iſt}$$

$$S\angle A : BC = ST : AC$$

$7370808 : 2^\circ 1' = 10000000 : AC$ oder bequemer in Logarithmen

$$lS\angle A - lBC = lST - lAC$$

$$9.8675151 - 1.3222193 = 10.0000000 - lAC$$

Daher (A. §278) 10.0000000

$$\frac{\begin{array}{r}11.3222193\\ 9.8675151\end{array}}{1.4547042 = lAC}$$

Daher AC ſelbſt $= 2^\circ 8'$ oder unter der Charackteriſtick 3. aufgeſchlagen iſt $lAC = 3.4546924$ und $AC = 2^\circ 8' 4'' 9'''$ (A. §. 288. Nro. 1.)

Zuſatz.

Da wir in der logarithmiſchen Auflöſung hatten,

$$lS\angle A - lBC = lST - lAC$$

So läßt ſich dieſer Anſatz, zur wirklichen Berechnung, bequemer alſo einrichten:

III.	lST	=	10.0000000
II.	lBC	=	1.3222193

$$\begin{array}{lrl} \text{II} + \text{III}. & 1BC + 1ST = & 11.3222193 \\ \text{I}. & 1S\angle A = & 9.8675151 \\ \hline & 1AC = & 1.4547042 \end{array}$$

Denn, da man die 2 letzten immer addiren und den 1ten davon abziehen muß, ſo ſchreibe man den III. zu oberſt, den II. gleich darunter, unter ſie eine Linie, unter dieſe die Sum̃e von III. u. II. Unter die Sum̃e I. welches von II + III. abgezogen, immer den Logarithmen der geſuchten Grösſe giebt, ohne daß man den I. und III. Satz 2mal ſchreiben darf.

§. 34. Tr. T. I. Fig. 5.

Zweyter Fall. Aus der gegebenen Hypotenuſe und einem Cathetus, die beyde ſpitzige ∠ und den andern Cathetus zu finden.

Auflöſung.

Gegeben	und	zu finden.
AC = 5°1′2″		∠A = 39°.15′.
BC = 3 2 4		∠C = 50°.45′.
∟B = 90°		AB = 3° 9′ 6″.

1) AC : ST = BC : S∠A oder (1BC + 1ST) — 1AC = 1S∠A.

2) Der ∠C. ſteht als Cos. A, vermöge der Einrichtung der Tabellen, immer neben dem gefundenen ∠A.

3) ST : AC = S∠C : AB oder (1S∠C + 1AC) — 1ST = 1AB.

§. 35. Tr. T. I. Fig. 5.

Dritter Fall. Aus den gegebenen beyden Cathetis, die beyde ſpitzige ∠ und die Hypotenuſe zu finden.

Auflöſung.

Gegeben	und	zu finden.
AB = 3°9′6″		∠C = 50°. 42′.
BC = 3 2 4		∠A = 39. 18.
∠B = 90°.		AC = 5° 1′ 1″ 5‴.

Durch (G. §. 100.) verbunden mit §. 31. könnte man zwar dieſen Fall leicht, aber etwas weitläuftig auflöſen. Es wäre: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ u. AC : ST = BC : S∠A, wovon alsdann der ∠C Cos. (§. 34. 2.) Allein folgende Auflöſung iſt bequemer:

1) BC : AB = ST : T∠C (§. 32. 5.) oder (lST + lAB) — lBC = lT∠C.

2) Cot. ∠C = T∠A, welche in den Tafeln neben T∠C ſtehet.

3) S∠A : BC = ST : AC oder (lST + lBC) — lS∠A = lAC (§. 33.)

§. 36. Tr. T. I. Fig. 5.

Vierter Fall. Aus einem gegebenen Cathetus und dem anliegenden ſpitzigen ∠ den andern Cathethus und die Hypotenuſe zu finden.

Auflöſung.

Gegeben	und	zu finden.
$BC = 3°2'4''$	$\angle A = 39°.18'.$ (§. 32. Z. 3.)	
$\angle C = 50°.44'.$	$AB = 3°9'5''8'''.$	
$\angle B = 90°.$	$AC = 5\ 1\ 1\ 5.$	

Dieſer Fall iſt in Abſicht auf Data und Auflöſung vollkommen mit dem erſten übereinſtimmend. Denn es wäre $S\angle A : BC = S\angle C : AB$ und $S\angle A : BC = ST : AC.$ Bloß die Anfänger vorläufig in der Berechnung mit den Tangenten zu üben, geb' ich eine von dieſer verſchiedene Auflöſung:

1) $ST : T\angle C = BC : AB$ (§. 35. 1.) oder $(lBC + lT\angle C) - lST = lAB.$

2) $S\angle A : BC = ST : AC$ oder $(lST + lBC) - lS\angle A = lAC.$

§. 37.

Sollte man, wie z. E. (§. 34. 1.) auſſer den gefundenen Minuten, noch Secunden verlangen, und hätte keine groſſe Tafeln, worinnen ſie ſtehen, ſo verfährt man nach (§. 18.) folgendermaſen.

Auflöſung.

Im §. 34. war $lBC = 2.5105450$
$lST = 10.0000000$

$lBC + lST = 12.5105450$
$lAC = 2.7092700$

$lS\angle A = 9.8012750$
folglich $\angle A = 39°.15'.$

Nun zieht man vom gefundenen

1S∠A . . . . . = 9.8012750 den

Nächſt kleinern l aus den Tafeln

ab . . . . = 9.8012015

Und bemerkt die Ite Differenz = 735

Aber auch vom nächſt gröſſern

in den Tafeln . . . = 9.8013561 den

Nächſtkleinern in denſelben . = 9.8012015

Und bemerkt die IIte Differenz = 1546

Endlich ſchließt man 1546 : 60″ = 735

773 : 30 = 735
30

773 : 22050 | 28″
1546
6590
6184
406

So iſt nun der ∠A = 39°. 15′. 28″.

Anmerkung.

In verſchiedenen neuern auch kleinern Sinustafeln, z. E. in denen in Wien 1777 herausgekommenen, ſind dieſe Differenzen neben den Sinuſſen, oder vielmehr ihren Logar. ſchon berechnet, welches dieſe Aufgabe ſehr erleichtert. Daß man auf eine ähnliche Art auch die Tertien finden kann, lehrt (§. 20.) Dieſe 4 Aufgaben von △ △ enthalten alles, was in der Ausübung am brauchbarſten iſt und am häufigſten vorkommt. Beck in ſeinen Inſtitut. Mathem. T. I. p. 334. macht 21 Fälle daraus und brachte ſie in eine Tabelle,

welche aber vielleicht mehr Verwirrung als Aufklärung für den Anfänger iſt. Fig. L. T. III. zeigt deutlich, wie jede Seite R werden, folglich jeder Fall, ohne beſondre Vorſchrifft aufgelöſet werden kann.

§. 38. Tr. T I. Fig. 1.

Bey Berechnung ſchiefwinklichter △ kommen 3 Hauptfälle, und weil der 2te noch 2 unter ſich begreifft, in allem 4 vor (§. 32.) Der erſte iſt: Aus 2 gegebenen ∠∠ und einer Seite, den 3ten ∠ und die beyden Seiten zu finden.

Auflöſung.

Folglich Gegeben	und	zu finden.
∠A = 55°. 20′.		∠B = 63°. 56′.
∠C = 60. 44.		AB = 2°0′7″8‴
AC = 2°1′4″.		BC = 1959

1) ∠B = 180° — (∠A + ∠C) (§. 32. Z. 1.)

2) S∠B : AC = S∠C : AB oder (lS∠C + lAC) — lS∠B = lAB.

3) S∠B : AC = S∠A : BC oder (lS∠A + lAC) — lS∠B = lBC (§. 31.)

Anmerkung.

Wär der △ wie Tab. III. Fig. K ſtumpfwinklicht, ſo bleibt die Auflöſung die nemliche. Nur muß, beym ſtumpfen ∠x, der S∠y, als ſeines benachbarten ſpitzigen ∠ genommen werden (§. 6. Z. 2. und §. 31. Z. 6.) Wären alle 3 ∠ gegeben, ſo fiel in der Auflöſung Nro. 1. für ſich hinweg.

§. 39. Tr. T. I. F. 1.

Zweyter Fall: Aus 2 gegebenen Seiten und einem ∠, der einer von dieſen Seiten gegenüberſtehet, die übrige ∠ und die 3te Seite zu finden.

Aufloͤſung.

Hier iſt Gegeben	und	zu finden:
AC = 2° 1′ 4″ 0‴		∠B = 63° 57′.
BC = 1 9 5 9		∠C = 60. 43.
∠A = 55°. 20′.		AB = 2° 0′ 7″ 7‴.

1) BC : S∠A = AC : S∠B oder (l AC + l S∠A) — l BC = l S∠B (§. 31.)

2) 180° — (∠A + ∠B) = ∠C (§. 32. Z. 1.)

3) S∠B : AC = S∠C : AB oder (l S∠C + l AC) — l S∠B = l AB.

Zuſätze.

1) Ob die ∠B und ∠C richtig gefunden worden, läßt ſich aus (G. §. 60.) einigermaſen pruͤfen.

2) Auch hier gilt §. 38. Anmerkung.

3) Da ſtumpfe und ſpitzige benachbarte ∠ einerley S haben (§. 6. Z. 2.) ſo koͤnnte der ∠C, der Rechnung nach, ſowohl ein ſpitziger, als ſtumpfer ∠ ſeyn. Diß wuͤrde aber in der Seite AB einen gewaltigen Unterſchied machen, und alſo, unter den obigen Datis allein, dieſe Aufgabe unbeſtimmt bleiben. Weiß man aber, ob der ∠C ſpitz oder ſtumpf iſt, ſo faͤllt alles Unbeſtimmte

weg; allein diß zeigt ſich auch immer aus (S. §. 50. und 52.)

§. 40. Tr. T. III. Fig. M.

Dritter Fall. Aus 2 gegebenen Seiten, und dem von ihnen eingeſchloſſenen ∠ die beyde übrige ∠ ∠ und die noch fehlende Seite zu finden.

Auflöſung.

Hier iſt Gegeben	und	zu finden
AB = 1°5′6″	(∠y+∠o) = ∠B =	118°.28′.
AC = 3 0 7	∠b = ∠C =	26. 32.
∠x = 35°.	BC =	2°0′0″3‴

Alles wär nach §. 39. leicht, wenn man nur noch den (∠y + ∠o) oder den ∠b wüßte. Denn aus dieſen fände ſich der 3te (§. 32. Z. 1.) und BC erhielte man nach (§. 38. oder §. 39.) Nun iſt x, folglich (y+o) + b (p. hyp. und S. §. 60. Z. 3.) und $\frac{S}{2}$ von (y+o) + b, bekannt. Man könnte alſo auch den gröſſern und kleinern der beyden unbekannten ∠ finden, wenn man nur ihre halbe Differenz oder $\frac{(y+o)-b}{2}$ wüßte (Ar. §. 188.) Dieſe wäre bekannt, wenn man nur den S oder die T derſelben hätte. Sie zu finden beruhet auf folgenden Sätzen:

I. BE = T∠c

II. EF = T(∠b + ∠c)

III. BE kann aus den Datis im gegenwärtigen Fall gefunden werden.

IV. Der $(\angle b + \angle c) = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{S}{2}$ der beyden unbekannten $\angle\angle$.

V. Der $\angle c = \frac{(y+o) - b}{2} = \frac{\angle B - \angle C}{2}$ $= \frac{D}{2}$ der beyden unbekannten $\angle\angle$.

Man verlängere AC bis AF = AB, beſchreibe aus A mit AF einen halben Cirkel und ziehe aus der Spitze des $\triangle$ B, nach D, eine gerade Linie, ſo iſt der $\angle$ $(d+y) = 90°$. (G. §. 84. 3.) Man ziehe EC ⧻ BD, ſo iſt auch $u = (d+y) = 90°$. (G. §. 57. 3.) Nimmt man nun C für das Centrum und EC für R an, ſo iſt BE = T$\angle$c und EF = T$\angle$ (b+c) (§. 9.) W. D. I. und II. wäre.

Es ſeye die Summe der gegebenen Seiten = Summ. lat. und ihr Unterſchied = Diff. lat. Nun iſt

CF = AC + AF weil aber (I.)
‖

ſo iſt 1) CF = (AC + AB) = Summ. lat.

Da ferner DC = AC — AD und (I.)
‖

ſo iſt 2) DC = (AC — AB) = Diff. lat.

Da nun EC ⧻ BD (p. hyp. Nro. I. und II.) auch DC und CF bekannte Gröſſen ſind (1. und 2.) ſo iſt

$\triangle$ BDF ∽ $\triangle$ CEF (G. §. 68.) folglich auch

CF : CD = EF : BE (auch I. II. 1. 2.
‖ ‖ ‖ ‖ Daher

3) Sum. lat : Diff. lat. = T$\angle$(b+c) : T$\angle$c

Welches das IIIte wäre.

Und da auch $S = (y+o)+b$ oder S der unbek. ∠∠ (S. §. 47. Nro. 4.)

ſo iſt $S = z+o+b$ weil aber $o+b = z$ (S. §. 59.)

ſo iſt $S = 2z$ und : 2

$\frac{S}{2} = z$ Da aber auch (S. §. 57.)

ſo muß $\frac{B+C}{2} = \angle(b+c) = \frac{S}{2}$ der unbekannten ∠∠ ſeyn, welches das IVte wäre. Endlich iſt

$\frac{S}{2} - m = \frac{D}{2}$ (Ar. §. 189. Z. 1.)
und nach Nro. IV. Daher

$\angle(b+c) - \angle b = \frac{D}{2}$ auch, weil

$\angle c = \frac{\angle(B-C)}{2} = \frac{D}{2}$ der unbekannten ∠∠, welches das Vte wäre.

Nun iſt gegeben: Summ. lat. (III. 1.) Diff. lat. (III. 2.) nebſt $T\frac{\angle(B+C)}{2} = T\frac{S}{2}$ der unbekannten ∠∠ (IV.) Folglich kann auch $T\frac{\angle(B-C)}{2}$ oder $T\frac{D}{2}$ der unbekannten ∠∠ gefunden und alſo $\frac{D}{2}$ ſelbſt, in den Tafeln, geſucht werden. Denn itzt ſchließt man nach (III.)

Summ. lat. : Diff. lat. $= T\angle(b+c) : T\angle c$ das iſt

Summ. lat. : Diff. lat. $= T\frac{\angle(B+C)}{2} : T\frac{\angle(B-C)}{2}$

Und da $\frac{S}{2}$ + $\frac{D}{2}$ = M (A. §. 188.) auch

$$\angle(B+C) + \angle(B-C) = \angle B$$ oder dem gröſſern der unbekannten ∠∠;

auch $\frac{S}{2}$ — $\frac{D}{2}$ = m (loc. cit.) und folglich

$$\frac{\angle(B+C)}{2} - \frac{\angle(B-C)}{2} = \angle C$$ oder dem kleinern der unbekannten ∠∠.

Anmerkung.

Auch hier läßt ſich die (§. 39. Z. 1.) angegebene Prüfung anwenden und übrigens, durch dieſe Aufgabe, M. G. §. 63. am leichteſten und allgemeinſten auflöſen, wovon mündlich.

§. 41. Tr. T. III. F. N.

Leichter zu beweiſſende Auflöſung des nemlichen Falles. Man ziehe aus dem ∠ B auf AC in Gedanken die Perpendikulare BD, ſo entſtehen 2 △, ABD und BDC. Im erſten iſt nach (§. 40. und §. 31. Z. 2.)

Gegeben	und zu finden
$\angle o$	$\angle y = 90^\circ - \angle o$
$\angle x$	BD, dann ST : AB = S∠o : BD
AB	AD, weil ST : AB = S∠y : AD

Da nun AC — AD = DC, ſo iſt im 2ten △ BDC

Gegeben	und zu finden
BD	∠v weil DC : BD = ST : T∠v
DC	BC indem S∠v : AB = S∠o : BC
∟m = 90°	$\angle(y+n) = 180^\circ - \angle(o+v)$

§. 42. Tr. T. III. F. Q.

Wär der △ ABC ſtumpfwinklicht und der ſtumpfe ∠ p nebſt AB und AC gegeben, ſo iſt die Auflöſung in etwas vom (§. 41.) verſchieden. Man verlängert AC unbeſtimmt gegen D und läßt darauf aus B die Perpendikulare BD fallen, ſo hat man den ◺ ABD

worinn Gegeben	und	zu finden
∠ u = 90°		∠ y = 90° — ∠ z
∠ z = 180° — p		BD weil ST : AB = S∠ z : BD
AB		AD da ST : AB = Sy : AD

Da nun AD + AC = CD ſo iſt im ◺ BCD

Gegeben	und	zu finden
BD		∠ o da CD : BD = ST : T∠ o
CD		∠ x = 180° — (∠ o + ∠ p)
∟ u = 90°		BC dann S∠ x : AC = S∠ p : BC

§. 43. Tr. T. I. Fig. 7.

Vierter Fall. Aus allen 3 Seiten eines △ alle 3 fehlende ∠ zu finden.

Auflöſung.

Hier iſt Gegeben	und	zu finden
BC = 4°5′		∠ B = 57°. 56′
AB = 36		∠ C = 49. 42.
AC = 40		∠ A = 72. 22.

Man fälle auf die längſte Seite des △ BC die Perpendikulare AE, um den ◺ ABE, worinnen gewiß der ∟ u bekannt iſt, zu erhalten. Hier ſind demnach 2 Stücke

Gegeben	und	zu finden
∟u = 90°		∠B = 57°. 56′.
AB		

Wär noch eine Seite BE bekannt, ſo ließ ſich auch der ∠B; folglich im Haupt △ABC der ∠C und ∠A finden. In dieſer Abſicht beſchreibe man aus der Spitze A, mit der kleinſten Seite AB einen Cirkel, ſo iſt AD = AB = AF (G. §. 21. Nro. 3.) Da nun

AC+AB=Sum. lat. aber auch
|| ſo iſt

1) AC+AD=CD=Sum. lat auſſer der Baſis.

Ferner iſt AC--AD=Diff. lat. auſſer der Baſis, und
|| Daher

2) AC--AF=CF d. Diff. lat. auſſer der Baſis BC.

BG iſt Sehne, folgl. (G. §. 78 u. p. conſtr.) GE=BE.

Wäre demnach CG bekannt, ſo wär BC — CG = BG,
3) und $\frac{BG}{2}$ = BE folglich im △ABE Data genug, um alle übrige fehlende Stücke zu erfinden. Denn da
△CGF ∽ △BCD (G. §. 90.)

ſo iſt BC : CD = CF : CG Weil aber
|| || || (Nro. 1. und 2.)

4) Baſis : Sum. lat. = Diff. lat. : CG

Nun wär im △ABE

Gegeben	und	zu finden
∟E = 90°		∠B = 57°. 56′
BE = 1°9′1″2‴		Denn AB : ST = BE : S∠m u.
5) AB = 3600		∠p = ∠B = 90° — ∠m.

Ferner iſt §. 80 im △ABC

Gegeben	und	zu finden
$BC = 4^\circ 5' 0'' 0'''$		$\angle n = \angle C = 49^\circ . 42'$
$AB = 3\ 6\ 0\ 0$		$\angle v+m = \angle A = 72.\ 22.$
$AC = 4\ 0\ 0\ 0$		
$\angle B = 57^\circ . 56'.$		

6) Indem $AC : S\angle p = AB : S\angle n$ (§. 39.) und endlich der $\angle (v+m) = \angle A = 180^\circ - (\angle p + \angle n)$

Anmerkung.

Zur Prüfung giebt (§. 39. Z. 1.) die Regeln an. Da ferner $\sqrt{AB^2 - BE^2} = AE$ (§. 100. G.) ſo kann auch durch Hülfe von Nro. 1. 2. 3. der Innhalt des $\triangle ABC$ aus ſeinen 3 Seiten gefunden werden (§. 128. Z. 1. G.)

§. 44. Tr. T. III. F. N.

Auch hier findet eine manchen leichter ſcheinende Auflöſung ſtatt. Es ſeye (p. hyp. §. 43.)

Gegeben	und	zu finden
$AB = b$		$\angle o$
$AC = a$		$\angle (y+n)$
$BC = c$		$\angle v.$

So wäre, wenn man aus B, ein Perpendickel BD, in Gedanken, auf die längſte Seite AC fället, auch $AD = t$ ſetzet, $DC = a - t$. Aus AD aber ließ ſich auch BD und DC, folglich die 3 unbekannte $\angle \angle$ nach (§. 43. Nro. 4. 5. und 6.) erfinden. Es heiſſe daher BD als gleichfalls unbekannt u, ſo iſt im $\triangle ABD$

I. $b^2 = t^2 + u^2$ (G. §. 100.) folglich

$b^2 - t^2 = u^2$; u. im △BDC aus dem neml. Grund

II. $c^2 = a^2 - 2at + t^2 + u^2$ weil aber

||

nach der erſten Gleichung $b^2 - t^2$ ſo wäre

$c^2 = a^2 - 2at + t^2 + b^2 - t^2$ u. da ſich $+ t^2$ u. $- t^2$ hebt

ſo iſt $c^2 = a^2 - 2at + b^2$ (2at addirt).

$c^2 + 2at = a^2 + b^2$ (c^2 ſubtrahirt)

$2at^2 = a^2 + b^2 - c^2$ (und mit 2a dividirt)

$$t = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

Da nun t durch die letzte Gleichung gefunden worden, folglich jetzo bekannt iſt, ſo iſt, weil

$b^2 - t^2 = u^2$ (I.) und

$\sqrt{b^2 - t^2} = u$

auch $u =$ BD bekannt, folglich nach (§. 43. Nro. 4. 5. 6.) AB : ST = BD : S∠o und BC : S∠o = AB : S∠v auch ∠(y+n) oder der ∠B = 180° — ∠(o+v).

§. 45. Tr. T. III. Fig. P.

Gleichſeitig und gleichſchenklichte △, geſtatten, bey ihrer Berechnung, beträchtliche Abkürzungen. In den erſtern ſind immer alle ∠ bekannt (G. §. 60. Z. 6.) und wenn man eine Seite kennt, kennt man alle. Iſt aber der △ABC gleichſchenklicht, und AC nebſt AB gegeben, ſo laſſe man in Gedanken die Perpendikulare

CD auf AB fallen. Alsdann iſt der $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (G. §. 65.) Daher $o = v$, $u = n$, auch $x = m = 90°$, und $\angle o$ findet ſich auf folgende Art: $AC : ST = AD : S\angle o$. Nun iſt $2\angle o =$ dem $\angle (o+v) = \angle C$, desgleichen $180° - \angle C = \angle (u+n)$ und da $\angle u = \angle n$ ſo iſt $\frac{180° - \angle C}{2} = \angle u = \angle n$.

Anmerkung.

Diß iſt auch von Berechnung ſchiefwinklichter $\triangle$ das brauchbarſte und gemeinnützigſte. Hier fände, wie (§. 37. Anmerk.) eine Tabelle ſtatt, bleibt aber aus denen dort angegebenen Gründen weg.

Siebenter Abſchnitt.

Anwendung der Trigonometrie.

§. 46.

Blos auf Geometriſche Gegenſtände, und ihre ſchärfere, oder leichtere Abmeſſungen, kann hier die Trigonometrie angewendet werden. Die angewandte Mathematick wird ihren Nutzen, ſo wie der ganzen reinen Mathematick, in ein noch weit helleres Licht ſetzen. Aber auch diß gründlich einzuſehen, muß man ſich folgende Lehrſätze bekannt machen.

§. 47. Tr. T. II. Fig. 15.

Wenn beym Meſſen einer Höhe BC (G. §. 75.) im Winkel A gefehlt wird, ſo verhält ſich die wahre

Höhe BD zur falſchen BC, wie $Tx : Tx + y$ oder wie T des wahren Winkels zur T des irrigen Winkels.

Beweiß.

1) Geſetzt der wahre Winkel ſeye $= x$, der irrige $= x + y$, ſo iſt im △ABD u. ABC (wenn $AB = R$) $BD = Tx$ und $BC = Tx + y$. Da nun

$BD : BC = BD : BC$ und
$\quad \| \quad\quad \| \quad\quad \| \quad\quad \|$ ſo iſt

die wahre Höhe : falſchen Höhe $= Tx : T(x+y)$

2) Wäre $x+y$ der wahre, x der irrige Winkel, ſo iſt: Die wahre Höhe zur falſchen $= Tx+y : Tx$, welches eben ſo zu beweiſſen.

Zuſätze.

1) Folglich veranlaßt der nemliche, im Meſſen des Winkels A, begangene Fehler, einen gröſſern Fehler, bey gröſſern, als bey kleinern Winkeln, denn $T(x+y)$ iſt gewiß $> Tx$.

2) Da die Differenz der Tangenten ſehr kleiner Winkel, eben ſo wie die Differenz der Tangenten ſehr groſſer oder 90° nahe kommender Winkel, gröſſer iſt, als die Differenz der Tangenten zweyer Winkel, welche 45° nahe kommen, wie diß die Sinustafeln zeigen; ſo wird der nemliche, beym Meſſen eines Winkels, begangene Fehler, wenn der Winkel ſehr ſpitzig oder ſehr nahe an 90° iſt, einen gröſſern Fehler in der abzumeſſenden Höhe veranlaſſen, als bey einem nahe an 45° gränzenden Winkel. Mündlich ein praktiſches Beyſpiel.

3) Kleinere Standlinien z. E. BE geben, bey einerley Höhen, einen gröſſern Winkel u als gröſſere z. E. AB; denn der Winkel u iſt gewiß > x (G. § 50.) Und je gröſſer die Standlinie, deſto kleiner wird der Winkel x, deſto ſchwerer iſt er genau zu meſſen. Soll alſo der, immer bey Meſſung des Winkels x, mögliche Fehler, ſo klein als nur möglich iſt, werden, ſo muß man die Standlinie AB ſo groß annehmen, daß ſie beynahe der geſuchten Höhe AD gleich, folglich der Winkel x nicht viel über oder unter 45° wird (G. §.60. Z.1.)

§. 48. Tr. T. II. F. 16.

Wenn (G. §. 75.) das Aſtrolab nicht horizontal ſteht, ſondern etwa den Winkel x oder y mit AB macht, ſo verhält ſich die wahre Höhe zur unrichtigen d. i. BC : CD = T o+x : T o+x+y.

Beweiß.

Wenn AB für R angenommen wird, ſo iſt BC = T des wahren Winkels (o+x) Daher wär in dieſem Fall ST : T o+x = AB : BC (§. 36.) Man ſchließt aber nach dem gemeſſenen irrigen Winkel (o+x+y) ST : T(o+x+y = AB : CD Daher

ST : AB = T(o+x) : BC Daher
Und || = T(o+x+y) : CD (A. §. 203.)

T(o+x) : BC = T(o+x+y) : CD u. (A. § 217.)

BC : CD = T(o+x) : T(o+x+y)

Wär der irrige Winkel o; ſo wirds eben ſo bewieſen.

Zuſatz

Alle §. 47. gemachte Zuſätze, paſſen, mit kleinen Veränderungen, hieher. Beyde §§. aber überzeugen uns, wie ſchwer es ſeye, eine Höhe richtig zu meſſen, da man den doppelten, hier ſo leicht möglichen Fehler, bey Meſſung des Winkels x, faſt unmöglich ganz verhüten kann.

§. 49. Tr. T.I. Fig. 8.

Die Höhe AB, zu der man aus E kommen kann, zu meſſen.

Auflöſung.

1) Man wähle den Standpunkt E nach (§. 47. Z. 3.)

2) Meſſe den Winkel o und die Standlinie BE äuſſerſt ſcharf.

3) Ueberdiß, wenn BE horizontal iſt, DE = BC oder die Höhe des Aſtrolabs. Nun iſt im △ ADC

Gegeben	und	zu finden
∠o = 42°. 10′.		AB = 6°5′4″4‴
BE = DC = 6°8′4″		Denn nach §. 33. iſt Sm : DC =
∟u = 90°.		So : AC wozu noch DE addirt
folgl. ∠m = 47°. 50′.		wird, ſo iſt AC + BC = AB.

Zuſätze.

1) Wär die Standlinie BD, folglich nicht horizontal, ſo muß BC beſonders gefunden werden. Man mißt nemlich, auſſer der Standlinie BD, noch den Winkel x und ſchließt: ST : BD = Sx : BC hierauf ST : BD = Sy : CD, und findet dann erſt nach dem §. den Theil der Höhe, AC.

2) Auch AD kann nach §. 33. gefunden werden.

3) Wär AB und Winkel m gegeben, ſo ließ ſich (§. cit.) BE und AD finden.

4) Wenn BE horizontal iſt, kann die Aufgabe auch nach §. 36. aufgelöſet werden.

§. 50. Tr. T. I. F. 9.

Eine Höhe AB, zu welcher man nicht kommen kann, zu meſſen, wenn EB horizontal iſt.

Auflöſung.

Wählet Standlinie und Standpunkte nach (§. 47. Z. 3.) ſo daß der Winkel n nicht zu ſpitzig und der Winkel y nicht viel über oder unter 45° werde, folglich die Linie nicht zu klein, und G nicht zu nahe an AB. Nun kann im △ ADF gemeſſen werden und iſt daher

Gegeben	und	zu finden
DF=GE=11°7′2″		AF=15°0′0″ denn
∠o= 25°. 25′		Sn:DF=So:AF (§. 38.)
∠y= 45°.		Und nun iſt im
daher ∠x= 135°. (S. §. 40.)		△ AFC
folgl. ∠n= 19°. 35. (§. 32. Z. 1.)		

Gegeben	und	zu finden
AF=15°0′0″		AC = 10°6′0″
∠y=45°.		DE=BC = 3 5 Daher
∠p=90°.		AB = 10°9′5″.

Denn ST : AF = Sy : AC

Zuſatz.

Wär BG nicht horizontal, ſo wird im $\triangle$BCF, CF nach (§. 49. Z. 1.) gefunden. Es wäre Sp: AF = Sq : CF; alsdann Sm : CF = Su : CB. Der 2te und 3te Zuſatz §. cit. läßt ſich, mit kleinen Veränderungen, auch hier anwenden.

§. 51. Tr. T. I. Fig. 10.

Aus verſchiedenen Stockwerken eines Gebäudes E und F, eine Höhe AB, deren Spitze man in beyden Stockwerken ſehen kann, wenn BG horizontal iſt, zu meſſen.

Auflöſung.

I. Man meſſe 1) Die Entfern. der Stockw. EF = 1°0′0″
2) Den $\angle$x — — = 24°. 10′.
3) Den $\angle$u — — = 28. 10.
4) Die Enfernung des unterſten Standpunkts F von der Erde — = GF = 3′3″4‴

Nun iſt im $\triangle$AEF

Gegeben und zu finden

EF = 1°0′0″

$\angle$o + x = x + 90° = 114°. 10′ u. AF = 13°0′7″.

$\angle$q = 65. 50 (S. §. 40.)

$\angle$y = 90° — u = 61. 50.

Folglich $\angle$m = 4. 0. (§. 32. Z. 1.) Nun wäre Sm : EF = Sq : AF (§. 38.)

II. Alſo iſt im △ ADF

Gegeben	und	zu finden
AF = 13°0′7″		AD = 6°1′6″9‴
∠u = 28°. 10′.	Indem ST : AF = Su : AD (§. 38)	
∟p = 90. 0.		

III. Folglich da AD = 6°1′6″9‴ (N. II.)
Und GF = 3 3 4 (N. I.) ſo iſt

AD + GF = AB = 6°5′0″3‴ od. der geſuchten Höhe.

Zuſätze.

1) Wär BG nicht horizontal, ſo iſt nach (§. 49. Z. 1. und §. 50. Zuſ.) Su : AD = St : DF und alsdann Sr : DF = Sv : BD.

2) Eben ſo leicht läßt ſich AE, BF und BG nach (§. 38.) finden, wenn es nöthig iſt.

§. 52. Tr. T. II. F. 17.

Wenn nach (G. §. 74.) die Weite BC gemeſſen, und im Winkel o um einige Minuten gefehlt wird, AB und AC aber richtig gemeſſen ſind, ſo verhält ſich ∝ CD als das Maas des Fehlers x zu DE dem Unterſchied der wahren und falſchen Weite, wie ST : Sy welcher AB entgegenſtehet.

Beweiß.

Geſetzt der Winkel o werde im Meſſen aus Verſehen um den Winkel x vergröſſert, ſo wird aus dem △ ABC der △ ABD, weil AC = AD bleibet. Man beſchreibe aus A, mit AC, den ∝ CD. Dieſer fällt

gewiß in D (G. §. 21. Nro. 3.) Nun iſt α CD ſehr klein, kann daher für eine gerade Linie angenommen und aus AC in °. '. " ꝛc. gefunden werden (G. §. 139.) Eben ſo beſchreibt man aus B, mit BC, den α CE. Auch dieſer kann für eine gerade Linie angenommen werden, und DE iſt = BD — BC, weil BE = BC (G. §. 21. Nro. 3.) und die $\angle (v+u) = \angle (y+v) = \angle n = 90°$ (G. §. 85. Z. 1.) folglich $y = u$ (A. §. 63.) Es iſt aber ST : CD = Su : DE (§. 34.) und weil Su = Sy ſo iſt auch (A. §. 217.)

ST : Sy = CD : DE.

Zuſätze.

1) Wenn einerley Fehler im Winkel o begangen wird; ſo iſt der Fehler DE deſto beträchtlicher, je gröſſer der Winkel y; deſto geringer, je kleiner der Winkel y (A. §. 64.)

2) Man muß daher den Standpunkt A ſo wählen, daß y ſehr ſpitzig, folglich der Winkel $o > 90°$ und AC > AB wird (G. §. 52.)

3) Weil $\angle o+x >$ der Winkel m, ſo muß A ſo nahe bey BC angenommen werden, als es Zuſ. 2. erfordert, da gröſſere Entfernung einen gröſſern Fehler giebt.

§. 53. Tr. T. I. F. 11.

Die Weite, zweener, aus einem 3ten Standpunkt zugangbarer Orte, AB zu meſſen.

Auflöſung.

Man wähle den Standpunkt C nach (§. 52. Zuſ. 1. 2. 3.) und meſſe, was (G. §. 74.) zu meſſen nöthig iſt. So iſt im △ ABC

Gegeben	und	zu finden
AC = 22° 3′ 1″		AB = 30° 7′ 2″ denn
BC = 23 4 5	I. AC + BC : BC — AC = $\frac{\angle A+B}{2}$:	
	T $\frac{A-B}{2}$ (§. 40.)	
∠C = 84°. 20′	folgl. ∠B = 46°. 16′. (§. cit.) u.	
∠B = 46. 16.	II. S B : AC = S C : AB (§. cit.)	

§. 54. Tr. T. II. F. 18.

Wenn beym Meſſen der Weite AB, aus 2 Winkeln p und n und der Seite AC, nur in einem Winkel n gefehlt wird, ſo verhält ST : So, welcher der Standlinie AC gegenüber liegt = α BE, das Maas des Fehlers m : BD oder dem Unterſchied der wahren und falſchen Weite AB und AD.

Beweiß.

Die fehlerhafte Weite AD, oder das Stück BD, liegt mit der wahren AB in einer geraden Linie, folglich ſchneidet der Schenkel des falſchen Winkels n + m hier die wahre verlängerte Weite in D. Nun beſchreibe man aus C, mit BC, den α BE = dem Winkel m, dieſer kann für eine gerade Linie angenommen werden. Weil aber r = v (G. §. 85. Z. 1.) als ∟ ∟, ſo iſt

$o+u=x+u=90°$ (A. §. 63. und G. §. 40. und §. 60. Z. 1.) Daher $o=x$ (A. §. 63.) Nun iſt aber (§. 31.) $ST : BD = Sx : BE$

$$\begin{array}{c} ST : BD = Sx : BE \\ \| \\ So \end{array}$$ folglich (Ar. §. 217.)

$$So : ST = BE : BD$$

Zuſätze.

1) Wenn im Winkel n der nemliche Fehler bleibt, ſo wird BD, oder der Fehler in der geſuchten Weite AB kleiner, wenn der Winkel o gröſſer, als wenn er kleiner iſt.

2) Man muß alſo die Standpunkte A und C ſo wählen, daß die Winkel p und n ſehr ſchief, der $\angle o$ aber beynahe 90° werde, folglich muß $\angle p + \angle n$ ein wenig $> 90°$ ſeyn.

3) Stumpfe und ſpitzige benachbarte Winkel haben einerley S (§. 6. Z. 2.) Wär alſo der Winkel o $> 90°$ ſo iſts eben ſo viel als wenn er ein ſpitziger Winkel wäre. Will man ihn daher ſtumpf machen, ſo darf er nur ein wenig $> 90°$ werden, folglich müſſen in dieſem Fall die Winkel $p+n$ nur etwas $< 90°$ angenommen werden.

4) Wenn $\angle o = 90°$ ſo fällt αBE auf BD und wird BD gleich. Bleibt daher der vorige Fehler im Meſſen des $\angle n$ oder der $\angle m$ der nemliche, ſo wird der Irrthum BD am kleinſten, wenn $\angle o = 90°$ iſt.

§. 55. Tr. T. II. F. 18.

Wird in der Abmeſſung von AB, nach denen Datis des §. 54. nicht nur im Winkel n, ſondern auch im Winkel p gefehlt, ſo verhält ſich α DJ $= \angle$ k oder dem im Winkel p begangenen Fehler, zum Fehler der Weite AD $=$ AJ, oder zu HJ, wie S des 3ten $\angle$ o $- \angle$ m zu ſeinem Cos.

Beweiß.

Da im Winkel p geirrt wurde, ſo fällt die zu meſſende Weite AB in AH, und wenn CD der Schenkel des 1ten fehlerhaft gemeſſenen Winkels n verlängert wird, bis ſie AH in H durchſchneidet, ſo iſt AH die aus dem doppelten Fehler m und k entſprungene Weite. Nun beſchreibe man, mit der aus dem 1ten Fehler (§. 54.) entſprungenen Weite AD, den α DJ $= \angle$ k, welcher auf AD und AJ perpendikular ſteht (G. §. 85. Z. 1.) folglich iſt t $=$ q $=$ 90°, und DJ, wegen ſeiner Kleine, eine gerade Linie. Daher (§. 54.) $\angle$ y $= \angle$ x $= \angle$ o $- \angle$ m (G. §. 59.) Weil aber

$$Sy : DJ = Sz : JH$$

$$\| $$

Cos. y   ſo iſt (A. §. 217.)

$$DJ : JH = Sy : Cos. y$$

Zuſatz.

Würde der Winkel n zu klein gemeſſen, ſo wird der in der Weite AB hieraus entſtehende Fehler eben ſo beſtimmt, nur muß er in dieſem Fall addirt werden.

und wenn der Winkel p alsdann zu groß ausfiele, ſo könnt' ein Fehler den andern vermindern oder wohl gar aufheben.

§. 56. Tr. T. I. Fig. 12.

Man meſſe die Breite des Fluſſes AB, oder die Weite zweyer Orte, wo man aus dem angenommenen 3ten Standpunkt C nur zu einem B kommen kann.

Auflöſung.

Wählt den Standpunkt C ſo, daß der Winkel A 90° ſo nahe komme als möglich iſt, oder ſelbſt = 90° werde (§. 54. Zuſätze.) und meſſet, was (S. §. 74.) zu meſſen nöthig iſt, ſo iſt im △ ABC

Gegeben	und	zu finden.
BC = 8° 6′ 0″		AB = 6° 2′ 4″ 1‴ denn
∠B = 45°. 20′.		SA : BC = SC : AB (§. 38.)
∠C = 46. 30.		
folgl. ∠A = 88. 10.		

§. 57. Tr. T. I. Fig. 13.

Die Weite zweener Orte BG, zu deren keinem man kommen kann, zu finden.

Auflöſung.

1) Wählt die Standlinie DE ſo viel möglich gegen die Mitte von GB über, wo möglich, nicht viel kleiner als GB ſelbſt, wenigſtens deſto gröſſer, je gröſſer GB iſt,

2) In ihr, ſo ziemlich in der Mitte, den Standpunkt C.

3) Meſſet CD, CE (welche nach (§. 54.) beſtimmt worden) ingleichem die Winkel m, y. x und o, woraus ſich die andere Winkel n

4) u und p (§. 32. Z. 1. und S. §. 60. und 40.) finden. Nun iſt im △ GCD

Gegeben	und	zu finden
CD = 3°4′0″		GC = 6°5′8″ denn
∠ y = 55°.0′	Sn : CD = Sm : GC (§. 38.)	
∠ m = 94. 0 u. ſein benachbarter 86°. folgl. auch		
∠ n = 31. 0		

5) Und im △ BCE iſt

Gegeben	und hier	zu finden
EC = 2°8 0″		BC = 6°2′9″ weil
∠ x = 57°. 50′.	Sp : CE = So : BC (§. 38.)	
∠ o = 95°. 55′ und ſein Nachbar 84°. 5′.		
u. ∠ p = 26. 15.		

6) Weil alſo im △ BCG; CG, BC und der Winkel u gegeben ſind, ſo läßt ſich BG nach (§. 53.) leicht finden. Es iſt 6°8′0″9‴

§. 58. Anmerkung.

Die im Meſſen mögliche Fehler, ſo viel man kann, zu vermeiden und ihre Folgen zu beurtheilen, gab (§. 47. 48. 52. 54. und 55.) die erſte Gründe an. Mehr ſagen hievon: Böhms Meßkunſt, Scherfers Abhandlung von der Wahl eines Standorts bey trigonometriſchen Meſſungen, Wien 1766. 8vo. Wilkens Landvermeſſung, für Anfänger. Wer dieſe verſteht und Kräffte genug hat, ſehr weit zu gehen, ſehe Lamberts Beyträge zum Gebrauch der Mathematick erſter Theil 1. Mayers praktiſche Geometrie.

§. 59. Tr. T. I. F. 6.

Den Innhalt eines Segments ADBF, durch bloſe Berechnung zu finden.

Auflöſung.

1) Man ſuche aus AB und DF die Linie EF (G. §. 88. Z. 1.) nun iſt $\frac{DF+EF}{2} = DC = AC$ und $AF = \frac{AB}{2}$ auch $CF = CD - DF$.

2) Daher findet man im △ACF den ∠o (§. 34.)

3) Allein o×2 = o+x oder dem Secktorswinkel, woraus der Secktor ACBD und der Sehnen △ ABC, folglich auch das Segment ADBF leicht zu finden (G. §. 144.)

§. 60. Tr. T. II. F. 19.

Ein geradlinichter Transporteur iſt ein Maasſtab, deſſen Theile das nemliche Verhältnuß gegen den Radius B = 60° haben, wie die Sehnen derer mit dieſem Radius beſchriebenen Bögen. Seine Zeichnung beruhet auf folgenden Regeln.

1) Man ſchreibe aus den Tabulis ſin. natur. die Sinuſſe der Bögen 2°, 30′. 5°. 7°, 30′. 10° ꝛc. ꝛc. kurz die in einer arithmetiſchen Progreſſion fortlaufen, deren Differenz 2°, 30′. iſt, aus, und multiplicire jeden mit 2, ſo ſind die Producte die Sehnen der Bögen von 5°. 10°. 15° ꝛc. ꝛc. (§. 6.) nach folgender Tabelle.

Grade	Sinuſſe od. halbeSehn.	Ganze Sehnen.	Grade	Sinuſſe od. halbeSehn.	Ganze Sehnen
		° ′ ″			° ′ ″
5	43. 6	87	50	422. 6	845
10	87. 1	174	55	461. 7	923
15	130. 5	261	60	500. 0	1000
20	173. 6	347	65	537. 2	1074
25	216. 4	433	70	573. 5	1147
30	258. 8	517	75	608. 7	1217
35	300. 7	601	80	642. 7	1285
40	342. 0	684	85	675. 5	1351
45	382. 6	765	90	707. 1	1414

2) Zieht eine gerade Linie AD und auf dieſe die Perpendikulare AB. Letztere kann, nach Belieben, in 5, 10, 20 ꝛc. ꝛc. Theile getheilet werden, je nachdem man die Sehnen von ganzen, halben, Viertelsgraden oder (wie hier) von einzelnen Minuten verlangt.

3) Durch alle Theilungspunkte von AB, ziehe man, mit AD Parallelen.

4) Trage nach dem beyſtehenden in ſehr kleine Theile getheilten verjüngten Maasſtab, auf AD, von A aus, die ganze Sehnen von 5°. 15°. 25°. 35° ꝛc. ꝛc. und eben ſo auf BC, die Sehnen von 10°. 20°. 30° ꝛc. ꝛc. aus der Tabelle Nro. 1. Will man ſich die Mühe, einen ſehr kleinen verjüngten Maasſtab zu machen, erſpahren, ſo darf man nur, ſtatt der ganzen die halben Sehnen auftra-

gen, welches eben ſo viel iſt, als wenn die Theile des verjüngten Maasſtabs halbirt würden. Hier muß aber, die durch ein Punkt von den übrigen abgeſonderte Ziffer weggelaſſen, oder wenn ſie > 5 iſt, zu der letzten der beybehaltenen, 1 addirt werden. Sie ſteht hier immer dabey, um zu zeigen, wie die ganze Sehnen aus den halben gefunden wurden.

5) Man ziehe aus B nach 5, von 5 nach 10, von 10 bis 15 ꝛc. ꝛc. gerade Linien. So ſind A 5, B 10, A 15 ꝛc. ꝛc. die Sehnen von 5°. 10°. 15°. und da die Sehnen, von 5 zu 5 Graden, beynahe im nemlichen Verhältnuß, wie ihre Bögen wachſen, ſo iſt c 1 Sehne von 1°, d 2 Sehne von 2° ꝛc. ꝛc. (G. §. 68.)

Anmerkung.

In der Tabelle Nro. 1. wurden die Sinuſſe nur in 100000tel des Radius ausgeſchrieben, immer die 3 letzte Ziffern weggelaſſen, da man nicht einmal von allen dieſen auf dem verjüngten Maasſtab Gebrauch machen konnte.

Zuſätze.

1) Die Sehne von 60° iſt = R (G. §. 108.) Um einen ∠ zu meſſen, darf man daher nur mit dem Radius B 60°, aus ſeiner Spitze, einen Bogen zwiſchen ſeinen Schenkeln beſchreiben, und deſſen Sehne auf dem geradlinichten Transporteur meſſen. Trifft dieſe z. E. auf die Linie 2 k ſo iſt der Winkel = 42°. ꝛc. ꝛc.

2) Eben ſo leicht wird ein Winkel von einer beſtimmten Gröſſe beſchrieben. Tr. T. II. F. 21. Man

zieht mit dem R, B 60° aus der Spitze B, den Bogen CF, nimmt vom Transporteur die Sehne des verlangten Winkels z. E. 25°, trägt ſie aus C nach D u. zieht die Linie BD, ſo iſt der $\angle x = 25°$.

3) Wird AB groß genug gemacht und in 30 Theile getheilt Fig. 19. ſo laſſen ſich die Winkel bis auf 10 Minuten genau meſſen; 60 Theile geben ſie von 5′ zu 5′; 300 Theile von Minute zu Minute.

§. 61. Tr. T. III. Fig. H.

Regulare Vielecke trigonometriſch in einen Cirkel zu beſchreiben.

Auflöſung.

Geſetzt man verlangt ein regulares Dreyeck ABD, ſo iſt, weil AB = BD = AD der $\angle A = \angle B = \angle D = 60°$ (G. §. 48.) folglich jede Seite = der Sehne von $\frac{P}{3}$, alſo α AD = 120°. Nun ziehe man die Radios DG und AG, ſo iſt (x+y) = 120° und wenn AD halbirt, auch aus G die Linie GEC gezogen wird, ſo iſt x = y = 60° (G. §. 78.) Es iſt aber AE = $\frac{AD}{2}$ = Sy (§. 6.) folglich AD, oder die Seite des regularen, in den Cirkel zu beſchreibenden $\triangle$ = S 60° × 2. Man ſetze AD = der Seite, des, in den nemlichen Cirkel zu beſchreibenden Vierecks, ſo wird α AD = $\frac{P}{4}$ = 90°, daher hier x + y = 90°, AE = Sy = S 45° und AD = S 45° × 2. Wär' AD Seite des regularen Fünfecks, ſo iſt α AD = 72° = $\frac{P}{5}$, folglich x + y = 72° und AE = Sy = S 36°, daher AD = S 36° × 2. Setzt man dieſe

Induction fort, die Zahl der Vielecksſeiten = n, die Seite ſelbſt = x; ſo giebt ſich folgende allgemeine Formel, für die Erfindung der Seiten in jedem regularen Vieleck; $x = S\frac{p}{2n} \times 2 = 2S\frac{p}{2n}$.

Wenn man daher auch hier, wie (§. 60. Anmerk.) den R nur in 10000tel annimmt, ſo enthält folgende Tabelle, die ſchon berechnete Vielecksſeiten, vom 3—20 Eck. Sollte aber, wie es leicht, z. E. in der Mechanik, geſchehen kann, ein Vieleck von mehr Seiten verlangt werden, ſo läßt ſich ſeine Seite durch die angegebene Formel bequem finden.

Zahl der Seiten des Vielecks.	Gröſſe einer Seite in 10000tel des Radius.
3 = $2S\frac{p}{6}$ —	17320
4 = $2S\frac{p}{8}$ —	14142
5 = $2S\frac{p}{10}$ ꝛc. ꝛc.	11755
6 — — —	10000
7 — — —	8677
8 — — —	7653
9 — — —	6840
10 — — —	6180
11 — — —	5634
12 — — —	5176
13 — — —	4786
14 — — —	4447
15 — — —	4158
16 — — —	3901
17 — — —	3673
18 — — —	3472
19 — — —	3289
20 = $2S\frac{p}{40}$ —	3128

Zuſätze.

1) Dieſe Tabelle iſt für alle mögliche Cirkel brauchbar (§. 26.) und durch ſie, laſſen ſich nun, die Seiten aller dieſer Vielecke, auch in °. ′. ″. ꝛc. finden. Z. E. des Achtecks. Es ſeye im Cirkel $R = 2°0'5''$ ſo ſpricht man nach (A. §. 220.) aus der Tabelle; $10000 : 7653 = 2°0'5'' :$ $1°5'6'' \frac{8865}{10000}$ = der Seite des im gegebenen Cirkel möglichen regularen 8 Ecks. Dieſe nimmt man auf dem nemlichen verjüngten Maasſtab, womit R gemeſſen wurde und trägt ſie nach (G. §. 106.) in der Peripherie herum.

2) Da $R : 2S\frac{p}{2n} = r : x$ ſo iſt auch (A. §. 217.)

$2S\frac{p}{2n} : R = x : r$ oder in der vorigen Aufgabe

$7653 : 10000 = 1°5'6'' \frac{8865}{10000} : 2°0'5''$

Man kann daher die Tabelle eben ſo bequem gebrauchen, wenn auf eine gegebene Seite ein regulares Vieleck beſchrieben, folglich R dazu gefunden werden ſoll (G. §. 110.) Man beſchreibt mit dem gefundenen R einen Cirkel und trägt die gegebene Seite darinnen herum (G. §. cit.)

3) Auf dieſen Gründen beruht die zwote Auflöſung, des (§. 90. M. G.) Jeder ſieht die groſſe Vorzüge dieſer Methode, für der gewöhnlich geometriſch-mechaniſchen.

§. 62. Tr. T. II. F. 25.

Es ſeye, in einem regularen Vieleck, AC oder der Vielecks-Radius = a, der Centriwinkel = u, ſeine unbekannte Seite AB = x, ſo iſt $x = \frac{2aS\frac{u}{2}}{r}$.

Beweiß.

$AC : AF = ST : S\frac{u}{2}$ (§. 32. Z. 4.)

folglich auch $ST : S\frac{u}{2} = AC : AF$ (Ar. § 217.)

$$r : S\tfrac{u}{2} = a : \tfrac{x}{2} \text{ daher}$$

$$\frac{aS\frac{u}{2}}{r} = \frac{x}{2} \text{ und } (\times 2)$$

$$\frac{2aS\frac{u}{2}}{r} = x.$$

Zuſätze.

1) Alſo iſt auch, wen a und x bekannt wären, $S\frac{u}{2} = \frac{rx}{2a}$, folglich darf man nur $\frac{u}{2}$ verdoppeln, um den Centri ∠ u zu erhalten.

2) Wär' aber ∠ u und die Polygonſeite x gegeben, ſo wäre $\frac{2aS\frac{u}{2}}{r} = x$ oder $2aS\frac{u}{2} = rx$ oder $a = \frac{rx}{2S\frac{u}{2}}$ = dem Radius AC.

3) Wenn nach (Z. 1.) der Centriwinkel u gefunden iſt, ſo läßt ſich, aus ihm und n, leicht der Polygonwinkel finden (G. §. 104.)

§. 63. Tr. T. II. F. 25.

Wenn die Benennung (§. 62.) bleibt, und a, x auch $\angle$ u gegeben wird, ferner CF oder die Höhe des Polygon $\triangle$ ABC $=$ e, ſo iſt e $= \frac{\frac{x}{2} \times Cos.\frac{u}{2}}{S\frac{u}{2}}$

Beweiß.

AC iſt $=$ R, daher AF $= S\frac{u}{2}$ und CF $= Cos.\frac{u}{2}$ folglich $S\frac{u}{2} : Cos.\frac{u}{2} = \frac{x}{2} : c$

$$\frac{Cos.\frac{u}{2} \times \frac{x}{2}}{S\frac{u}{2}} = c$$ od. auch weil AC$=$R

$$R : Cos.\frac{u}{2} = a : c$$

$$\frac{a \times Cos.\frac{u}{2}}{R} = c$$

Dieſe letzte Formel iſt bequemer und ich werde ſie im folgenden, mehr als die erſte gebrauchen.

§. 64. Tr. T. II. Fig. 25.

Der Flächen-Innhalt des Polygon $\triangle$ABC iſt$=\frac{a^2 \times Sv}{2r}$.

Beweiß.

CF $= \frac{a \times Cos.\frac{u}{2}}{r}$ (§. 63.) AB $= \frac{2a \times S^u}{r}$ (§. 62.) folgl.

$\triangle$ ABC $= \frac{2a^2 \times Cos.\frac{u}{2} \times S\frac{u}{2}}{2r^2}$. Weil aber x : a$=$Su : Cos. $\frac{u}{2}$ ſo iſt

$$\frac{2a\times S\frac{u}{2}}{r} = \frac{a\times Su}{Cos.\frac{u}{2}} \quad (\text{§. 62.}) \text{ und } (:a)$$

$$\frac{2S\frac{u}{2}}{r} = \frac{Su}{Cos.\frac{u}{2}} \quad (\times Cos.\frac{u}{2})$$

$$\frac{2S\frac{u}{2}\times Cos.\frac{u}{2}}{r} = Su \text{ und } (:2)$$

$$\frac{Cos.\frac{u}{2}\times S\frac{u}{2}}{r} = S\frac{u}{2} \text{ daher auch}$$

$$\frac{2a^2\times Cos.\frac{u}{2}\times S\frac{u}{2}}{2r\times r} = \frac{2a^2\times S\frac{u}{2}}{2r} = \frac{a^2\times S\frac{u}{2}}{r} = \frac{a^2\times Su}{2r}$$

§. 65. Tr. T. II. F. 25.

Der Innhalt eines regularen Vielecks iſt $= \frac{(a^2\times Su)n}{2r}$

Beweiß.

Es ſeye die Zahl ſeiner Seiten = n ſo iſt ſein Innhalt = △ABC × n (G. §. 145. Nro. 5.)
aber auch || §. 64. folglich das

---

reg. Vieleck $= \frac{(a^2\times Su)\,n}{2r}$.

§. 66.

Zweyerley, im nemlichen Cirkel, beſchriebene Vielecke, verhalten ſich, dem Flächen-Innhalt nach, zu einander, wie die Anzahl ihrer Seiten multiplicirt mit dem S des Centri-Winkels.

Beweiß.

In beyden iſt a gleich, die Zahl der Seiten ſeye = n und N, der Centriwinkel von n Seiten = u,

der Centriwinkel von N Seiten = U, der Flächen-Innhalt des erſtern = q, des andern = Q; ſo iſt

$$q : Q = \frac{(a^2 \times Su)n}{2r} : \frac{(a^2 \times SU)N}{2r} \quad (\times 2r)$$

$$q : Q = (a^2 \times Su)n : (a^2 \times SU)N \quad (: a^2)$$

$$q : Q = n \times Su : N \times SU$$

Zuſatz.

Folglich verhalten ſich zwey, in den nemlichen Cirkel, beſchriebene regulare Vielecke, in welchen N = 2n wie Cos. U : r d. i. in dieſem Fall:

$q : Q = \text{Cos. } U : r.$ Dann

$q : Q = n \times Su : N \times SU$ Da aber p. hyp. ||

$q : Q = nSu : 2nSU$ (und : n

$q : Q = Su : 2SU$ auch p. hyp. ||

$q : Q = Su : 2S\frac{u}{2}$ weil aber nach §. 64. || ſo iſt auch

$$q : Q = \frac{2\text{Cos.}\frac{u}{2} \times S\frac{u}{2}}{r} : 2S\frac{u}{2} \text{ und } \times r$$

$$q : Q = 2\text{Cos.}\frac{u}{2} \times S\frac{u}{2} : r \times 2S\frac{u}{2} \text{ und } : 2S\frac{u}{2}$$

$q : Q = \text{Cos.}\frac{u}{2} : r$ das iſt weil $\frac{u}{2} = U$

$q : Q = \text{Cos. } U : r$

§. 67.

Der Diameter eines Cirkels verhält ſich zu ſeiner Peripherie beynahe wie 100 : 314.

Beweiß.

Je mehr Seiten ein in einen Cirkel beſchriebenes regulares Vieleck hat, deſto näher kommt die Summe ſeiner Seiten der Peripherie des Cirkels. Es ſeye dieſe Anzahl der Seiten des Vielecks = 21600 = der Anzahl der Minuten von p (G. §. 33.) ſo iſt hier a = r = 10000000 und u = 1′ folglich da x oder die Seite dieſes Polygons $= \frac{2aS\frac{u}{2}}{r}$ (§. 62.) ſo iſt auch $x = \frac{2r \times S\frac{u}{2}}{r} = 2S\frac{u}{2}$ das iſt hier 2 S 30″. Nun iſt S 30″ = $1454\frac{1}{2}$ (§. 20.) folglich x = $1454\frac{1}{2} \times 2 = 2909$. Es war aber auch n = 21600, daher nx = p = 21600 × 2909 = 62834400 und weil r = 10000000, ſo iſt d = 20000000 (G. §. 21. Nro. 5.) folglich

d : p = 20000000 : 62834600 (: 100000

d : p = 200 : $628\frac{34600}{100000}$ oder

d : p = 200 : $628\frac{173}{500}$ und : 2

d : p = 100 : $314\frac{173}{1000}$.

Zuſatz.

Da d : p = 20000000 : 62834600 (: 100

ſo iſt auch d : p = 200000 : 628246 und : 2

d : p = 100000 : 314173.

Wodurch nun (G. §. 120.) einen kürzern Beweiß erhält. Daß aber auch diß Verhältnuß nur beynahe

richtig iſt, erhellt aus der Vorausſetzung, daß $x = \frac{p}{21600}$, folglich $nx = p$, welches nur beynahe, doch ſo wahr iſt, daß, ſchon in ſehr groſſen Cirkeln, der Fehler, welcher nur $\frac{173}{1000}$ eines 10 Millionſtel beträgt, unbeträchtlich wird.

§. 68. Tr. T. II. F. 22. u. 23.

Den Innhalt eines jeden △ ABC durch Hülfe der Trigonometrie zu finden.

Auflöſung.

Ich ſetze, wie natürlich, voraus, daß alles nach dem VIten Abſchnitt Nothwendige, zur Erfindung der Seiten AC, AB und des ∠ x gegeben und dieſe wirklich gefunden worden ſeyen. Nun ſeye AC = a, AB = b und BD = u, ſo iſt im ◺ ABD (weil BD als Höhe des △ ABC gefunden werden muß (G. §. 145. Nro. 2.) wenn AB als R angenommen wird

$R : Sx = b : u$ daher (A. §. 220.)

$\frac{b \times Sx}{R} = u$ und $\frac{u}{2} = \frac{b \times Sx}{2R}$ Allein da △ ABC $= a \times \frac{u}{2}$ (G. §. 145.) ſo iſt auch △ ABC $= \frac{a \times b \times Sx}{2R}$.

Zuſätze.

1) Daß und wie in allen vom §. 61. an vorgetragenen Sätzen und Aufgaben, die logarithmiſche

Berechnungen ſtatt der gewöhnlichen gebraucht werden, iſt aus dem Vorhergehenden klar, welches hier ein für allemal erinnert wird.

2) Da Tr. T. II. Fig. 24. in jedem Parallelogramm AF, der △ ABC = △ BCF (G. §. 95.) ſo iſt auch jedes Parallelogramm = $\frac{2 \times a \times b \times Sx}{2R}$ oder $\frac{a \times b \times Sx}{R}$ folglich wenn AB, AC u. ∠ x gegeben ſind, ſein Innhalt leicht zu finden.

§. 69. Geom. T. IV. Fig. 84.

Den Innhalt eines jeden irregularen Vielecks ABCDE zu finden.

Aufloſung.

Erſter Fall. Sind alle Seiten und Winkel gegeben, ſo ſucht man im △ ABF, die Seite BF (§. 40.) im △ CDF, CF (§. cit.) hieraus den Innhalt der △ △ ABF und CDF (§. 68.) wie auch des △ BCF (§. 68. und 43.) welche nach (G. §. 131.) addirt werden.

Zweyter Fall. Wäre nur AF, AB, DF, CD und die Winkel x, u und y gegeben, ſo finden ſich BF und CF nach (I.) BC nach (§. 40.) das Uebrige alles nach (I.)

§. 70. Tr. T. I. F. 27.

Eine Topographie iſt ein Plan von einer ganzen Gegend (G. §. 115.) Dieſe genau zu verfertigen iſt

die Trigonometrie unentbehrlich, da die hiezu nöthige Linien ſchon ſehr groß, folglich im Meſſen, wenn alles geometriſch behandelt würde, ſehr beſchwerlich, und die Erfindung der unbekannten Seiten, durch Zeichnen gewaltig unrichtig werden (§. 1.) und (G. §. 115. f.) Das Allgemeine von Verfertigung derſelbigen, ſo weit die reine Mathematik allein kommen kann, beruht auf folgenden Regeln:

1) Man wähle ſich, wo möglich, innerhalb der gegebenen Gegend, eine Standlinie GH, von deren beyden Endpunkten G und H man nach allen merkwürdigen Punkten, A, B, C, D, E, F, welche man im Plan bemerken will, viſiren kann. Mache aber GH groß genug, damit die zu meſſende ∠ weder zu ſtumpf, noch zu ſpitzig werden (§. 52. bis 59.)

2) Man meſſe dieſe Standlinie aufs genaueſte (G. §. 37.) und viſire ſowohl aus G als H nach allen merkwürdigen Punkten der Gegend (Nro. 1.) um die Winkel x. y. z. q. p. n. m. u. o. r. s. t zu erhalten, bey deren Meſſung der gröſte Fleiß anzuwenden, damit man ſie aufs pünktlichſte in Graden, Minuten und Secunden bekomme.

3) Nun finde man im △ BGH, die Seiten BG und BH; im △GCH, GC und CH, ferner GD und DH, EH und EG; FH und GF; AH und AG (§. 38.)

4) So laſſen ſich alle dieſe △ △ in Grund legen (S. §. 42—45. und §. 115.) und man erhält den Plan von der Gegend ABCDEF.

Zuſatz.

Da AB, BC, CD ꝛc. ꝛc. gleich groß, nach dem verjüngten Maasſtab, nach dem trigonometriſchen Calcul und im Groſſen ſeyn müſſen, wenn richtig gearbeitet worden iſt, ſo ſuche man ſie nach dem Maasſtab, nach welchem die Zeichnung verfertigt wurde, aber auch nach (§. 43.) und (wenn die Gröſſe es möglich macht) auch im Groſſen. Je genauer ſie, nach dieſer 3fachen Art gefunden, mit einander übereinſtimmen, deſto richtiger iſt der Plan.

Anmerkung.

Kenner wiſſen, daß dieſe Aufgabe eigene Schrifften füllet und beſondere Vorleſungen erfordert, wenn man in die mannigfaltige Umſtände und Schwierigkeiten, welche dabey aufſtoſſen, ſich einlaſſen, ſie gründlich entwickeln will. Die ganze angewandte Mathematick muß dem Geometer zu Hülfe kommen und diß entſchuldigt mich hinreichend, daß ich hier blos das Allgemeine vorgetragen habe, dem Anfänger den Nutzen der Trigonometrie auch hier einleuchtend zu machen. Mündlich ſoll, wenns Zeit und Beſchaffenheit der Zuhörer geſtatten, ſo viel thunlich iſt, davon erläutert werden. Die (§. 58.) angeführte Schrifften werden dem Wißbegierigen herrliche Dienſte leiſten.

Sphäriſche Trigonometrie.

§. 1. Tr. Sph. T. I. Fig. 1.

Ein ſphäriſcher Triangel entſteht, wenn ſich auf, oder in der Oberfläche einer Kugel, drey gröſte Cirkel ABD, ACD und EBCF durchkreutzen, z. E. der △ ABC. Hier ſind die Bögen AC, BC, AB, Seiten, die ∠ ∠ ABC, BCA und CAB Winkel deſſelbigen. Und die Sphäriſche Trigonometrie iſt eine Wiſſenſchaft, aus drey gegebenen Stücken eines ſphäriſchen △, die drey übrige durch bloſſe Berechnung zu finden (Ar. §. 22.)

Anmerkung.

Hier können, die drey gegebene Stücke, Seiten, lauter Winkel, oder Seiten und Winkel ſeyn.

§. 2.

Alles, nach meiner Abſicht, hier Nothwendige, läßt ſich in zween Abſchnitte faſſen:

1) Gründe dieſer Wiſſenſchafft, oder nähere Entwicklung der Kugelſchnitte.

2) Die Haupt-Eigenſchafften der ſphäriſchen Triangel und ihre Berechnung, ſowohl der recht- als ſchiefwinklichten.

Erſter Abſchnitt.

Von den Eigenſchafften der Kugelſchnitte, welche aus zween oder mehrern, vorzüglich gröſſern Cirkeln entſtehen.

§. 3.

Was Kugelſchnitte und daß ſie immer Cirkel ſind, welche gröſte Cirkel heiſſen, daß dieſe die Kugel allezeit halbiren, die Begriffe von der Axe, Diameter und Polen der Kugel, wie die Kugelſchnitte wachſen, abnehmen und endlich Null werden, lehrt' uns ſchon (G. §. 195.) Die folgende §§. werden ihre Eigenſchafften genauer entwickeln und beweiſſen.

§. 4. Tr. Sph. T. I. F. 2.

Wenn eine gerade Linie EF, durch ein in der Kugel liegendes Punkt G, von einem Punkt der Oberfläche F, auf ein anderes Punkt derſelben E gezogen wird, ſo ſchneidet ſie die Kugel nur in dieſen beyden Punkten F und E, nicht in mehrern.

Beweiß.

1) Mehr als in einem, denn ſie muß, von G aus, nach einer, dem Punkt F entgegengeſetzten Lage, aus der Kugel herauskommen.

2) Aber auch nur in zween, E und F. Denn man lege durch F, E und das Centrum der Kugel C, die Ebene CEF. Dieſe wird hierdurch beſtimmt (G. §. 166. Z. 1.) Und wenn man ſie durch die ganze Kugel vergröſſert, ſo entſteht eine Cirkelfläche (G. §. 195.) in welcher EF gewiß liegt. Allein, eine gerade Linie, kann einen Cirkel nur in zwey Punkten ſchneiden. Denn wenn EF noch durch ein drittes von E verſchiedenes Punkt J oder H gienge, ſo wär EF nicht mehr eine

gerade, ſondern gebrochene Linie (S. §. 5.) Es wird daher auch EF, das irgendwo auf der Kugel liegende Punkt H nicht berühren, folglich die Kugel nur in F und E ſchneiden.

Zuſatz.

Zween Cirkel BJFK und EGFL, ſie ſeyen nun größte Cirkel oder nicht, die ſich auf der Oberfläche einer Kugel ſchneiden, geben nur zwey Durchſchnittspunkte E und F. Denn alle in BJFK mögliche Linien liegen in ſeiner Ebene, und alle in EGFL mögliche in der Ebene EGFL. Daher befinden ſich auch die Durchſchnittspunkte E und F zugleich in dieſen beyden Ebenen (S. §. 168.) Folglich auch EF, welche gewiß durch die Kugel geht, ſie aber nur in zwey Punkten ſchneidet. Nun ſind die Durchſchnitte von dieſen beyden Ebenen Cirkel (S. §. 195.) EF geht durch beyde und kann, als gerade Linie den Cirkel nur in zwey Punkten ſchneiden. EF muß alſo auch durch die Durchſchnittspunkte der beyden Cirkel BJFK und EGFL gehen, und dieſe werden ſich nur in zwey Punkten E und F durchkreutzen.

§. 5. Geom. T. VI. Fig. 126.

Wenn aus dem Centrum einer Kugel C, auf einen kleinen Durchſchnittscirkel AEFD ein Perpendickel BC gezogen wird, ſo geht es durch B, das Centrum dieſes Cirkels, und umgekehrt: Wenn aus dem Centrum

B eines kleinern Cirkels, ein Perpendickel, gegen den grössern Abſchnitt der Kugel aufgerichtet wird, ſo muß es durchs Centrum der Kugel C gehen.

Beweiß.

1) Da AB = BD = BE (G. §. 195. Z. 4.) ſo iſt auch B Centrum von AEFD (G. §. 21. 3.)

2) Man richte in B, die ſenkrechte Linie BC auf, und verlängere ſie, nach der obigen Bedingung, ſo ſtößt ſie gewiß, auf irgend einen Punkt der Ebene eines größten Durchſchnitts-Cirkels der Kugel GHJK, z. E. hier in C. Nun ſind ABC, BCD und BEC (p. hyp.) rechtwinklichte und überdiß gleiche △ △. Denn es iſt

AB = BD	und	BD = BE	(G. §. 21.)	
BC = BC		BC = BC	(A. §. 61.)	
∟ABC = ∟DBC		∟DBC = ∟EBC	folgl. iſt	
◺ABC = ◺BCD	und	◺BCD = ◺BEC,	daher	
AC = CD		= CE.		

Diß ſind aber Radii der Kugel (G. §. 195. Z. 1.) folglich auch C ihr Centrum.

§. 6. Tr. Sph. T. I. F. 3.

Zween größte Cirkel durchſchneiden ſich immer in zwey Punkten; Einer halbirt den andern; und wenn zween, ſich in zwey Punkten durchſchneidende Cirkel, einander halbiren, ſo ſinds beyde größte Cirkel.

Beweiß.

1) AB und ED, die Durchſchnitts-Ebenen der beyden größten Cirkel, gehen beyde durchs Centrum

der Kugel C (G. §. 195. Z. 5.) und können ſich nur in einer, ihnen beyden gemeinſchafftlichen Linie, durchkreutzen (G. §. 168.) in welcher auch das Centrum der Kugel liegen muß. Weil nun ihre beyderſeitige Durchſchnitts-Ebenen, durch einen Kugel-Diameter gehen, ſo müſſen ſie ſich nothwendig, und zwar nur in zwey Punkten (§. 4. 3.) ſchneiden.

2) GF, die gemeinſchafftliche Durchſchnittslinie, der beyden Cirkel AB und ED, iſt ein Kugeldiameter, aber zugleich Diameter von AB und DE (G. §. 195. Z. 5.) Allein jeder Diameter halbirt ſeinen Cirkel (G. §. 79.) Daher müſſen ſich auch die beyde größte Cirkel AB und DE halbiren.

3) Wenn ſich die Cirkel AB und DE halbiren, ſo muß GF, ihr gemeinſchafftlicher Durchſchnitt, durch das, beyden und der Kugel gemeinſchafftliche Centrum C, gehen; beyde werden alſo größte Cirkel ſeyn (G. §. cit.) Denn hätten ſie und die Kugel verſchiedene Centra, ſo könnte aus dem Centrum der Kugel, auf das gemeinſchafftliche Centrum beyder Cirkel, eine, auf dieſen beyden Cirkelflächen, ſenkrecht ſtehende Linie gezogen werden (§. 5.) Diß iſt aber nur bey parallel liegenden, nicht bey ſich ſchneidenden Ebenen möglich (G. §. 180.)

Zuſatz.

Zween Cirkel, welche ſich auf einer Kugel zwar ſchneiden, aber nicht halbiren, können unmöglich

beyde gröſste Cirkel ſeyn; und wenn ſie ſich ſchneiden, aber nicht beyde gröſste Cirkel ſind, ſo können ſie einander nicht halbiren. Der gröſſere kann zwar den kleinern halbiren, er ſelbſt aber wird deswegen nicht vom kleinern halbirt.

§. 7. Tr. Sph. T. I. F. 4.

Es ſeye AB ein willkürlich auf der Kugel beſchriebener Cirkel und CE ſtehe, auf dem Centrum E ſeiner Ebene ſenkrecht. Man verlängere CE beyderſeits, bis ſie die Kugelfläche in C und D erreichet, ſo iſt ſowohl C als D, aller Orten gleichweit von der Peripherie des Cirkels AB entfernt.

Beweiſs.

Durch AB läſst ſich eine Ebene legen, in ihr aus E, ein Cirkel mit EF = EG = EB = AE, beſchreiben, und aus E, ſowohl die ſenkrechte Linie CE als DE aufrichten. In dieſen ſind aber gewiſs, alle Punkte, gleichweit von der Peripherie des Cirkels AB entfernt (S. §. 174.)

Zuſatz.

Wenn ein, auf der Kugel angenommenes Punkt C, aller Orten, gleichweit, von der auf der Kugel beſchriebenen Peripherie AB entfernt iſt, ſo wird auch die, aus demſelben, auf die Cirkelfläche AB gezogene ſenkrechte Linie CE, gewiſs durch C, das Centrum dieſes Cirkels, gehen; denn es iſt

$$CF = CG$$
$$\llcorner CEF = \llcorner CEG \quad \text{(p. hyp.)}$$
$$CE = CE$$ folglich

$\triangle CEF = \triangle CEG$ (G. §. 42. Z. 3.) Daher auch EF = GE und E Centrum des Cirkels AB (G. §. 21. 3.) Für das Punkt D ſchließt man auf eine ähnliche Art.

§. 8. Tr. Sph. T. I. F. 4.

Die Punkte C und D, welche auf der Kugelfläche, in dem durchs Centrum des Cirkels AB gezogenen Perpendickel liegen, heiſſen die Pole des Cirkels AB, und die von Pol zu Pol gezogene Linie CD, Axe des Cirkels AB.

Zuſätze.

1) Aus E, iſt, gegen C und D, nur eine ſenkrechte Linie möglich (G. §. 170. Z. 4.) und CD kann die Kugel nur in zwey Punkten ſchneiden (§. 4.) Daher hat jeder Durchſchnittscirkel der Kugel nur zween Pole.

2) Dieſe ſind einander entgegen geſetzt.

3) Die Axe des Durchſchnittscirkels geht durch E das Centrum deſſelbigen, aber auch durchs Centrum der Kugel H (§. 5.)

§. 9. Tr. Sph. T. I. F. 5.

Ein jeder auf der Kugel beſchriebener Cirkel ACBD der durch die Pole B, und A eines andern Cirkels CEDF geht,

1) Steht auf dem letztern ſenkrecht,
2) Theilt ihn in zwey gleiche Theile CFD = CED,
3) Iſt ein gröſter Cirkel der Kugel,
4) Seine Bogen BD und BC, AD und AC, zwiſchen einem ſeiner Pole und dem Cirkel CEFD, ſind einander gleich, und umgekehrt.

Beweiß.

a. 1) Die Ebene des Cirkels ACBD geht durch AB, die Axe des Cirkels CEDF (§. 8.) AB ſteht auf CEDF ſenkrecht (§. cit.) folglich auch die Ebene ADBC (G. §. 178.) D. i. der ganze Cirkel ADBC, wird auf dem ganzen Cirkel CEDF ſenkrecht ſtehen.

2) ADBC geht durch AB die Axe von CEDF (1.) folglich durch ſein Centrum G (§. 8. Z. 3.) Daher wird auch CD, als gemeinſchafftlicher Durchſchnitt von ADBC und CEDF durch G gehen, d. i. ſie geht durch den Diameter des Cirkels CEDF, daher iſt auch CED = CFD.

3) ACDB geht durch A und B, die Pole von CEDF (p. hyp.) folglich geht auch ſeine Ebene durchs Centrum der Kugel H (§. 8. Z. 3.) ACDB iſt alſo ein gröſter Cirkel der Kugel (G. §. 195. Z. 5.)

4) Da BG = BG
CG = DG (G. §. 21. 3.)
∟BGC = ∟BGD (Nro. 1.) ſo iſt

△BCG = △BGD (G. §. 42.) folglich

BC = BD und (G. §. 76.) αBC = αBD.

Und weil, aus den nemlichen Gründen △ AGC = △ AGD, ſo iſt auch α AC = α AD.

b) Nun ſoll umgekehrt ein größter Cirkel

1) ADBC auf CEDF ſenkrecht ſtehen, ſo wird auch ADBC durch die Pole von B und A von CEDF gehen und denſelben halbiren. Denn als größter Cirkel geht er durchs Centrum der Kugel H (§. 8. Z. 3.) und da er ſenkrecht auf dem andern ſteht, auch durch deſſen Axe AB (§. cit.) folglich auch durch A und B als die Pole von CEDF (§. 8.) und halbirt denſelben nach (a. Nro. 2.)

2) Wenn ein größter Cirkel ADBC einen andern Cirkel CEDF halbirt, ſo ſteht er auf demſelben ſenkrecht, und wenn er nicht ſenkrecht auf ihm ſteht, ſo kann er ihn auch nicht halbiren. Denn er wird durch G das Centrum von CEDF, aber auch durch H das Centrum der Kugel, folglich durch die Axe AB, und die Pole A und B gehen (a. Nro. 2. 3.) Er muß alſo auch ſenkrecht auf CEDF ſtehen (a. Nro. 1.) und wenn er daher nicht ſenkrecht darauf ſtünde, ſo könnte er ihn auch nicht halbiren.

§. 10. Tr. Sph. T. I. F. 6.

Wenn zween größte Cirkel ſenkrecht auf einander ſtehen, ſo geht jeder durch des andern Axe und Pole, und umgekehrt.

Beweiß.

1) Die beyde größte Cirkel AEBD und DGEF halbiren einander (§. 6.) Folglich iſt die Durchſchnitts-

linie DE Diameter von DEFG. Nun liegt die Ebene des Cirkels AEBD in DE und dem Centrum der Kugel C. Dieſer ſteht ſenkrecht auf DGEF (p. hyp.) ſo wie AB die Axe des letztern, in welcher die Pole des erſtern A und B liegen. AEBD muß daher durch die Axe AB und die Pole A und B von DGEF gehen. Man ziehe GF ſenkrecht durch das Centrum des Cirkels AEBD, ſo iſt ſie Axe deſſelbigen, G und F aber ſeine Pole. Daher iſt der vorige Beweiß, auch hier vollkommen anwendbar, und es geht DGEF durch GF, G und F.

2) Wenn zween größte Cirkel jeder durch die Pole des andern geht, ſo ſtehen ſie ſenkrecht auf einander. Denn die Bögen DAE, BDE, DFE und DGE ſind einander gleich (§. 6.) AB ſteht auf DGEF ſenkrecht (§. 8. und 7.) A und B ſind Pole von DGEF, und durch ſie ſowohl, als durchs Centrum der Kugel C, geht der größte Cirkel AEBD (p. hyp.) Folglich liegt ſeine ganze Ebene in AB; und da dieſe auf DGEF ſenkrecht ſteht, ſo ſteht auch der in ihr liegende Cirkel AEBD auf dem andern ſenkrecht (G. §. 178.)

§. 11. Tr. Sph. T. I. F. 6.

Wenn zween größte Cirkel ſenkrecht auf einander ſtehen, ſo ſind alle Bogen eines größten Cirkels, welche zwiſchen einem andern größten Cirkel und ſeinem Pol liegen, Quadranten. Oder es ſind die Bögen: AD,

AE, BE, DB, DG, DF, EF und EG einander gleich; und wenn jeder Cirkel durch den Pol des andern geht, ſo iſt auch, der zwiſchen dem Pol und Cirkel liegende Bogen ein Quadrant.

Beweiß.

1) DE iſt gemeinſchafftlicher Durchſchnitt und Diameter beyder Cirkel AEBD und DGEF; AB, Axe vom letztern und Diameter vom erſtern, ſteht auf DE ſenkrecht, da (p. hyp.) beyde, Axen, der beyden ſenkrecht auf einander ſtehenden Cirkel ſind. Folglich ſind die rechte Winkel ACD, ACE, ECB und BCD einander gleich (G. §. 27.) aber auch die Bogen AD, AE, BE und BD und jeder = 90°. Aus den nemlichen Gründen fließt die Gleichheit der Bogen DG, DF, EF und EG. Und da alle achte, Quadranten größter Cirkel, auf einerley Kugel ſind, ſo müſſen auch alle gleich ſeyn.

2) AEDB geht durch die Pole von DGEF (p. hyp.) daher ſtehen ſie ſenkrecht auf einander (§. 10. Nro. 2.) Folglich auch AB auf DE ſenkrecht (Nro. 1.) und ∟ACD = ∟ACE ꝛc. ꝛc. und nothwendig α AD = α AE ꝛc. ꝛc. = 90°.

Zuſätze. Tr. Sph. T. I. F. 7. a.

1) Es mögen ſich ſo viel größte Cirkel, als man will, in den Polen A und B, eines andern größten Cirkels DFEG ſchneiden, ſo wird der letztere, doch allezeit, durch die Pole der erſtern, D, E,

F, G gehen; oder die Pole der erſtern liegen gewiß alle in der Peripherie des letztern.

2) Alle dieſe größte Cirkel AEBD und AGBF, ſtehen auf dem größten Cirkel DFEG ſenkrecht, und ſchneiden ſich in ſeiner Axe AB, welche zugleich gemeinſchafftlicher Diameter der erſtern iſt. Wenn ſich alſo mehrere größte Cirkel, in einem gemeinſchafftlichen Diameter ſchneiden, ſo geht der größte Cirkel, auf welchem ſie ſenkrecht ſtehen, durch eines jeden Pole.

3) Es ſeyen AH und AF Quadranten zweener größten Cirkel und durch H und F ein neuer größter Cirkel DFEG beſchrieben, ſo ſteht dieſer auf beyden Quadranten ſenkrecht und wird durch ihre Pole gehen. Denn wenn AH und AF ausgezogen würde, ſo entſtünden zween größte Cirkel, welche ſich beyde in AB ſchnitten. Folglich würden ſie auch DEFG in H und F ſenkrecht durchkreutzen und durch ihre Pole gehen (Z. 2.) welche zugleich Pole der Quadranten AH und AF ſind.

4) Die Pole A und B, eines größten Cirkels DEFG werden gefunden, wenn man auf ihn, einen andern größten Cirkel AEBD, in D und E ſenkrecht legt, und die Bogen AE oder AD, ingleichem BE oder BD, vom Durchſchnitt E oder D an $= 90^\circ$ macht (§. 10. und 11.)

§. 12. Tr. Sph. T. I. F. 7. b.

Alle Parallel-Cirkel haben eine gemeinſchafftliche Axe AB, und gemeinſchafftliche Pole A und B.

Beweiß.

Man ziehe aus L, dem Centrum des Cirkels EF, eine ſenkrechte Linie AL, und verlängre ſie in B, ſo ſind: AB Axe, A und B Pole des Cirkels EF (§. 8.) AB geht durchs Centrum der Kugel K (§. cit Nro. 3.) ſteht aber auch, auf den übrigen Parallelcirkeln CD und GH ſenkrecht (G. §. 180. Z. 1.) und geht durch ihre Mittelpunkte K und J (§. 8.) Daher iſt AB ihre gemeinſchafftliche Axe, und A nebſt B ſind ihre gemeinſchafftliche Pole.

§. 13. Tr. Sph. T. I. F. 7. b.

Zween oder mehr Bogen, von Parallelcirkeln, welche, durch zween größte Cirkel, die durch die Pole der erſtern gehen, abgeſchnitten werden, ſind gleich. Z. E. αEN = αCM.

Beweiß.

AB iſt, als gemeinſchafftlicher Durchſchnitt der beyden größten Cirkel, gemeinſchafftliche Axe der Parallelcirkel und ſteht auf ihnen ſenkrecht (§. 12.) Daher ſchneiden auch die Ebenen dieſer größten Cirkel, die Ebenen aller Parallelcirkel ſenkrecht (G. §. 178.) und zwar in den Linien LE, LN, KC, KM, welche nothwendig auf AB ſenkrecht ſtehen und die Winkel ALE, ALN, AKC und AKM ſind jeder = 90°. Folglich ſind auch, ELN und CKM die Neigungswinkel, der beyden Ebenen, der größten Cirkel ACBD und AMBK (G. §. 177.) Nun können zwo Ebenen

nur einerley Neigungswinkel auf einmal haben, folglich iſt auch

$$\begin{array}{c} \angle ELN = \angle CKM \text{ und da} \\ \| \qquad\qquad \| \\ \hline \text{ſo iſt auch } \alpha EN = \alpha CM. \end{array}$$

Zuſätze.

1) Die Bögen EN, CM und GP, können gar wohl, dem Längenmaas nach, verſchieden ſeyn.

2) Um den Neigungswinkel, der beyden größten Cirkel ACBD und AMBK, zu meſſen, iſts, an ſich, gleichviel, welcher von dieſen Bögen gemeſſen wird.

3) Doch wählt man gemeiniglich CM, oder den Bogen des größten Cirkels CMDR, weil ſein Radius, dem Radius der Kugel gleicht und Vortheile in der Rechnung verſchafft.

§. 14. Tr. Sph. T. I. F. 7. b.

Ein ſphäriſcher Winkel EAN oder GBP iſt, deſſen Schenkel Bogen zweener größten Cirkel ſind, oder er iſt die Neigung der beyden Ebenen ACBK und AMBK, welche Stücke von zween größten Cirkeln ſind (G. §. 177.)

Zuſätze.

1) Daher wird ein ſphäriſcher $\angle$ EAN, am bequemſten, durch den Bogen CM gemeſſen, durch deſſen Pole ſeine Schenkel gehen.

2) Sehr oft ſtehen die Bogen AE und AN, vor ſich auf dem dritten größten Cirkel CMDR, nicht

ſenkrecht; indem ſie zuweilen, zwar rechtwinklicht, aber nur von einem kleinern Parallelcirkel EN, oder wohl gar in E und N ſchief durchſchnitten werden. In dieſen beyden Fällen, muß man, AN und AE ſo weit verlängern, bis AC = AM = 90° wird, und alsdann durch C, M und K oder das Centrum der Kugel, den Cirkel CMDR legen, welcher ein größter Cirkel, und deſſen Bogen CM, das Maas vom ∠ EAN iſt.

3) Da ∠ EAN = ∠ GBP, ſo ſind zween ſphäriſche Winkel, die in den entgegengeſetzten gemeinſchafftlichen Polen zweyer größten Cirkel liegen, und dieſe beyde größte Cirkel zu Schenkeln haben, einander gleich.

§. 15. Tr. Sph. T. I. F. 7. b.

Zween ſphäriſche Scheitelwinkel ſind einander gleich, und zween ſphäriſche benachbarte Winkel ſind = 180°. Das iſt ∠ EAN = ∠ OAF und ∠ EAN + ∠ NAF = 180°.

Beweiß.

Man ziehe SV, die Tangente des Cirkels ACBD, ingleichem TU, die Tangente des Cirkels AMBO (G. §. 86. Z. 2.) Beyde ſtehen auf AB ſenkrecht (G. §. 85.) jede liegt, mit dem ihr zugehörigen Cirkel in einerley Ebene, und ſie beſtimmen daher den Neigungswinkel derſelbigen EAN (§. 13.) oder der ∠ SAT = ∠ EAN und ∠ UAV = ∠ OAF, und ∠ TAV = ∠ NAF. Nun iſt

$$\begin{array}{ll} \angle SAT = \angle UAV\ (\text{G.}\,\S.\,41.) & \text{aber auch} \\ \quad\ \ \| \qquad\quad \| & \text{folglich} \\ \hline \end{array}$$

1) $\angle EAN = \angle OAF$. Und da

$$\begin{array}{ll} \angle SAT + \angle TAV = 180^\circ\ (\text{G.}\,\S.\,40.) & \text{aber auch} \\ \quad\ \ \| \qquad\quad \| & \text{ſo iſt} \\ \hline \end{array}$$

2) $\angle EAN + \angle NAF = 180^\circ$.

Zuſatz.

Folglich ſind auch, alle ſphäriſche, um ein Punkt, herum liegende Winkel $= 360^\circ$ (G. §. 40. Z. 3.)

Zweyter Abſchnitt.

Haupt-Eigenſchafften und Berechnung der ſphäriſchen Triangel.

§. 16. Tr. Sph. T. I. F. 8.

Jede Seite eines ſphäriſchen Triangel iſt gewiß kleiner als 180° oder kleiner als ein halber Cirkel.

Beweiß.

Denn jeder ſphäriſcher $\triangle$ entſteht, wenn ſich, drey größte Cirkel, auf der Oberfläche der Kugel, durchſchneiden (§. 1.) Nun verlängere man AC und AB, bis ſie ſich in D; AC und BC aber, bis ſie ſich in E durchſchneiden, ſo ſind die Bögen ACD, ABD, CAE, und CBE alle $=$, jeder $= 180^\circ$ (§. 6.) Und es iſt augenſcheinlich $AC < ACD$; $AB < ABD$ und $BC < CBE$ (Ar. §. 61.) alſo auch jede Seite $< 180^\circ$.

§. 17. Tr. Sph. T. I. F. 9.

Die Summe aller Winkel, in jedem ſphäriſchen Triangel iſt $> 180°$, oder die Winkel $(A+B+C)$ ſind $> 180°$.

Beweiß.

Man verlängere AB und AC, bis ſie ſich in D ſchneiden, ziehe den Diameter AD, und die Sehnen AB, AC, BC; ferner aus dem willkürlich auf AB angenommenen Punkt E, die Linie EF, ſenkrecht, auf den Diameter, den ſie in F durchſchneidet. Dieſe liegt in der halben Cirkel=Ebene ABD. Man errichte in F, gegen AC, das Perpendickel FG, bis es AC in G durchkreutzet, und diß liegt in der halben Cirkelebene ADC. Nun iſt der $\angle EFG$ Neigungswinkel der beyden Flächen ADB und ADC (G. §. 177.) Folglich auch der $\angle EFG =$ dem ſphäriſchen Winkel BAC (§. 14.) Weil aber im $\triangle AGF$, $AG > AF$, folglich auch $AE > AF$ (G. §. 54. 3. 2. und §. 51.) ſo iſt

$n > x$ (G. §. 52.)

$u > y$ Daher (Ar. §. 64.)

$n+u > x+y$ weil aber

$\quad \| \qquad \|$

ſo iſt $\angle BAC > x+y$ oder der ebene $\angle$.

Da alſo $\angle B > o$

$\angle C > z$ aus den nemlichen Gründen,

$\angle A > x+y$ ſo ſind 3 ſphäriſche

Winkel $(A+B+C) > (x+y+o+z)$ und da

$\|$ (G. §. 60.) ſo ſind

---

auch $\angle(A+B+C) > 180°$.

Zuſatz.

Folglich iſt in jedem ſphäriſchen △, der äuſſere Winkel m < A+C, oder kleiner als die beyde innere ihm entgegen ſtehende Winkel. Denn

$$\begin{array}{lcl} A + B + C & > & 180^\circ \text{ und §. 15.} \\ & & \quad \| \\ \hline A + B + C & > & B+m \\ B & = & B \\ \hline A + C & > & m \text{ (Ar. §. 64.)} \end{array}$$

§. 18. Tr. Sph. T. I. F. 10.

Wenn in zwey ſphäriſchen Triangeln zwo Seiten und die von ihnen eingeſchloſſene Winkel gleich ſind, ſo ſind die ganze Triangel gleich. Z. E. Wenn AB = DE, AC = DF, und x = y, ſo iſt auch BC = EF, u = z und m = n.

Beweiß.

Denn man lege den △ DEF auf den △ ABC, ſo paßt DE auf AB und DF auf AC, indem ja y auch auf x paſſet; folglich fällt auch F auf C und EF auf BC, daher △ ABC = △ DEF (G. §. 27. Nro. 1.) indem ähnliche Linien gewiß auf einander paſſen, ſobald ſie, wie hier, gleich ſind.

§. 19. Tr. Sph. T. I. F. 10.

Wenn in zwey ſphäriſchen △ △ eine Seite, einer Seite, und die beyde anliegende Winkel, einzeln genommen, ſich gleichen, ſo ſind die ganze △ △ gleich.

D. i. Wenn BC = EF, u = z, m = n, ſo iſt △ ABC = △ DEF.

Beweiß

Wird wie (G. §. 43.) geführt. Seine Aehnlichkeit mit (§. 18.) erhellet für ſich.

§. 20. Tr. Sph. T. I. F. 11.

In jedem gleichſchenklichten ſphäriſchen △ ſind die Winkel an der Grundlinie, u und m gleich.

Beweiß.

Man theile den, der Grundlinie gegenüberſtehenden ∠ BAC, durch AD, den Bogen eines größten Cirkels, in zwey gleiche Winkel x und y, ſo iſt △ ABD = △ ADC (§. 18.) daher auch u = m.

Zuſatz.

Alſo ſind auch in gleichſchenklichten ſphäriſchen △△, die gleichen Seiten entgegen geſetzte Winkel gleich.

§. 21. Tr. Sph. T. I. F. 12.

Und wenn B = C, ſo iſt auch AC = AB oder ABC ein gleichſchenklichtes △.

Beweiß.

Man mache BD = CE und ziehe die Bogen BE und CD, ſo iſt △ BCD = △ BCE (§. 18.) Daher CD = BE; x = o; m = n, folglich auch u = y (§. 15.) r = v (Ar. §. 63.) Nun iſt △ ABE = △ ACD (§. 19.) und

AD = AE Weil aber
BD = CE (p. conſtr.) ſo iſt

AD + BD = AE + CE (Ar. §. 63.)
‖ ‖
Daher AB = AC.

§. 22. Tr. Sph. T. I. F. 13.

In jedem ſphäriſchen △ ABC iſt die Summe zwoer Seiten oder AB + AC > BC.

Beweiß.

Man verlängere AC, bis man den Cirkel ACFD erhält, und ziehe den Diameter AF; mache α AD = α AB und ziehe CD, die Sehne des Bogens DAC. Aus E, wo ſie AF ſchneidet, ziehe man BE und endlich noch BC. Wenn ſich nun der halbe Cirkel ADF, um ſeinen Diameter AF, gegen AB bewegte, ſo würde endlich der Bogen AD auf den Bogen AB, und DE auf BE fallen, oder DE = BE ſeyn. Da aber

BE + CE > BC (G. §. 53.) und
‖ p. dem. ſo iſt

DE + CE > BC

Gröſſere Sehnen ſchneiden gröſſere Bögen ab (G. §. 76. Z. 2.) daher iſt auch

α DAC > BC und da
‖

AB+AC > BC.

§. 23. Tr. Sph. T. I. F. 14.

In jedem ſphäriſchen △ ABC, ſteht die größte Seite BC, dem größten ∠ BAC gegenüber.

Beweiß.

Man mache den ∠BAD = ∠B, ſo iſt ∝ AD = ∝ BD (§. 21.) Da nun im △ ACD

AC < AD + CD (§. 22.) und
|| (p. dem.)

ſo iſt AC < BD + CD weil aber
||

folglich AC < BC.

Zuſatz.

Daher ſteht auch immer der größte ∠ BAC, der größten Seite BC, gegenüber, oder der ∠ BAC iſt > als der Winkel BCA. Denn A kann, weder = noch < C ſeyn. Nicht gleich, ſonſt wäre BC = AB (§. 22.) Nicht kleiner, ſonſt würde AB > BC, welches doch beydes gegen die Bedingung liefe.

§. 24.

Ein ſphäriſches △ heißt: Rechtwinklicht, wenn es einen, oder auch mehr rechte Winkel hat (§. 1. u. 9.). Schiefwinklicht, wenn alle drey Winkel ſchief ſind. Die Seiten, welche den ∟ einſchlieſſen, heiſſen Perpendickel, oder auch, wenn man die eine Grundlinie nennt, die andere Perpendickel und umgekehrt; die dem ∟ gegenüberliegende Seite aber, heißt Hypotenuſe.

§. 25. Tr. Sph. T. I. F. 15.

Wenn man, aus dem gegebenen ſphäriſchen △ ABP, den Mittelpunkt der Kugel K, nach (G. §. 80.

Nro. 4.) ſucht, die Radios BK, PK und AK zieht, auch aus P auf BK, die Perpendikulare PN, auf AK aber, die Perpendikulare PM fällt und NM auszieher, ſo iſt

1) Der ∠PNM Neigungswinkel der beyden Ebenen ABK und BKP (G. § 177.) und dem ſphäriſchen ∠B oder PBA gleich (§. 14.)

2) Der ∠PMN = ∠A und ∠MPN = ∠P.

3) PN iſt = S α BP und PM = S α AP (Tr. Pl. §. 6.)

Anmerkung.

Mündlich kann alles, durch eine ſolche, von Pappendeckel verfertigte Kugel-Pyramide ABKP, vollkommen erläutert werden.

§. 26. Tr. Sph. T. I. F. 15.

Nun laſſen ſich, die, zu Berechnung rechtwinklichter ſphäriſcher Triangel, nöthige Eigenſchafften derſelben, leicht in folgenden Lehrſätzen entwickeln.

I. ST : SPB = SB : SAP denn

Im △PMN iſt nach (Tr. Pl. §. 31.)

ST : PN = Sx : PM auch §. 25.

‖ ‖ ‖

---

daher ST : SPB = SB : SAP.

II. ST : AB = TB : TAP denn

ST : Tx = MN : MP (invert.)

MP : MN = Tx : ST und §. 25.

‖

MP : MN = TB : ST

KM : MP = ST : TAP (Tr. Pl. §. 21.)

KM : MN = TB : TAP (Ar. §. 217.)
‖ = = = ST : SAB

ST : SAB = TB : TAP.

III. Man verlängere, Tr. Sph. T. I. F. 16. BP in N, und AB in M, ſo daß BN = BM = 90°; aber auch AP in D, bis AD = 90° werden; beſchreibe aus B durch D, N und M den Bogen DM, ſo ſind die Winkel M und N = 90°; D Pol von MAB (I. Abſchn.) und nun iſt: PN Complement BP; AM Compl. von AB; PD Compl. von AP; ∠B = α MN; DN Compl. von MN, folglich DN Compl. vom ∠B. Welches auch, von den Tangenten und Cotangenten zu bemerken (Tr. Pl. §. 8. und 9.) Daher nun:

ST : Cos. AP = Cos. AB : Cos. BP Denn

ST : SDP = SD : SPN (I.)
und da ‖ ‖ ‖

ST : Cos. AP = Cos. AB : Cos. BP.

IV. ST : Cos. AP = SP : Cos. B Denn

ST : SDP = SP : SDN (I.)
weil aber ‖ ‖ ſo iſt

ST : Cos. AP = SP : Cos. B.

V. ST : Cos. B = Cot. AB : Cot. BP Denn

ST : SDN = TD : TPN (II.) und
‖ ‖ ‖

ST : Cos. B = Cot. AB : Cot. BP.

VI. ST : Cos. BP = TP : Cot. B Denn

ST : SPN = TP : TDN (II.)
|| ||

ST : Cos. BP = TP : Cot. B.

VII. ST : SAB = Cot. AP : Cot. B Denn

ST : AB = TB : TAP (II.)
Cot. AP : Cot. B ===|| (Tr. Pl. §. 24. b.)

ST : SAB = Cot. AP : Cot. B.

VIII. ST : Cos. B = TBP : TAB Denn

ST : Cos. B = Cot. AB : Cot. BP (V.)
TBP : TAB ====|| (Tr. Pl. §. 24. b.)

ST : Cos. B = TBP : TAB.

IX. ST : Cos. BP = TB : Cot. P Denn

ST : Cos. BP = TP : Cot. B (VI.)
TB : Cot. P ===|| (Tr. Pl. §. 24. b.)

ST : Cos. BP = TB : Cot. P.

X. ST : Cot. BP = TAB : Cos. B Denn

ST : TBP = Cos. B : TAB (VIII.)
|| (Tr. Pl. §. 24. a. 3. 1.)

ST : $\frac{ST^2}{Cot. BP}$ = Cos. B : TAB (× Cot. BP

ST × Cot. BP : ST^2 = Cos. B : TAB (: ST)

Cot. BP : ST = Cos. B : TAB (invert.)

ST : Cot. BP = TAB : Cos. B.

XI. $\mathrm{ST} : \mathrm{Cot.B} = \mathrm{TAP} : \mathrm{SAB}$ Denn

$$\mathrm{ST} : \mathrm{SAB} = \mathrm{Cot.AP} : \mathrm{Cot.B} \text{ (VII.) u. (Tr. Pl. §. 24. a. 3. 1.) } \|$$

$$\mathrm{ST} : \mathrm{SAB} = \frac{\mathrm{ST}^2}{\mathrm{TAP}} : \mathrm{Cot.B} \; (\times \mathrm{TAP})$$

$$\mathrm{ST} \times \mathrm{TAP} : \mathrm{SAB} = \mathrm{ST}^2 : \mathrm{Cot.B} \; (: \mathrm{ST})$$

$$\mathrm{TAP} : \mathrm{SAB} = \mathrm{ST} : \mathrm{Cot.B} \text{ (invert.)}$$

$$\mathrm{ST} : \mathrm{Cot.B} = \mathrm{TAP} : \mathrm{SAB}.$$

XII. $\mathrm{ST} : \mathrm{Cot.P} = \mathrm{Cot.B} : \mathrm{Cos.PB}$ Denn

$$\mathrm{ST} : \mathrm{Cos.BP} = \mathrm{TB} : \mathrm{Cot.P} \text{ (IX.) u. (Tr. Pl. § 24 a. 3. 1.) } \|$$

$$\mathrm{ST} : \mathrm{Cos.BP} = \frac{\mathrm{ST}^2}{\mathrm{Cot.B}} : \mathrm{Cot.P} \; (\times \mathrm{Cot.B})$$

$$\mathrm{ST} \times \mathrm{Cot.B} : \mathrm{Cos.BP} = \mathrm{ST}^2 : \mathrm{Cot.P} \; (: \mathrm{ST})$$

$$\mathrm{Cot.B} : \mathrm{Cos.BP} = \mathrm{ST} : \mathrm{Cot.P} \text{ (invert.)}$$

$$\mathrm{ST} : \mathrm{Cot.P} = \mathrm{Cot.B} : \mathrm{Cos.BP}.$$

§. 27.

Bey Berechnung rechtwinklichter Triangel, in welchen der ∟ immer bekannt iſt, wären demnach folgende Fälle möglich:

Gegeben	zu finden.
a) Seiten, folglich	
1) Beyde Catheti oder Perpendickel,	1) Die beyde ſchiefe ∠∠.
	2) Die Hypotenuſe.

Gegeben	zu finden
2) Die Hypotenuſe und ein Perpendickel.	1) Der dem Perpendickel gegenüberliegende ∠. 2) Der dem Perpendickel anliegende ∠. 3) Das andere Perpendickel.
b) Oder Winkel, folglich	1) Ein Perpendickel. 2) Oder die Hypotenuſe.
c) Oder Seiten und Winkel, daher	
1) Ein Perpendickel und ein ∠.	
I. Ein Perpendickel und der anliegende ∠.	1) Der dem Perpendickel gegenüberliegende ∠. 2) Das andere Perpendickel. 3) Die Hypotenuſe.
II. Ein Perpendickel und der ihm gegenüberliegende ∠.	1) Der dem Perpendickel anliegende ∠. 2) Das andere Perpendickel. 3) Die Hypotenuſe.

Gegeben	zu finden
2) Oder die Hypotenuſe und ein ſchiefer ∠.	1) Der dritte ∠.
	2) Eines von den Perpendickeln.

Die wirkliche Berechnung findet ihre Regeln, in denen, in der folgenden Tabelle, für alle Fälle entworfenen Proportionen, in welchen ST, ſo viel möglich, ins erſte Glied gebracht wurde, um die Arbeit zu erleichtern. Man darf alſo nur, zu jedem rechtwinklichten Triangel, die F. 16. gebrauchte Buchſtaben, in der nemlichen Ordnung ſetzen; ſo kann man, die, zu Beantwortung aller hier möglichen Fragen, nöthige Proportionen, unverändert aus dieſer Tabelle nehmen. Ozanam macht aller Orten, den ST zum erſten Glied. Allein dadurch werden Secanten und Coſecanten unentbehrlich, welche ſich doch nicht in allen trigonometriſchen Tafeln finden.

I. Tafel der Proportionen für die Rechtwinklichte Dreyecke.

Gegeben	Geſucht	Proportion	Fall	Nach
AB. AP.	B.	ST : SAB = Cot. AP : Cot. B	1	VII
AB. AP.	BP.	ST : Cos. AB = Cos. AP : Cos. BP	2	III
AB. BP.	B.	ST : Cot. BP = TAB : Cos. B	3	X
BP. AP.	B.	SBP : ST = SAP : SB	4	I
BP. AP.	AB.	Cos. AP : ST = Cos. BP : Cos. AB	5	III
B. P.	AP.	SP : ST = Cos. B : Cos. AP	6	IV
B. P.	BP.	ST : Cot. P = Cot. B : Cos. BP	7	XII

AB. B.	*P.*	ST : Cos. AB = SB : Cos. P	8	IV
AB. B.	A*P.*	ST : SAB = TB : TAP	9	II
AB. B.	B*P.*	ST : Cos. B = Cot. AB : Cot. B*P*	10	V
A*P.* B.	*P.*	Cos. A*P* : ST = Cos. B : S*P*	11	IV
A*P.* B.	AB.	ST : Cot. B = TA*P* : SAB	12	XI
A*P.* B.	B*P.*	SB : SA*P* = ST : SB*P*	13	I
B*P.* *P.*	B.	ST : Cos. B*P* = T*P* : Cot. B	14	VI
B*P.* B.	A*P.*	ST : SB*P* = SB : SA*P*	15	I
B*P.* *P.*	A*P.*	ST : TB*P* = Cos. *P* : TA*P*	16	VIII

§. 28.

Es giebt aber auch ſphäriſche △△; in welchen die Seiten gröſſer, es giebt andere, in welchen ſie < 90° ſind. Geradezu kann man daher unmöglich wiſſen, ob die gefundene Sinuſſe und Tangenten, zu einem ſpitzigen oder ſtumpfen Bogen gehören (Tr. Pl. §. 6. Z. 2.) Folgende Sätze heben dieſe Zweydeutigkeit, wenn man noch bemerkt: Daß ein Paar Bogen oder ein Paar Winkel, oder ein Bogen und ein Winkel **gleichartig** heiſſen (homogenei) wenn ſie beyde ſpitzig, oder beyde ſtumpf ſind; umgekehrt aber, **ungleichartig** (heterogenei) genennet werden.

I. In jedem ſphäriſchen △ ſind alle Sinuſſe poſitiv. Denn jede Seite iſt < 180° (§. 16.) Es ſind aber auch, alle Sinuſſe, von 0 bis 180° poſitiv (Tr. Pl. §. 8. a. Z. 2.) folglich müſſen auch alle ihre Sinuſſe poſitiv ſeyn.

II. Wenn eine oder mehrere Seiten $\gtrless$ 90° ſind, ſo werden die Coſinuſſe und Tangenten, der gröſſern Bogen, negativ (Tr. Pl. §. 8. a. Z. 3. und §. 9. Z. 2.)

III. Der ſchiefe Winkel (Tr. Sph. T. I. Fig. 15.) und das ihm gegenüberliegende Perpendickel, ſind immer gleichartig. Denn ST : SAB = TB : TAP (§. 26. II.) Nun iſt SAB und ST immer +, folglich kommt das Zeichen, der Tangente von AP, blos auf das Zeichen der TB an. Setzt man + TB, ſo iſt auch

$\frac{SAB \times + TB}{+ ST} = + TAP$. Nimmt man — TB an, ſo würde $\frac{+ SAB \times - TB}{+ ST} = - TAP$ (Arithm.)

IV. Die Hypotenuſe BP (Tr. Sph. T. I. F. 16.) zweyer gleichartigen Perpendickel AB und AP, iſt immer < 90°. Denn es iſt ST : Cos. AP = Cos. AB : Cos. BP (§. 26. III.) Folglich (p. hyp.) entweder + Cos. AB × + Cos. AP, oder — Cos. AB × — Cos. AP, und da ST immer + iſt, ſo wird auch

$$\frac{\pm \text{Cos.}\,AB \times \pm \text{Cos.}\,AP}{+ ST} \text{ immer} = + \text{Cos.}\,BP.$$

Weil aber kein Cos. + iſt, er ſeye dann < 90° oder > 270° (Tr. Pl. §. 8. a. Z. 3.) und der letzte Fall wegfällt (§. 16.) ſo muß BP < 90° ſeyn.

Zuſätze.

1) Bey ungleichartigen Perpendickeln iſt die Hypotenuſe BP > 90°.

2) Iſt die Hypotenuſe BP < 90°, ſo ſind die Perpendickel gleichartig, iſt ſie > 90°, ſo ſind ſie ungleichartig.

V. Wenn (Tr. Sph. T. I. F. 16.) der ∠ B u. AB, oder eine Seite und der anliegende ∠ gleichartig ſind, ſo iſt BP oder die Hypotenuſe < 90°. Denn ST : Cos. B = Cot. AB : Cot. BP (§. 26. V.) folglich (p. hyp.)

$$\frac{\pm \text{Cos. B} \times \pm \text{Cot. AB}}{+ \text{ST}} = + \text{Cot. BP}.$$ Nun ſind alle Cotangenten über 90° negativ, und die unter 90° poſitiv, folglich muß BP < 90° ſeyn. Daher wird BP > 90°, wenn B und AP ungleichartig ſind.

VI. Sind (Tr. Sph. T. I. F. 16.) P und BP, oder ein ∠ auſſer dem ∟ und die Hypotenuſe gleichartig, ſo iſt B oder der andere Winkel auſſer dem ∟ kleiner als 90°. Denn ST : Cos. BP = TP : Cot. B (§. 26. VI.) Daher iſt

$$\frac{\pm \text{Cos. BP} \times \pm \text{TP}}{+ \text{ST}} = + \text{Cot. B},$$ folglich muß auch B, nach denen (V.) gegebenen Gründen < 90° ſeyn. Wären P und BP ungleichartig, ſo iſt B > 90°.

Anmerkung.

So laſſen ſich alle zweydeutige Fälle leicht entſcheiden, es wäre dann, daß in einer Proportion, lauter Sinuſſe vorkämen. Denn hier entſchieden die Zeichen nichts (I.) und man muß, wie in der Ebenen Trigonometrie, vorhin die Beſchaffenheit der Winkel beſtimmen.

§. 29.

Die ganze Behandlung aller ſchiefwinklichten △ △ beruht, größten Theils, auf dem (§. 41. 42. 43. Tr. Pl.) angewandten Kunſtgriff, jeden in zwey rechtwinklichte zu verwandlen. Diß kann auf folgende Art geſchehen. Man läßt (Tr. Sph. T. I. F. 17. u. 18.)

aus einem beliebigen $\angle$ P, auf die, ihm gegenüber-liegende Seite BD, die allenfalls (wie F. 18) ver-längert werden muß, ein Perpendickel AP fallen, ſo erhält man, F. 17. die zwey △ △ ABP und ADP und F. 18. ABP und ADP. Nun

1) Können ſie nach den vorigen Lehrſätzen bearbeitet werden, wenn in jedem △, auſſer dem ∟ noch zwey Stücke bekannt ſind.

2) Sie ſind immer bekannt, wenn im ſchiefwinklich-ten △, neben zwo Seiten, noch ein $\angle$ gegeben iſt. Daher dörfen nur die beyde Fälle: Aus drey gegebenen Seiten, oder aus drey gegebenen Winkeln, das übrige zu finden, beſonders auf-gelöſet werden.

3) Sollte im ſchiefwinklichten △ eine Seite = 90° ſeyn, ſo läßt es ſich, wenn man auch die andre Seite verlängert, bis ſie = 90° wird, ohne weitere Verwandlung auflöſen.

§. 30. Tr. Sph. T. I. F. 17. u. 18.

Hieraus laſſen ſich nun, wie (§. 26.) alle, zu Berechnung dieſer Triangel, nöthige Lehrſätze, leicht entwickeln. Denn es ſeye gegeben: B, D, DP und zu finden BP, nebſt den übrigen fehlenden Stücken, ſo iſt (F. 18.)

I. SB : SDP = SD : SBP Denn

ST : SBP = SB : SAP (§. 26. I.)
ST : SDP = SD : SAP (Ar. §. 217.)

SBP : SDP = SD : SB (invert.)

SB : SDP = SD : SBP.

II. TB : TD = SAD : SAB (F. 17.) Denn

ST : SAB = TB : TAP (§. 26. II.) und
ST : SAD = TD : TAP (Ar. §. 217.)

SAB : SAD = TD : TB (invert.)

TB : TD = SAD : SAB.

III. Cos. BP : Cos. AB = Cos. DP : Cos AD (F. 17) Denn

ST : Cos. AP = Cos. AB : Cos. BP
|| = Cos AD : Cos. DP (§. 26. III.)

Cos. AB : Cos. BP = Cos. AD : Cos. DP (invert.)

Cos BP : Cos. AB = Cos. DP : Cos. AD.

IV. SBPA : Cos PBA = SDPA : Cos. PDA Denn

ST : Cos. AP = SBPA : Cos. B
|| = SDPA : Cos PDA (§. 24. IV.)

SBPA : Cos. PBA = SDPA : Cos. PDA.

V. Cos BPA : Cos DPA = TDP : TBP. Denn

ST : Cos. BPA = TBP : TAP und
ST : Cos DPA = TDP : TAP Daher (A. §. 217)

Cos. BPA : Cos DPA = TDP : TBP

Nach (§. 26. VIII.) wenn B und P verwechſelt werden.

Anmerkung.

Die hier vorkommende Coſinuſſe und Tangenten, müſſen von den innren Winkeln der △ △ verſtanden werden, ſonſt läßt ſich aus ihren Zeichen nichts ſchlieſſen. Diß aber vorausgeſetzt, kann man die Beſchaffenheit der Seiten und Winkel, wie §. 28. entdecken, immer, wie dort, finden, ob ſie ſtumpf oder ſpitzig ſeyen.

§. 31. Tr. Sph. T. I. Fig. 19.

Wenn in einem ſphäriſchen △ BPD, aus der Spitze P, auf die Baſis BD, ein Perpendickel AP gezogen wird, ſo iſt Sx : Sy = Cos. o : Cos. v.

Beweiß.

Man verlängere BP, PD und AP in E, G u. F, ſo daß die Bogen PE, PF und PG jeder = 90° werden, und beſchreibe aus dem Pol P, den Bogen eines größten Cirkels EFG; welcher, wenn er beyderſeits verlängert wird, die gleichfalls verlängerte Baſis BD, in H und J durchkreutzet, ſo ſind die beyde Bögen JAH und JFH = 180° (§. 6.) AJ, AH, FH und FJ aber, jeder = 90° (§. cit.) folglich EJ = dem Complement des Bogens EF oder des ∠ x; GH = dem Complement des Bogens GF oder des ∠ y; BE = dem Complement des Bogens BP und DG = dem Complement der Seite PD. Man verlängere ferner BE und PG in M und N, ſo daß die Bögen BM und DN = 90° werden und beſchreibe aus dem Pol B, durch M, den Bogen eines größten Cirkels MK, welcher die verlängerte Baſis BD, in L, durchſchneidet, und von dem gleichfalls verlängerten Bogen GE in K durchſchnitten wird. Eben ſo verfahre man auf der andern Seite des △ BPD. Und nun iſt aus (§. 26. I.) klar, daß in dem bey L rechtwinklichten Triangel JKL

ST : SJ = SKJ : SKL und da
|| || ||
1) ST : SAF = SEF = Sx : Cos. ML = Cos. ∠ o. u.

Da ST : SH = SRH : SOR auch
|| || || ſo iſt

2) ST : SAF = SGF = Sy Cos. ON = Cos. v.
Nun iſt (1) || = = = = = Sx : Cos. o (A §. 203.)

Sx : Cos. o = Sy : Cos. v (Ar. v. 217.)

Sx : Sy = Cos. o : Cos. v.

§. 32. Tr. Sph. T. I. F. 20.

Die Summe der Sinuſſe, zweener Bögen oder zweener Winkel, verhält ſich zur Differenz der nemlichen Sinuſſe, wie die T der halben Summe eben dieſer Winkel, zur T der halben Differenz der nemlichen Winkel.

Beweiß.

Es ſey ein geradlinicht △ ABP in einen Cirkel beſchrieben, deſſen Diameter für den ST angenommen wird, ſo iſt BP = SA und AP = SB (Tr. Pl. §. 31. Z. 2. a.) und nun iſt

$$\underbrace{BP + AP}_{\|} : \underbrace{BP - AP}_{\|} = T\frac{A+B}{2} : T\frac{A-B}{2} \left\{\begin{array}{l}\text{Tr. Pl.}\\ \text{§. 40.}\end{array}\right.$$

$$SA + SB : SA - SB = T\frac{A+B}{2} : T\frac{A-B}{2}$$

§. 33. Tr. Sph. T. I. F. 21.

Aus allen drey gegebenen Seiten eines ſphäriſchen Triangels, einen jeden der drey Winkel zu finden.

Auflöſung.

Es ſeye z. E. B zu finden. Man beſchreibe, aus P als Pol, den Bogen eines gröſten Cirkels AE,

welcher, wenn er verlängert wird, die ebenfalls verlängerte Seiten des △ in A, E und F durchkreutzet, ſo iſt 1) $\text{Cos. PD} - \text{Cos. BP} : \text{Cos. PD} + \text{Cos. BP} = T\frac{BD}{2} : T\frac{DF+BF}{2}$. Weil aber $\frac{DF+BF}{2} - \frac{BD}{2} = BF$, da $BD = DF - BF$, ſo iſt 2) $ST : \text{Cot. BP} = \text{Cot. BF} : \text{Cos. B}$.

Beweiß.

Im ◺ DAF iſt A = 90°, und im ◺ BEF, E = 90°; daher (§. 26. I.)

$$ST : SF = SDF : SAD$$
$$\parallel = SBF : SBE \text{ alſo (Ar. §. 203.)}$$

$$SDF : SAD = SBF : SBE \text{ u. (Ar. §. 217.)}$$

$$SDF : SBF = SAD : SBE \text{ Da nun}$$
$$\parallel \quad \parallel$$

$$SDF : SBF = \text{Cos. PD} : \text{Cos. BP} \text{ u. (Ar. §. 217.)}$$

$$\text{Cos. PD} + \text{Cos. BP} : \text{Cos. BP} = SDF + SBF : SBF \text{ aber auch}$$

$$\text{Cos. PD} - \text{Cos. BP} : \text{Cos. BP} = SDF - SBF : SBF \text{ Daher}$$

$$\text{Cos. PD} + \text{Cos. BP} : \text{Cos. PD} - \text{Cos. BP} = SDF + SBF : SDF - SBF \text{ u. da}$$

$$T\frac{DF+BF}{2} : T\frac{BD}{2} = SDF + SBF : SDF - SBF \text{ (§. 32.) ſo iſt auch}$$

$$\text{Cos. PD} + \text{Cos. BP} : \text{Cos. PD} - \text{Cos. BP} = T\frac{DF+BF}{2} : T\frac{BD}{2} \text{ und (Ar.)}$$

$$\text{Cos. PD} - \text{Cos. BP} : \text{Cos. PD} + \text{Cos. BP} = T\frac{BD}{2} : T\frac{DF+BF}{2}.$$ W. Z. E. W.

Nun iſt im $\triangle$ BEF nach (§. 26. X.)

ST : TBE = Cot. BF : Cos. B und da
|| ſo iſt auch

ST : Cot. BP = Cot. BF : Cos. B. W. Z. E. W.

Zuſätze.

1) Hier wurde vorausgeſetzt, daß B ſpitzig ſeye. Wär' es ſtumpf, ſo müßte man, die (1.) gefundene Grade und Min. von 180° abziehen, um $\frac{DF+BF}{2}$ zu finden, weil in dieſem Fall $\frac{DF+BF}{2} >$ 180° wäre, wie ſich leicht zeigen läßt.

2) Bey der logarithmiſchen Berechnung dieſer Aufgabe, vergeſſe man ja nicht die (Ar. §. 279.) empfohlene Vorſicht.

3) Wenn eine Seite = 90° oder auch wenn das $\triangle$ gleichſchenklicht iſt, läßt ſich die Arbeit vortheilhaft abkürzen, wovon mündlich.

§. 34. Tr. Sph. T. I. F. 17.

Wenn alle drey Winkel gegeben ſind, eine jede von den Seiten zu finden. Z. E. Hier BD.

Auflöſung.

Man fälle aus einem Winkel, hier aus P, das Perpendickel AP (§. 29.) ſo iſt

Cos. D + Cos. B : Cos. D — Cos. B = T $\frac{x+y}{2}$: T $\frac{x-y}{2}$.

Nun iſt $\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2}$ = dem gröſſern $\angle$ y (Ar. §. 189. Z. 3.) alſo kann in beyden $\triangle\triangle$ APD und ABP,

DB und BP (§. 26. IV. und XII.) Aber auch nach (§. cit. I.) AB und AD, folglich auch BD, gefunden werden.

Beweiß.

$$Sx : Sy = \text{Cos.}D : \text{Cos.}B \quad (\S.31.)$$

$$\text{Cos}D+\text{Cos}B : \text{Cos}D-\text{Cos}B = Sx+Sy : Sx-Sy \quad (\S.33)$$

$$T\frac{x+y}{2} : T\frac{x-y}{2} = || \quad (\S.32.) \text{ daher}$$

$$\text{Cos}D+\text{Cos}B : \text{Cos}D-\text{Cos}B = T\frac{x+y}{2} : T\frac{x-y}{2}.$$

Zuſatz.

AP fällt hier, nach der Vorausſetzung, innerhalb das Triangel, fiel es auſſer daſſelbige, ſo wäre F. 18.

$$\text{Cos.}D - \text{Cos.}B : \text{Cos.}D + \text{Cos.}B = T\frac{BPD}{2} : T\frac{APB}{2}.$$

§. 35.

Bey Berechnung ſchiefwinklichter Triangel, wären demnach folgende Fälle möglich:

Gegeben	zu finden
a. Alle drey Seiten.	Alle drey Winkel.
b. Alle drey Winkel.	Alle drey Seiten.
c. Zwo Seiten und ein Winkel, folglich	
1) Der eingeſchloſſene Winkel.	1) Die dritte Seite.

Gegeben	zu finden
	2) Einer von den beyden übrigen Winkeln.
2) Der einer gegebenen Seite gegenüberſtehende Winkel.	1) Der der andern Seite entgegenſtehende $\angle$.
	2) Der zwiſchen den gegebenen Seiten eingeſchloſſene $\angle$.
	3) Die 3te Seite.
d. Zween Winkel und eine Seite, folglich	
1) Die eingeſchloſſene Seite.	1) Ein Winkel.
	2) Eine Seite.
2) Die einem Winkel gegenüberſtehende Seite.	1) Eine Seite, welche dem andern gegebenen $\angle$ gegenüberſteht.
	2) Oder die ihm anliegt.
	3) Oder der dritte $\angle$.

Auch hier findet man, die Regeln zur wirklichen Berechnung, in der folgenden Tabelle, wo für alle mögliche Fälle die Proportionen entworfen ſind. Sobald jedes △ die nemliche Benennung, wie F. 17. 18. und 19. erhält, kann man ſie unverändert herausſchreiben.

Anmerkung.

Hat aber nicht Neper für alle Rechtwinklichte Dreyecke in Canon. mirif. logar. C. 4. und Wolf für alle mögliche in ſeinen Elem. Trig. Sphær. eine ganz allgemeine, für alle erdenkliche Fälle paſſende Regel gegeben? Ja, und ihr Scharfſinn in Erfindung des Allgemeinen, aus ſo vielen beſondern Fällen, iſt zur Uebung des Nachdenkens das herrlichſte Muſter. Weil aber ihre Vorſchrifften, in der Ausübung, mehr Zeit und Nachdenken erfordern, als das Aufſuchen der Proportionen in den angebogenen Tabellen, ſo dörften dieſe in der Ausübung vortheilhafter ſeyn, da ſie leicht hinter die Sinustafeln eingetragen werden können, welche man ohnehin, auch bey dieſen allgemeinen Regeln, bey Berechnung der Dreyecke nicht entbehren kann. Wer viel Tiefgedachtes und Schönes, für die Theorie, hierüber leſen will, dem werden Lamberts Beytr. 1. Theil III. p. 369. u. f. ein Genüge leiſten.

Tafel

II. Tafel der Proportionen für die ſchiefwinklichte Dreyecke.

Gegeben	Geſucht	Proportion	Fall	Aus
BP. BD. PD.	P. B. D.	$\text{Cos.}PD - \text{Cos.}BP : \text{Cos.}PD + \text{Cos}BP = T\frac{BD}{2} : T\frac{DF+BF}{2}$ und nun $ST : \text{Cot.}BP = \text{Cot.}BF : \text{Cos.}B$ weil $\frac{DF+BF}{2} - \frac{BD}{2} = BF.$	1	11
B. P. D.	BP. PD. BD.	$\text{Cos.}D + \text{Cos.}B : \text{Cos.}D - \text{Cos.}B = T\frac{x+y}{2} : T\frac{x-y}{2}$ folgl. $\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2} = y$ Daher DP und BP, nach (T.I. 7.) AD u. AB folgl. auch BD nach (T.I.6.) gefunden werden.	2	12
BP. PD. B.	D.	$SPD : SB = SBP : SD$	3	8 u. 1
BP. PD. B.	P.	$ST : \text{Cos.}BP = TB : \text{Cot.}BPA$ $TDP : TBP = \text{Cos.}BPA : \text{Cos.}DPA$	4	5
BP. BD. B.	D.	$ST : \text{Cos.}B = TBP : TAB$ $SAD : SAB = TPRA : TPDA$	5	2

BP. PD. B.	BD.	ST : Cos. B = TBP : TAB Cos.BP : Cos. AB = Cos. DP : Cos. AD	6	3
BP. BD. B.	DP.	ST : Cos. B = TBP : TAB Cos.AB : Cos. BP = Cos.AD : Cos. DP	7	3
BP. B. D.	P.	ST : Cos. BP = TB : Cot. BPA Cos. PBA : SBPA = CosPDA : SDPA	8	4
BP. B. P.	D.	ST : Cos. BP = TB : Cot. BPA SBPA : SDPA = CosPBA : Cos.PDA	9	4
BP. B. D.	DP.	SD : SBP = SB : SPD	10	1
BP. B. D.	BD.	ST : Cos. B = TBP : TAB TPDA : TPBA = SAB : SAD	11	2
BP. B. P.	DP.	ST : Cos. BP = TB : Cot. BPA Cos. DPA : Cos. BPA = TBP : TDP	12	5

§. 36.

Hat man ſich in der wirklichen Berechnung der ebenen Dreyecke hinreichend geübt, ſo kann dieſelbe bey den ſphäriſchen nun nicht ſchwer fallen, wenn man ſich nur erinnert, daß auch hier die Seiten, durch Grade, Minuten 2c. 2c. ausgedrückt werden. Diß erlaubt, und der Raum verlangts, die praktiſche Ausführung aller Fälle wegzulaſſen. Blos dem Anfänger zu Gefallen, will ich einige wirklich berechnete Aufgaben hieherſetzen.

I.

Es ſeye Fig. 16. Tr. Sph. T. I. im △ ABP

Gegeben	und	zu finden
BP = 60°		ſo iſt AP = 20°. 12′.
B = 23°. 30′.		

Denn man hätte nach Tafel I. 15ten Fall, verbunden mit Tr. Pl. §. 33. Zuſ.

l SB	=	9.6006997
l SBP	=	9.9375306
		19.5382303
l ST	=	10.0000000
l SAP	=	9.5382303

mit welchem in den Tafeln am nächſten übereinkommt 20°. 12′ = AP.

II.

Wäre Gegeben	und	zu finden
AB = 57°. 47′.		ſo wär P = 77°. 44′.
B = 23. 30.		

Indem nach der Tafel I. 8ten Fall

l SB	=	9.6006997
l Cos. AB	=	9.7268269
		19.3275266
l ST	=	10.0000000
l Cos. P	=	9.3275266

Womit in den Tafeln am nächſten übereinſtimmt 77°. 44′ = P.

III.

Wäre Gegeben und zu finden

B = 23°. 30′ ſo wäre BP = 60°.
P = 77. 44.

Indem nach der Tafel I. 7ten Fall

l Cot. B	=	10.3616981
l Cot. P	=	9.3373113
		19.6990094
l ST	=	10.0000000
l Cos. BP	=	9.6990094

Womit in den Tafeln am nächſten übereinſtimmt: 60° = BP.

Anmerkung.

Und diß wird hinreichend ſeyn, dem Anfänger die Leichtigkeit der Anwendung, derer in den Proportionstafeln gegebenen Regeln begreiflich zu machen. Soll ihm aber die ſphäriſche Trigonometrie in der Aſtronomie und mathematiſchen Geographie wahren Nutzen ſchaffen, ſo muß er ſich freylich (wie auch in den Vorleſungen geſchehen wird) alle Fälle, durch wirkliche Berechnung geläufig machen.

Kurze Geſchichte der Trigonometrie.

§. 37.

Sehr richtig nennt Wolf, in der Vorrede zu den Sinustafeln, die Trigonometrie eine Tochter der Sternſehekunſt, denn dieſe gab wirklich Gelegenheit zu ihrer Erfindung (Tr. Pl. §. 1.) Daher findet man ſie auch gewöhnlich vor den ältern aſtronomiſchen Schrifften. Hipparch (er lebte kurz V. C. G.) beſchäfftigte ſich, ſoviel man weiß, zuerſt mit ihr. Seine 12 Bücher von den Triangeln giengen zwar verlohren, aber nicht der Auszug von ihnen, welchen Claudius Ptolomäus im J. C. 200 in ſein Almageſt einrückte. Um eben die Zeit ſchrieb Menelaus 6 Bücher von den Sehnen und 3 über die ſphäriſche Triangel, die ſehr rar ſind, ungeachtet ſie unter Almamon ins Arabiſche (G. §. 269.) und vom Regiomontan ins Lateiniſche überſetzt (G. §. 272.) auch von Maurolyc (G. §. 273.) herausgegeben wurden.

§. 38.

Unter den Arabern ſchrieb: Mohamed Ben-Muſa von den ſphäriſchen Triangeln unter dem Tittel: De figuris planis & ſphæricis, und Geber Ben-Aphla trug in ſeinem Werk über den Ptolomäus im 11ten Jahrhundert die erſten Fundamentalſätze unſerer Trigonometrie vor. Allein dieſe Trigonometrie der Alten iſt von der heutigen ausnehmend verſchieden. Sie hatten weder berechnete trigonometriſche Linien noch Logarithmen, theilten den Radius nur in 60 Theile, berechneten hieraus die Gröſſe, der zu beſtimmten Winkeln gehörigen ganzen Sehnen, und ſo fanden ſie die Seiten und Winkel der Triangel. Sie erleichterten ſich zwar die Rechnung durch den Gebrauch der

halben Sehnen, wie aus dem Albatenius erhellet, aber noch immer blieb der Radius nur in 60 Theile getheilt.

§. 39.

So blieb die Trigonometrie in ihrer Kindheit, bis endlich im 15ten Jahrhundert Purbach und Regiomontan (S. §. 272.) ihre Verbeſſerung übernahmen. Der erſte lieferte eine neue Ueberſetzung des Ptolomäus, verbannte den Sexagenal-Calcul aus der Trigonometrie, bereicherte ſie mit verſchiedenen Sätzen, theilte zuerſt den Radius in 600000 Theile und berechnete die Sinuſſe nach dergleichen Theilen. Der andere lieferte nach Purbachs Eintheilung wirkliche Sinustafeln, ſchrieb Libr. V. de triangulis omnimodis, welche 1464 und 1553 in Nürnberg herauskamen, auch im nemlichen Jahrhundert in Baſel in Fol. neu aufgelegt wurden, und ſowohl in der ebenen als ſphäriſchen Trigonometrie, die Lehre von den Logar. einige Nepern zugehörige Sätze und den Gebrauch der + und — Zeichen, ausgenommen, beynahe ſo vollſtändig, als manche neuere, ſind. Ein Theil davon wurde 1554. in Tübingen von Erasmus Rheinhold herausgegeben, unter dem Tittel: Tabulæ directionum profectionumque. In dieſem Werk verließ Regiomontan ſeine erſte Eintheilung und theilte den Radius, der Bequemlichkeit im Rechnen zu gefallen, in 1000000 Theile. Er war der erſte, welcher den Gebrauch der Tangenten, ſo wie Rhäticus im 16ten Jahrhundert die Secanten, einführte. Viet (S. §. 274.) gab analytiſche Formeln, für die Sinuſſe der doppelten, dreyfachen ꝛc. ꝛc. Bögen und berechnete nach dieſen trigonometriſche Tafeln, in ſeinem Canone mathem. 1579. Noch unendlich verdienter machte ſich Pitiſcus um die Trigonometrie. Er theilte den

Radius in 1000 Trillionen und berechnete die Tafeln, nicht nur für einzelne Grade und Minuten, ſondern ſogar für Secunden und Tertien.

§. 40.

Allein die Rechnungen blieben, wegen der fürchterlich groſſen Zahlen, noch immer ſehr mühſam, bis im 17ten Jahrhundert die Logarithmen erfunden wurden (Ar. X. Abſchn. §. 302 und 303.) Neper berechnete ſie aber nur für Minuten und ſeine Methode war etwas unſchicklich, indem er den ST = 0 ſetzte, folglich für die wachſende Sinuſſe negative Logarithmen erhielte (Ar. §. 280.) Brigg hingegen ſetzte den ST = 1 und deſſen Logarithmen = 0, berechnete die Logarithmen für alle Grade, ja bis auf 100tel Grade des Quadranten, für die Sinuſſe und Tangenten; ſtarb aber während der Arbeit, die Heinrich Gellibrand, mit Vlacqs Hülfe herausgab und Kepler zuerſt in Deutſchland 1624 und 1625 in Linz in 4to bekannt machte, und Urſin berechnete alle Logarithmen von 10 zu 10 Secunden. Endlich lieferte der berühmte Adrian Vlacq, in ſeinen, 1633. herausgegebenen Tafeln, die für den ganzen Quadranten, von 10 zu 10 Secunden berechnete Logar. der Sinuſſe, Tangenten und Secanten bis auf 10 Decimalen, nebſt den Logarithmen der natürlichen Zahlen bis auf 100000, nach dem Briggiſchen Syſtem. Aus dieſen Vlacquiſchen Tafeln, haben wir einen Auszug, der freylich nicht an die Gardineriſche vielweniger Pezenaſiſche reichet (Ar. §. 302. und 303.) Dieſer letztere hat nicht nur einige Fehler der engliſchen Ausgabe verbeſſert, ſondern enthält auch überdiß, die von Hrn. Mouton für alle einzelne Secunden, der 4 erſten Grade des Quadranten, berechnete Logarithmen, welche Hr. De la Lande dem Herausgeber mittheilte, nebſt andern

beträchtlichen Vermehrungen und iſt wirklich die vollſtändigſte, die man hat, ohngeachtet nicht zu läugnen iſt: Daß die von Herrn Schulze (Ar. §. 303.) herausgegebene, wegen dem kleinern Format, zum Gebrauch noch bequemer ſind, wenn ſie gleich nicht alles enthalten, was man in den Pezenaſiſchen findet.

§. 41.

Uebrigens wurde die Trigonometrie ſelbſt, im vorigen und der erſten Hälfte des jetzigen Jahrhunderts ſo ſehr verſchönert, durch Erfindung neuer Sätze und Anwendung in allen Theilen der Mathematik ſo ungemein vermehrt, daß man ſie, gegen ihre Kindheit, gar nicht mehr kennet, wohin unter andern Nepers, noch mehr Wolfens allgemeine für alle Triangel erfundene Regel (S. Wolfii Elem. Trig. Sphær.) die Lambert in ſeinen Beyträgen T. I. III. p. 369, ſo herrlich verbeſſert hat, der auch T. II. erſten Abſchn. IV. p. 133. algebraiſche Formeln für die Sinuſſe von 3 zu 3 Graden liefert; und die Anwendung des algebraiſchen Calculs, vorzüglich der + und — Zeichen in der ſphäriſchen Trigonometrie gehöret. Vollſtändiger findet man ihre Geſchichte im Montucla, wo man, verbunden mit Wolf. Elem. Tom. V. und Einleitung zur mathem. Bücherkenntnuß 7ten Stück, ein ziemlich vollſtändiges Verzeichnuß der trigonom. Schriftſteller ſammlen kann. Ich liefere hievon dem Anfänger einen kurzen Auszug.

§. 42.

a. Als Berechner und Verbeſſerer der Tafeln zeichnen ſich aus: Jo. Neper (eigentlich Napier) Heinrich Brigge, Gellibrand, Urſin, Vlacq, Pitiſcus, Pezenas, Schulze (§§. præced.)

b. Unter den gröſſern Tafeln ſind die merkwürdigſte:

1) Nepers (Ar. §. 302. Nro. 3. a.)

2) Des Bartholomäus Pitiscus 1613. Frankfurt am Mayn.

3) Trigonometr. britannica &c. &c. Ab Henr. Gellibrand. Goud. 1633. Fol.

4) Henr. Briggii Arithm. logarithm. Londin. 1624. (Ar. §. 302.)

5) Henr. Briggii Arithm. log. cura Adr. Vlacquii Goudæ 1628. Fol. 9. A. 7. B.

6) Adrian Vlacq Trigon. artificialis ſeu magnus Canon triangulorum logarithmicus. Fol. Goud. 1633.

7) Sherwins mathematical Tables (Ar. §. 302.)

8) Des Pater Pezenas (Ar. §. 302.)

9) Schulzens (Ar. §. 303.)

Kleinere gute Tafeln ſind

1) Ingenieursſchul, erſter Theyl, von Jo. Faulhaber, Ingenieur und Burger in Ulm, Frankf. am Mayn 1630. 8vo 170 S. worinnen Canon triang. logarithm. $\frac{1}{2}$ A. und zehen tauſent Logarithmi &c. $6\frac{1}{2}$ B. in Augsburg, nachher aber alles zuſammen 1637 in 4to herausgekommen. Der zweyte Tractat enthält die Logar. Sin. Tang. & Secant. für jede Minute mit 10 Decimalſtellen, die man in keiner Handausgabe findet.

2) Vlacquens zu Goude 1636, in Leyden 1651, im Haag 1665, und in Lyon 1670 erſchienene.

3) Edmond Wingate arithmetique logarithmetique, a Goude 1628 und 1633. gr. 8. 9 Bog.

4) Ozanams Tables des Sinus, Tangentes &c. &c. avec un traité de Trigonometrie. A Paris 1685.

In dieſen wurden, die im Druck eingeſchlichene Fehler mit der Feder verbeſſert, und man findet darinnen eine ſchöne ebene und ſphäriſche Trigonometrie.

5) Strauchens, zuerſt vom Verfaſſer auf eigene Koſten, Wittenberg 1662, und nachher von Sturm in Amſterdam 1700 herausgegebene, welche Käſtner hochſchätzet.

6) Vlacquens von Wolfen in Halle 1711. 1728. 1744. und nach ſeinem Tod, 1772. ſowohl lateiniſch als teutſch edirte, ſind wegen den dabey befindlichen Tafeln für die Quadrat- und Cubikzahlen ſehr bequem, wohlfeil und ziemlich genau.

7) Tables de Logarithmes pour les Sinus & Tangentes &c. &c. Paris 1760. (Ar. §. 303.)

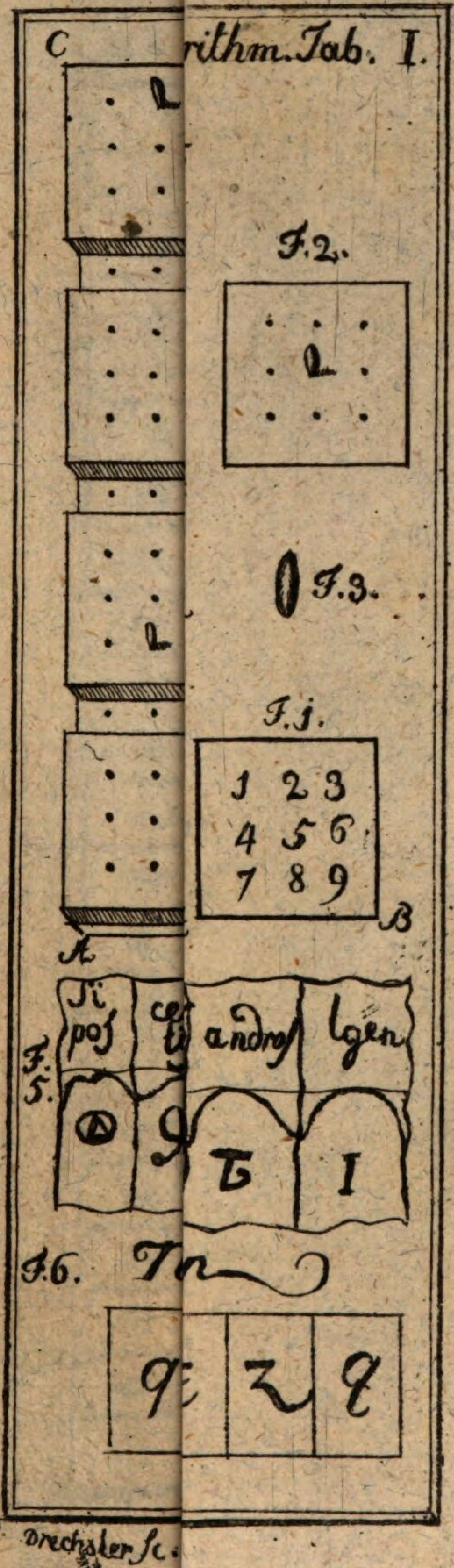
8) Tafel der Sinuſſe, Tangenten und Secanten ꝛc. Wien 1777. 4to. welche Herr Major Unterberger und D. L. Pichler mit vielem Fleiß beſorgten. Bey den Logar. ſind aller Orten die Differenzen beygefügt, die Sinuſſe für den erſten halben Grad, von Secunde zu Secunde und dann für alle einzelne Minuten berechnet, auch eine Anleitung zum Gebrauch vorangeſchickt. Und dieſe werden unter den kleinern, wirklich beynahe die vollſtändigſte ſeyn.

c. Zum weitern Studiren ſind in der Trigonometrie zu empfehlen:

1) Aſtronomia J. Baſſantini Scoti &c. apud Jo. Tornæſium 1599. worinnen von p. 1 — 45. eine artige ebene und ſphäriſche Trigonometrie nebſt den Sinustafeln für einzelne Minuten befindlich.

2) Pitiſci Libr. V. de trigonom. 4to 1599. und Francof. 1612.

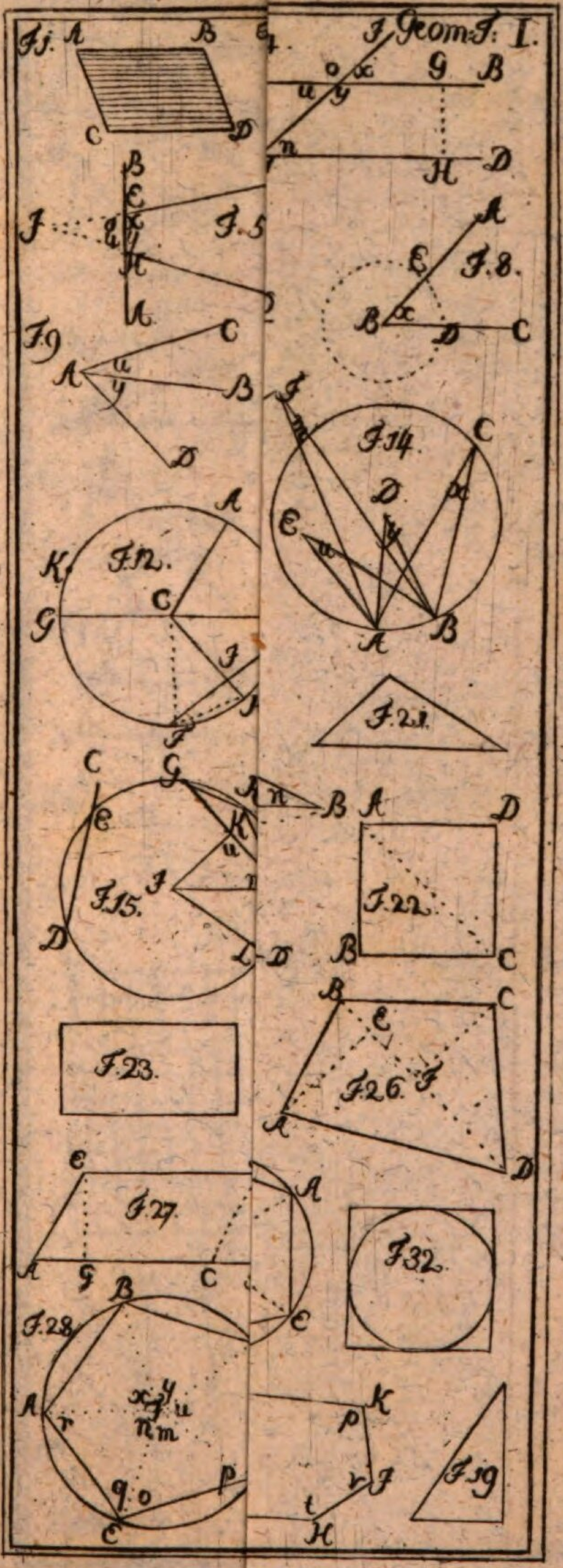
3) Jo. Neperi Trigon. & Logiſtica mathem. 4to. 1614. recuſ. 1619.
4) Benjam. Urſini Sprottavi Sileſii Curſ. math. pract. volumen prim. continens J. Neper. Trig. log. uſibus diſcentium accomodatam. Colon. 1618. 8vo 10 Bogen.
5) Ejusd. Trigonometria cum magno logar. canone Colon. 1625. 4to excuſ. Berolini 1624.
6) Bonavent. Cavallierii Trigon. plan. & ſphær. linearis & logarithmica. 4to Bonon. 1640.
7) Traité de Trigonometrie de Monſieur Deparcieux, 4to avec les tables de Logarithmes. Paris 1760.
8) Zuſätze zu den logarithm. und trigonometriſchen Tabellen ꝛc. von J. H. Lambert. Berlin 1770. 8vo für eigentliche Mathematiker unentbehrlich.
9) Bermanni diſſertatio de regulis trigon. ſphær. catholicis. Wittebergæ 1766.
10) Sphæricorum formulare in auditorum uſus digeſtum a Jo. Jer. Brackenhofer. 4to. Argent. 1770. giebt die Quellen und Geſchichte vortrefflich an.
11) Analytiſche Trigonometrie von Georg Simon Klügel. 8vo. Braunſchweig 1770.
12) Wolfii Elem. Matheſ. Clemmens, Seegner, Karſten, Käſtners Lehrbücher (Geom. §. 288.) Käſtners Aſtron. Abhandlungen II. Sammlung, 4te Abhandlung. Beckii Theoria Sinuum & Tangentium. Salisburgi 1771.
13) Inſtitutiones Geometriæ Pars II. ſeu Trigonom. Plana a P. Carolo Scherfer e S. J. Vindobonæ 1770. 4to wo ſehr viel gutes praktiſches geſagt wird.

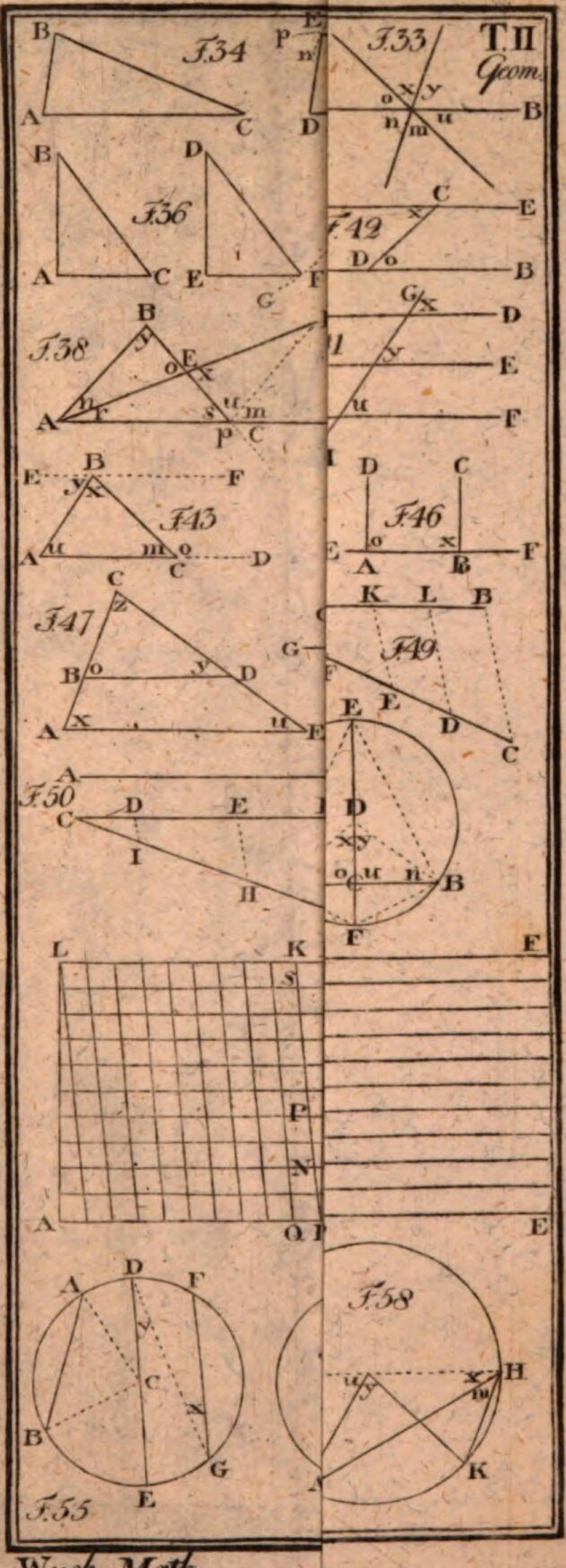


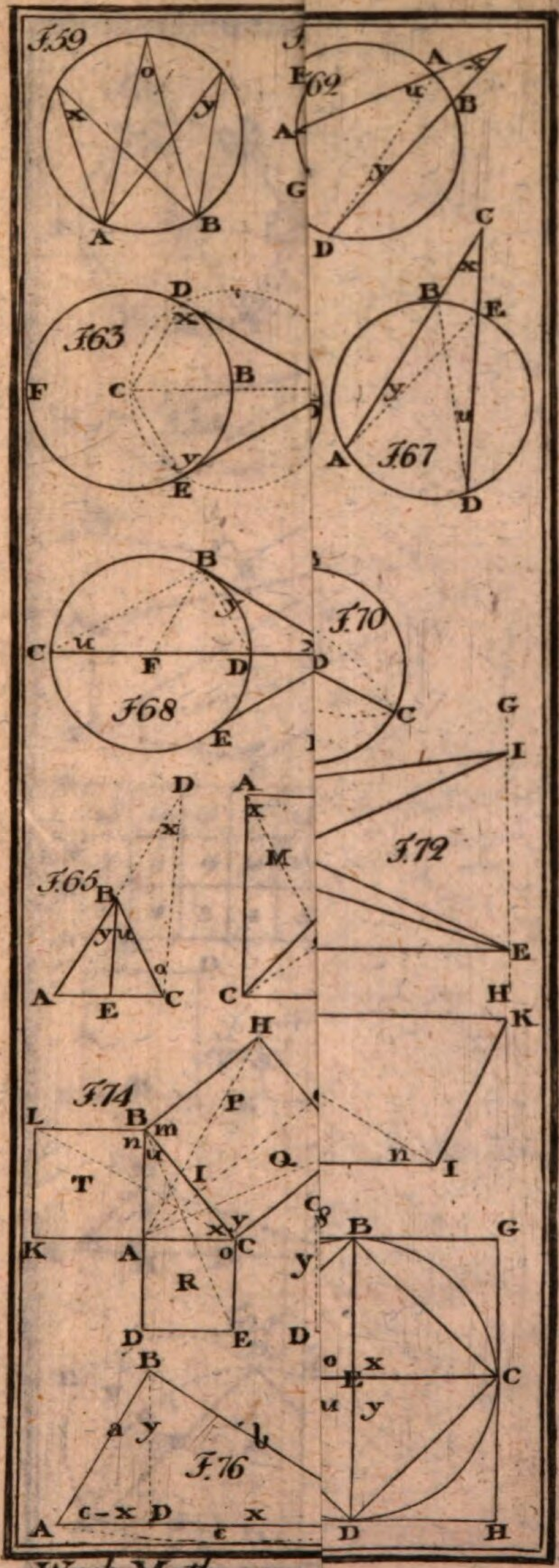
Drechsler sc.

tadick.	Eikoſitetartick.	
1	1	a
2	2	b
3	3	c
4	4	d
5	5	e
6	6	f
10	7	g
11	8	h
12	9	i
13	10	k
14	11	l
15	12	m
16	13	n
20	14	p
21	15	q
22	16	r
23	17	s
24	18	t
25	19	u
26	20	v
42	21	x
55	22	y

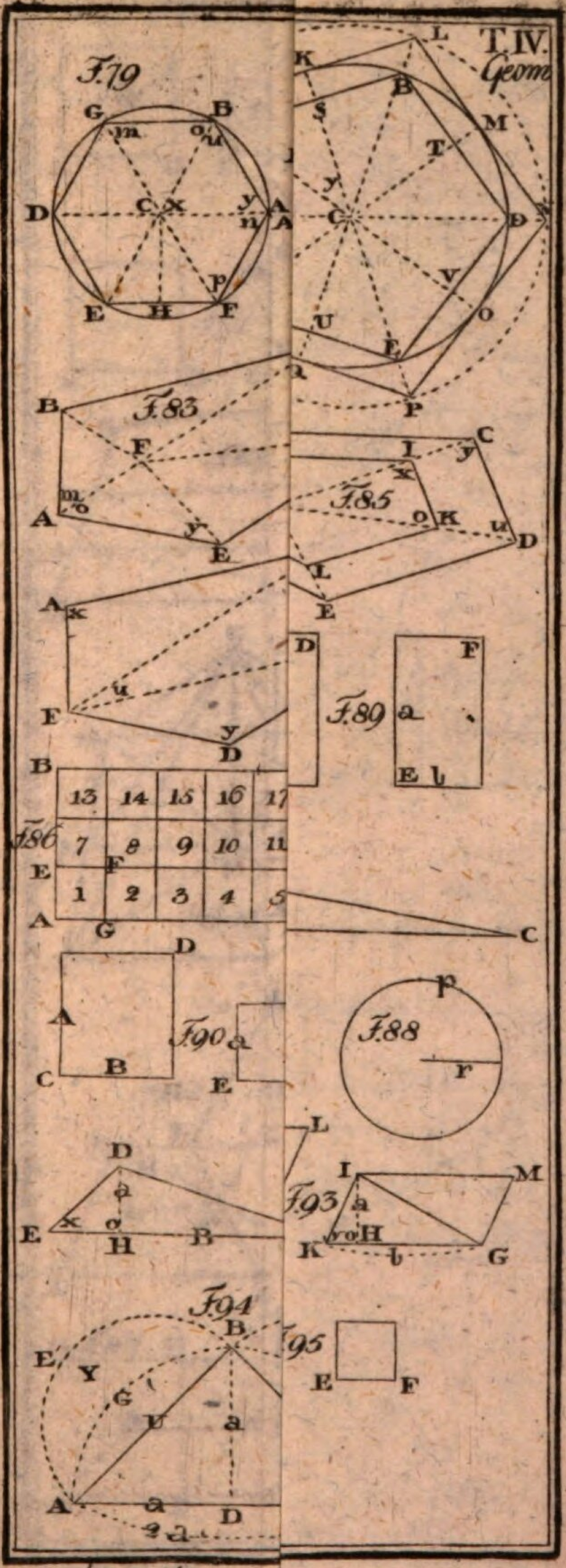
ptadick.	Eikoſitetartick.	
101	23	z
114	24	ao
130	30	af
143	40	ar
156	50	bb
202	60	b m
404	70	b y
606	80	ch
1111	90	c t
1313	100	dd
1515	200	hh
2020	300	m m
2222	400	r r
2424	500	vv
2626	600	a a o
	700	a e d
	800	a i h
	900	a n m
	1000	a s r


Geom: T: I.
F.1.
F.5
F.8.
F.9
F.14.
F.12.
F.21.
F.15.
F.22.
F.23.
F.26.
F.27
F.32.
F.28.
F.19

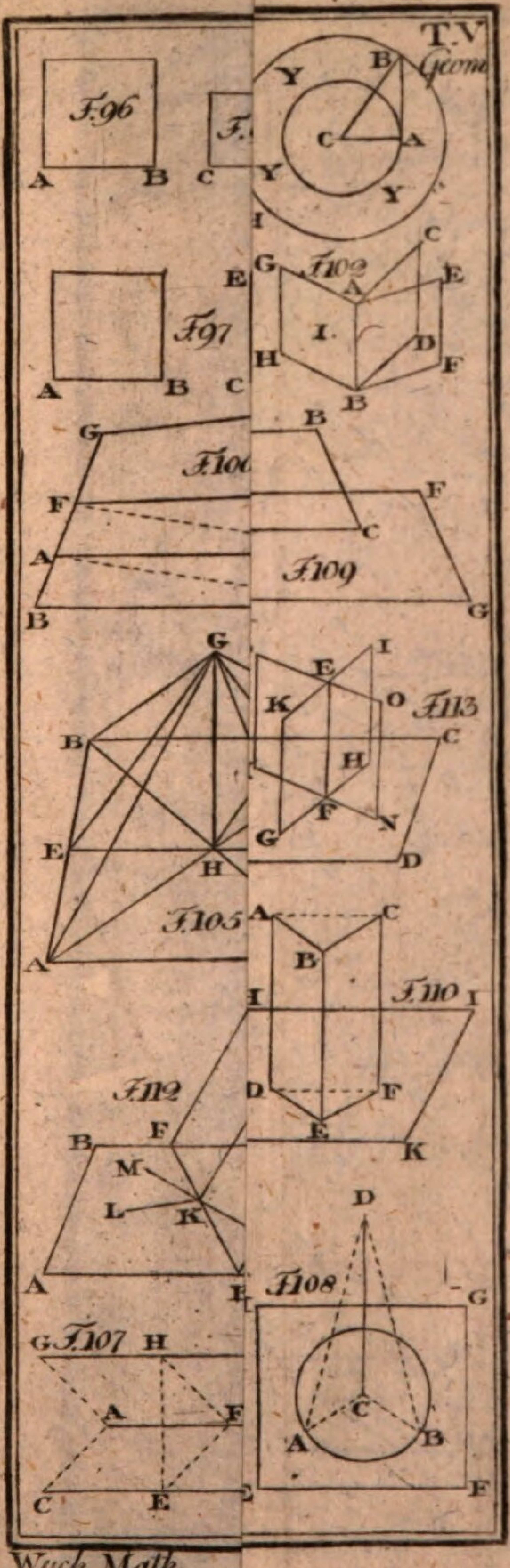

T. II
Geom.
F.34
F.33
F.36
F.42
F.38
F.43
F.46
F.47
F.49
F.50
F.58
F.55



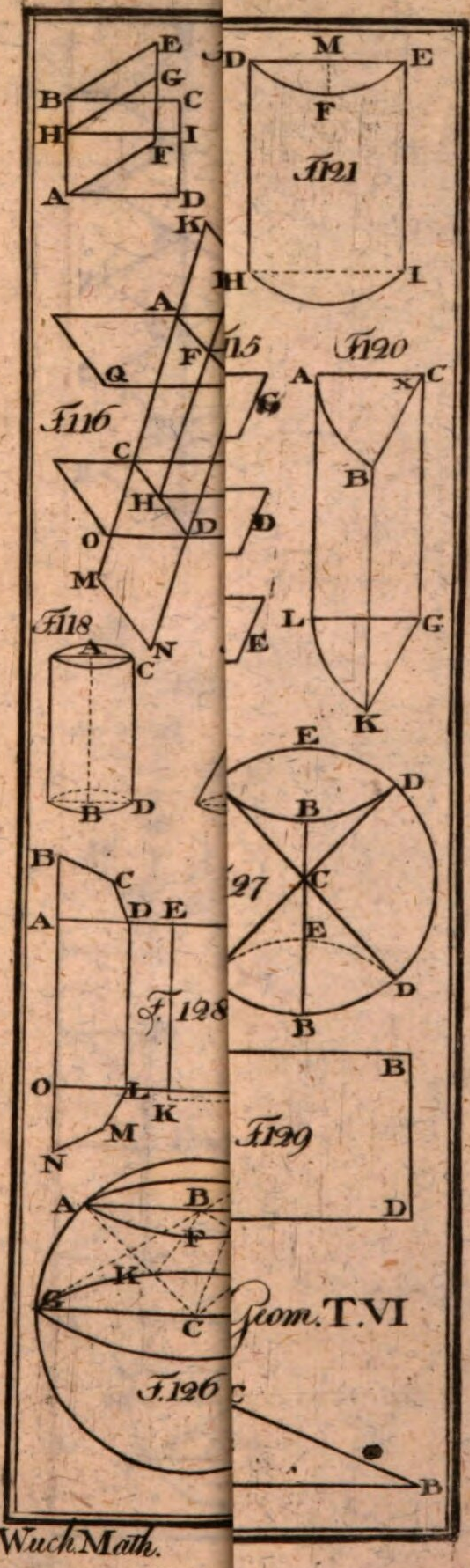
Wuch. Math.



Wuch. Math.



Wuch. Math.

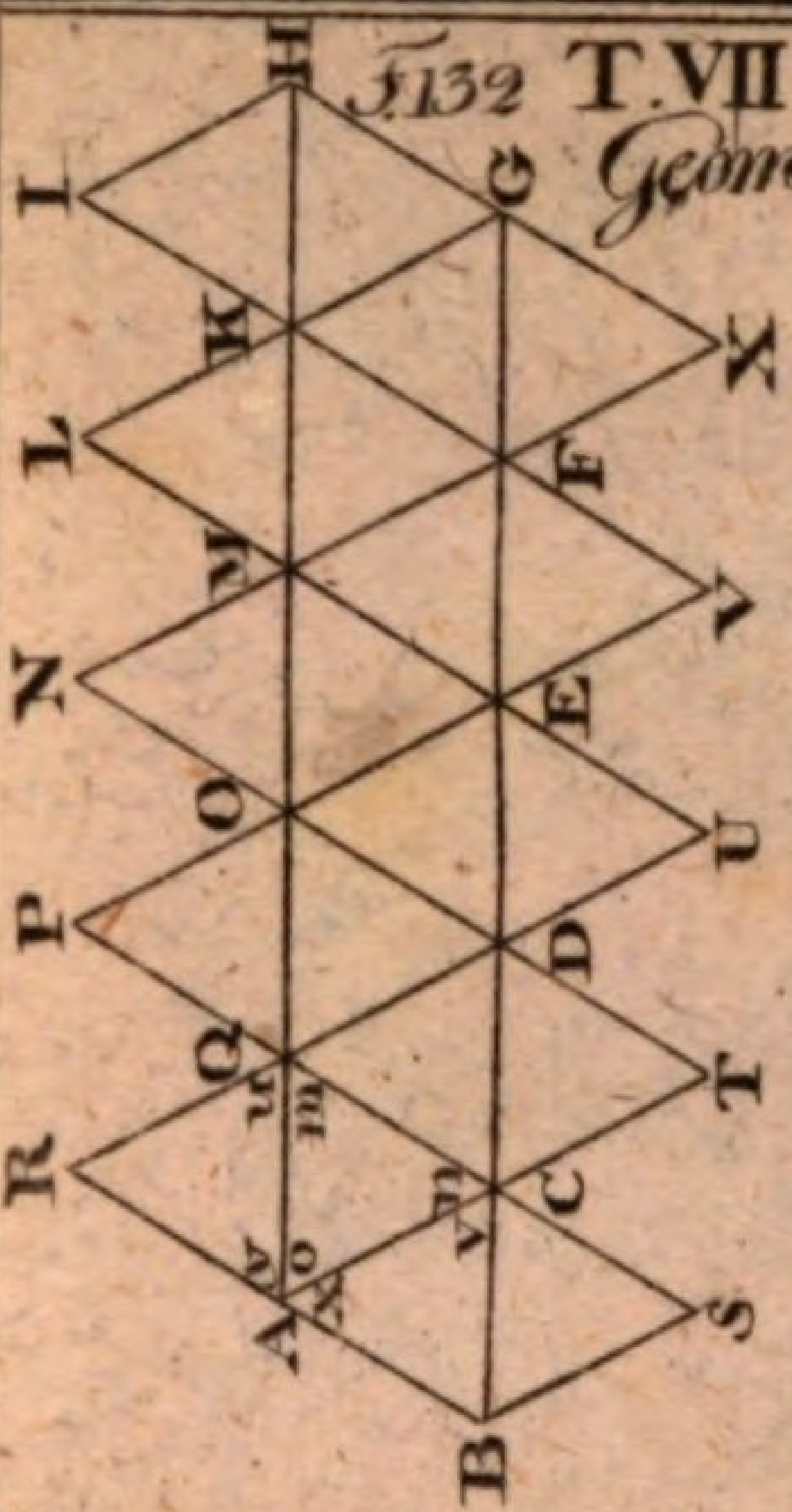


Geom. T.VI

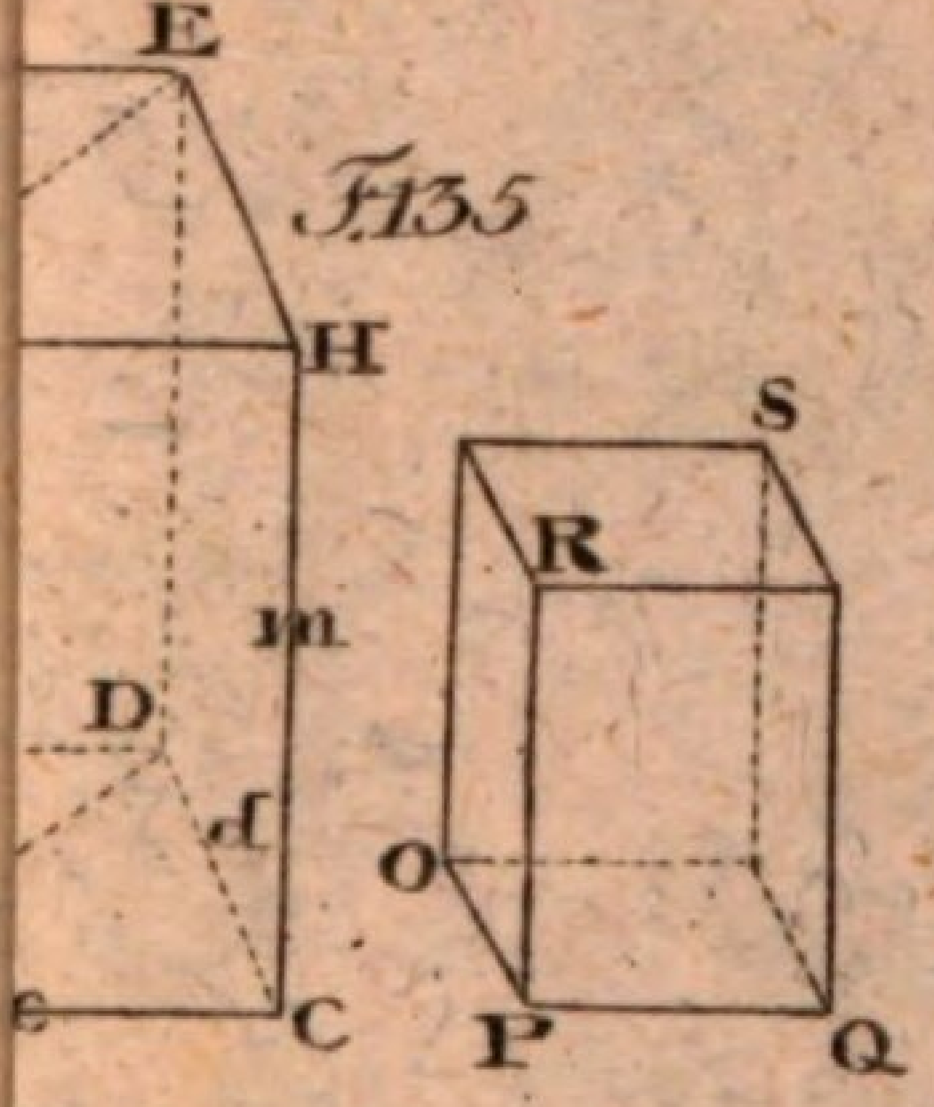
Wuch. Math.

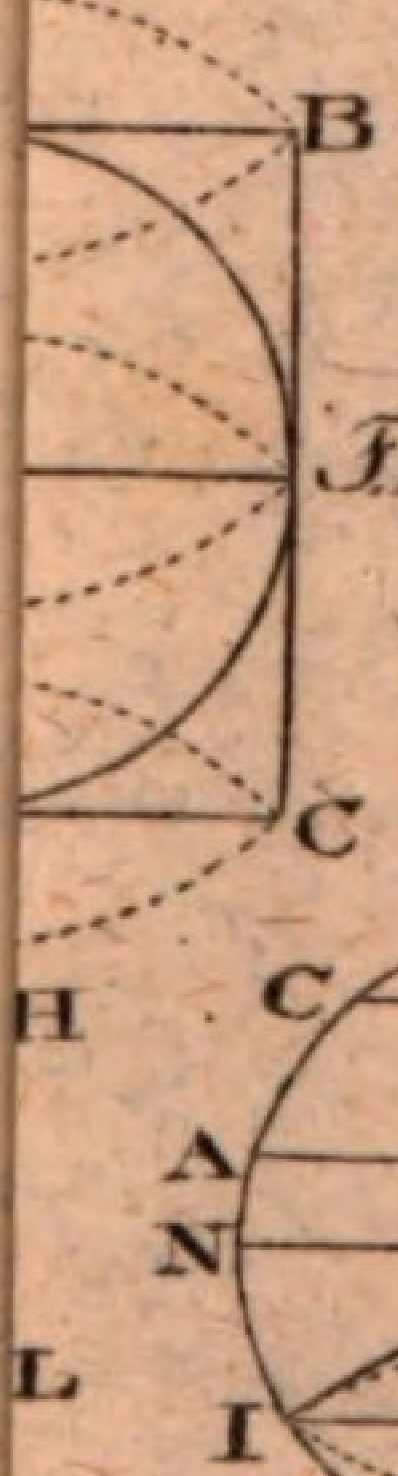
T.VII Geom

F.132



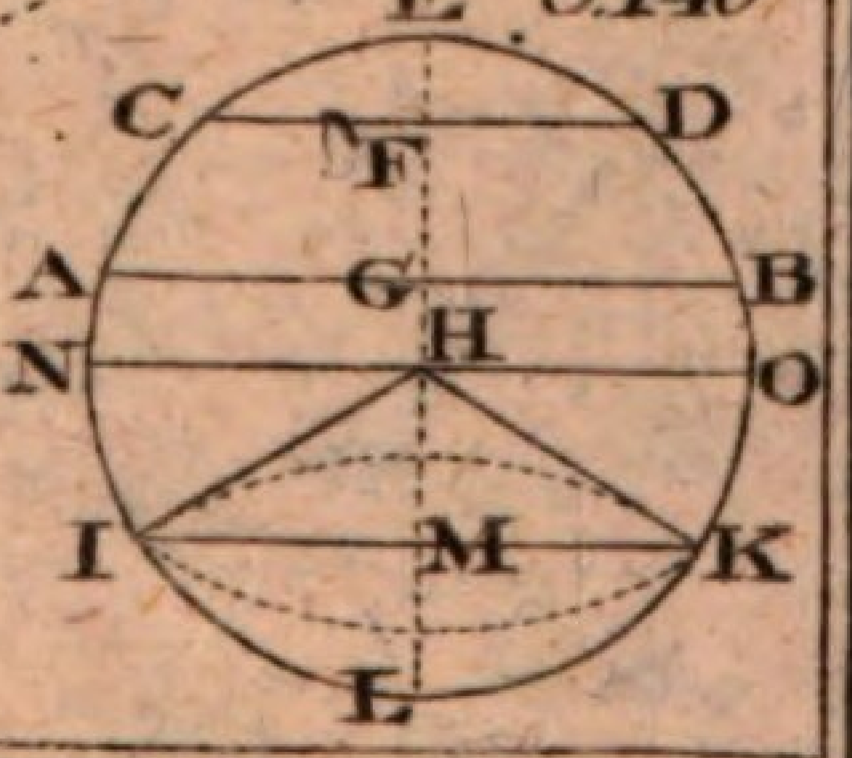
F.135

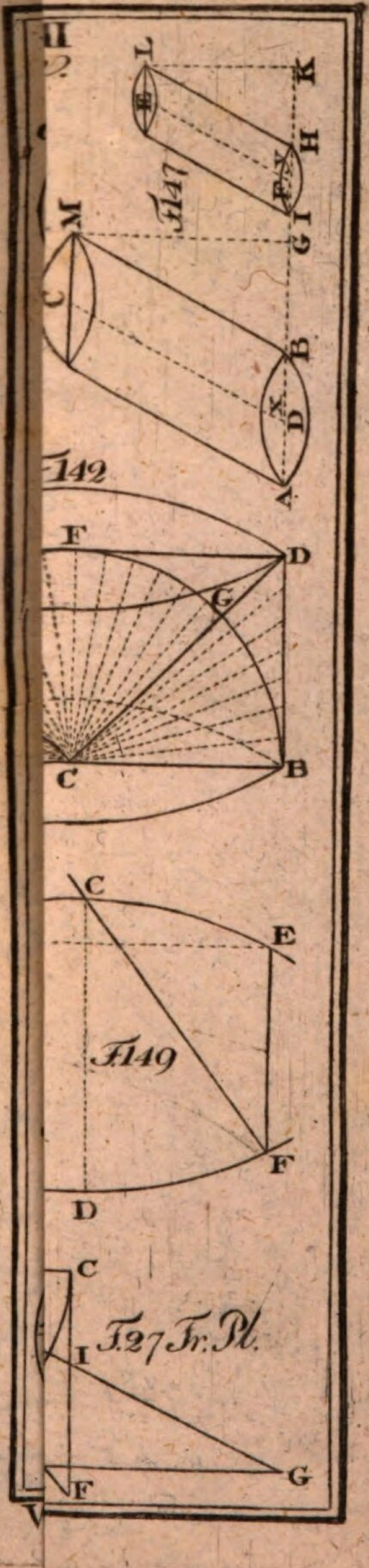


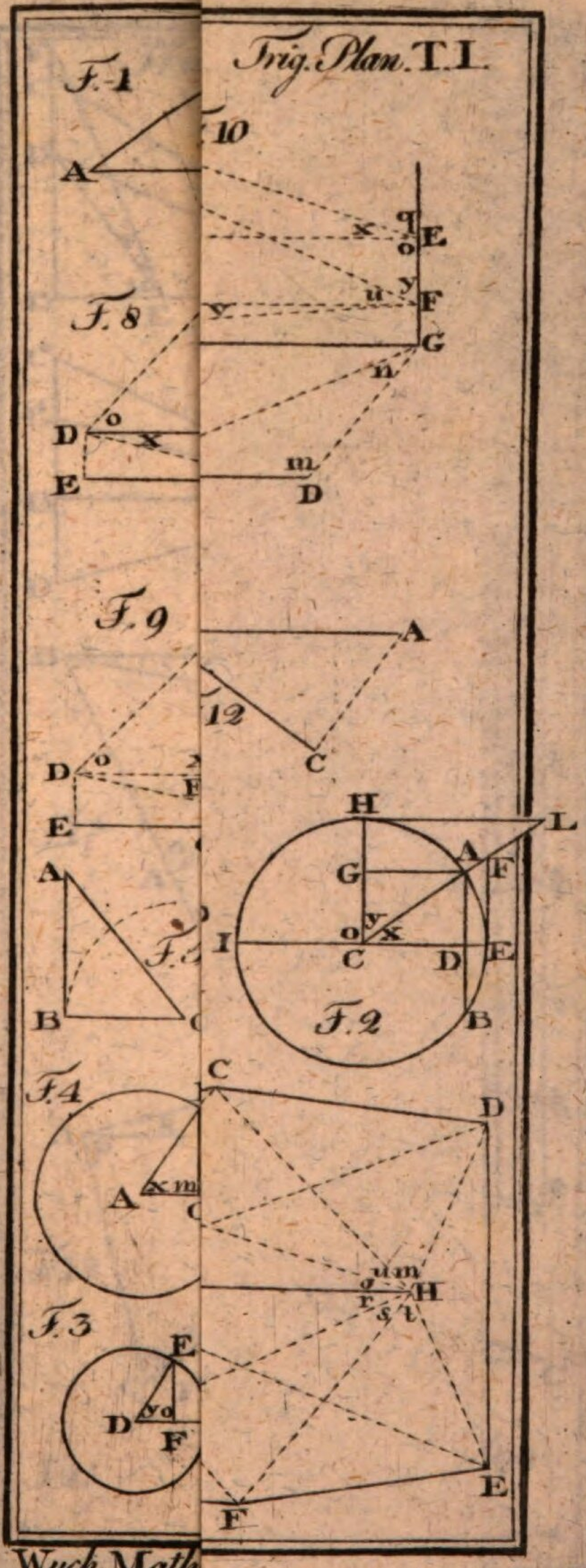


F.139

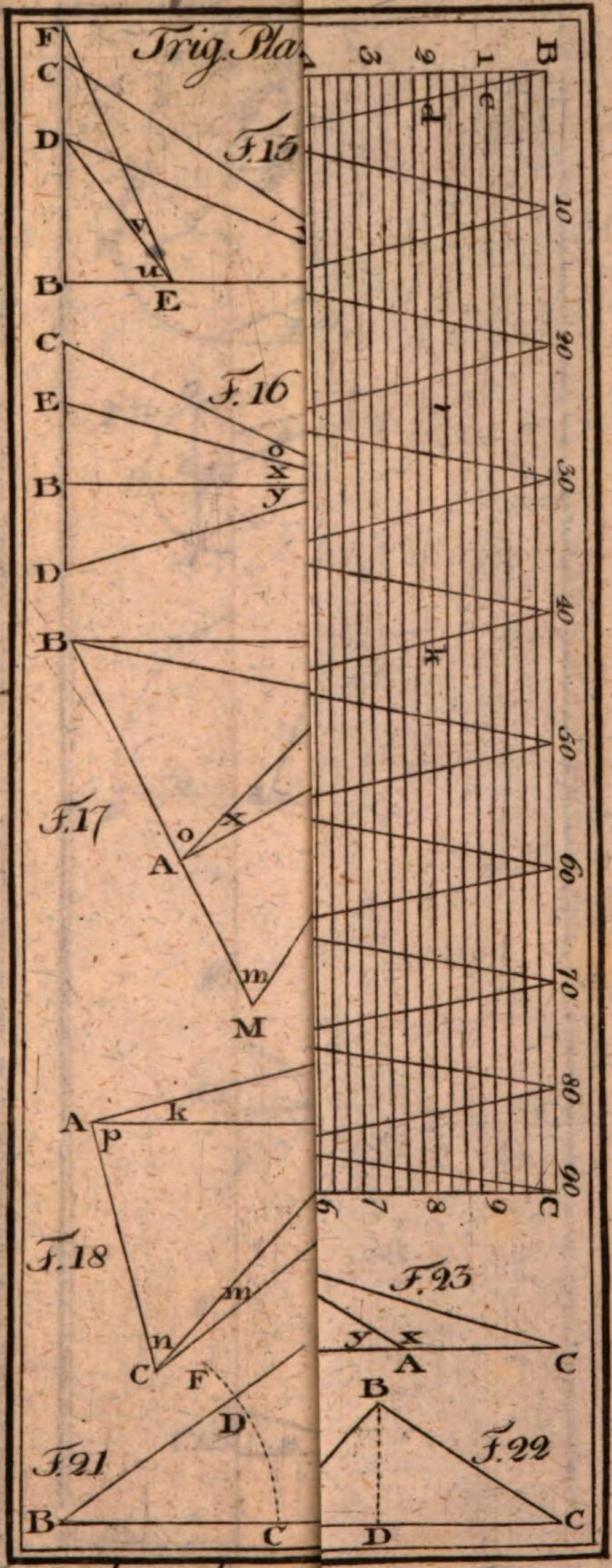
F.140



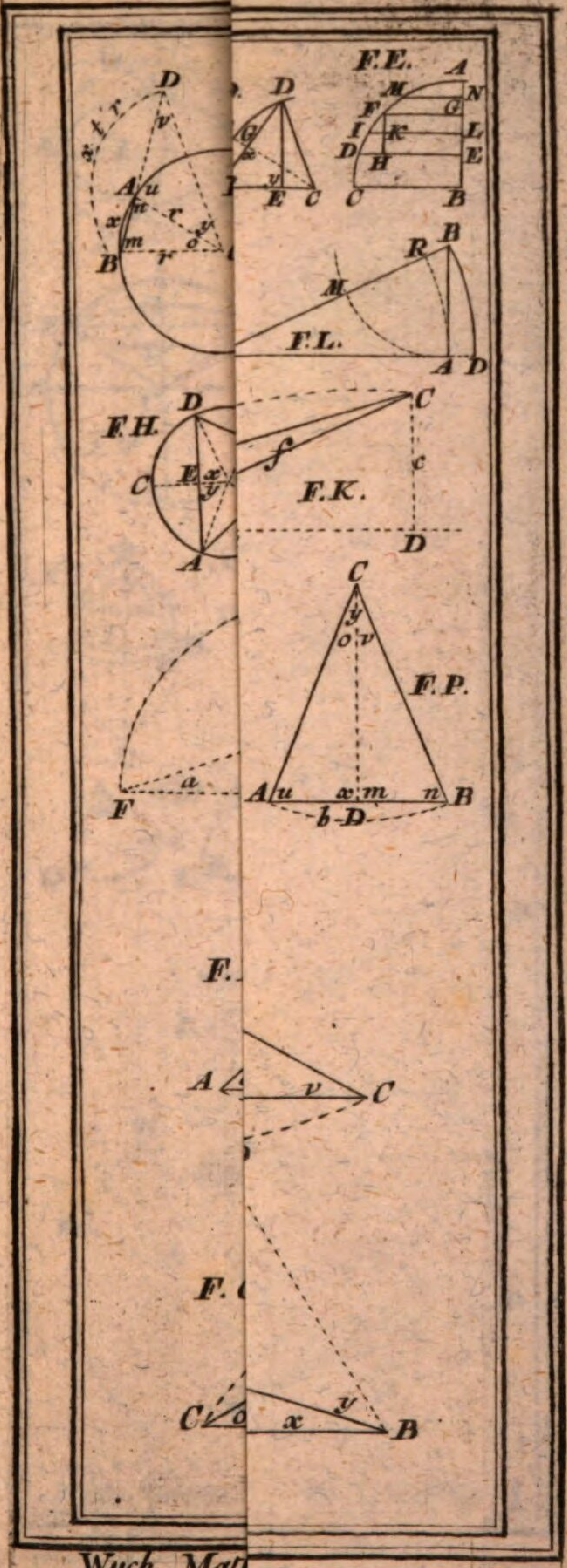

F.147
F.142
F.149
F.27 Fr. Pl.



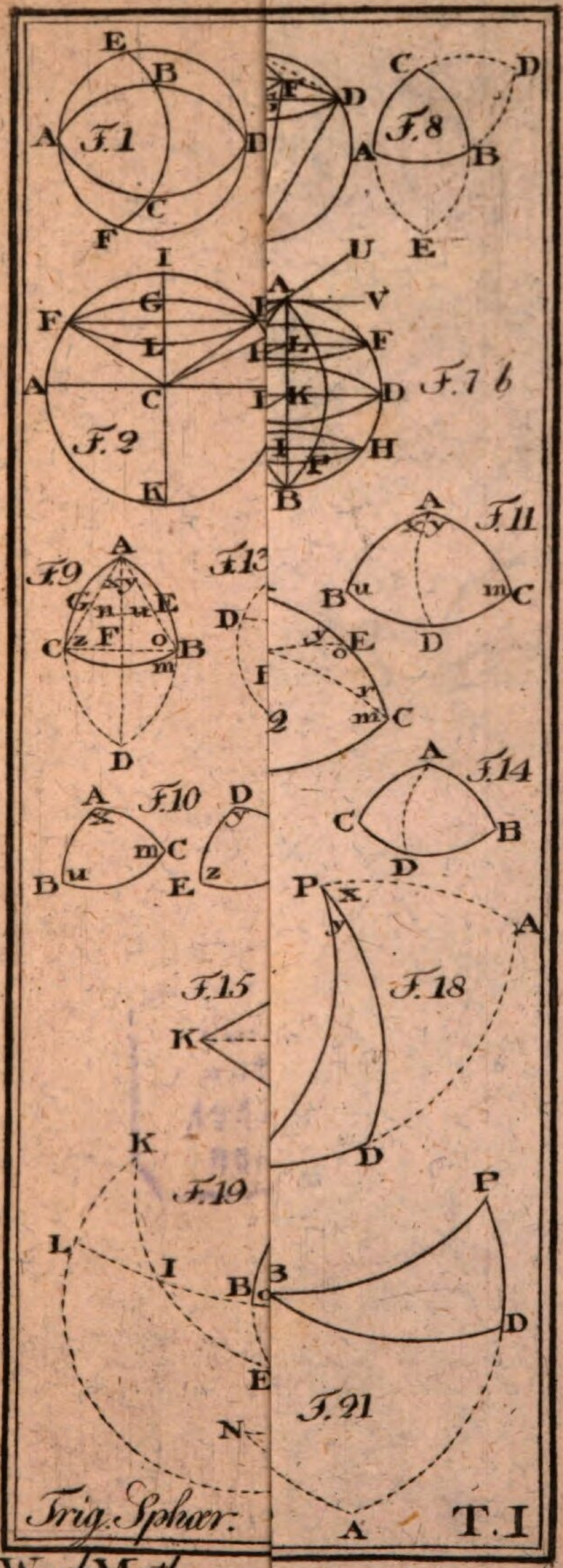
Wuch. Math



Wuck Math



Wuch. Mat



Wuch Math.

Bayerische
Staats-
Bibliothek
München

XXX X.89

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wucherer, Wilhelm Friedrich,

Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie

Carlsruhe 1782

Math.u. 224
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594425-4
VD18 14777096-001